На правах рукописи

Белоусов Федор Анатольевич

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика

Специальность 01.01.02 -Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Центральном экономико-математическом институте Российской академии наук (ЦЭМИ РАН)

Научный руководитель:	Бекларян Лева Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Центрального экономико-математического института Российской академии наук (ЦЭМИ РАН)
Официальные оппоненты:	Белолипецкий Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Вычислительный центр им. А. А. Дороницына Российской академии наук (ВЦ РАН), заведующей сектором «Математического моделирования технических систем» Безяев Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, ГОУВПО «Российский университет дружбы народов», заместитель заведующего кафедрой «Дифференциальные уравнения и математическая физика»
Ведущая организация:	ФГБУН Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (НИИСИ РАН)

Защита состоится 17 ноября 2014 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.013.02 по адресу: 117418, Москва, Нахимовский пр, 47, аудитория 520.

Сведения о защите и автореферат размещены на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и наук Российской Федерации http://vak.ed.gov.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке или на сайте института по адресу: 117418, Москва, Нахимовский пр, 47, комн. 717 или www.cemi.rssi.ru.

Автореферат разослан «   »   2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.013.02,
кандидат физико-математических наук   Борисова Светлана Валерьевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена периодическим решениям нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Периодические решения играют важную роль как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих других научных областях и прикладных задачах. Существуют разделы физики и техники, которые полностью базируются на колебательных явлениях. Это задачи электромагнитных колебаний, которые включают в себя оптику, учение о звуке, радиотехнику и прикладную акустику и т.д. Задачи анализа периодических решений дифференциальных уравнений также возникают в химии, при изучении биологических систем, в задачах небесной механики и астродинамики и при моделировании экономических процессов.

Универсального подхода для изучения периодических решений дифференциальных уравнений не существует. Имеется несколько основных методов, которые предлагают различные способы решения данной задачи. В качестве основных методов доказательства существования периодических решений дифференциальных уравнений следует отметить метод точечных отображений Пуанкаре-Андронова, топологический метод, метод направляющих функций, усреднение Крылова-Боголюбова, вариационные методы и т.д. Метод Пуанкаре-Андронова применим в том случае, когда известно в какой части фазового пространства может располагаться периодическая траектория, а также трансверсальная к ней гиперповерхность. В этом случае изучается отображение (локальное) трансверсальной гиперповерхности в себя, порожденное движением вдоль фазовых траекторий, и поиск неподвижной точки для такого отображения, соответствующей периодической траектории. Метод направляющих функций основан на наличии функций с заданным набором условий, которые гарантируют существование периодической траектории. Метод усреднения Крылова-Боголюбова основан на том, что некоторые классы уравнений допускают усреднение, которое порождает принципиально более простое уравнение, чем исходное и сохраняет периодическое решение. Однако, большую часть из перечисленных методов достаточно сложно применять на практике, они требуют выполнения целого ряда трудно проверяемых условий и значительной предварительной работы. Одним из главных результатов этой диссертационно работы является получение легко проверяемых условий, выполнение которых обеспечивает существование единственного периодического решения для дифференциалных уравнений различных классов.

Объектом исследования в диссертации являются различные классы дифференциальных уравнений.

Предметом исследования в диссертации являются система условий, обеспечивающих существование и единственность периодических решений для рассматриваемых классов дифференциальных уравнений.

Методы исследования включают методы интегральных уравнений, методы оптимизации и линейной алгебры.

Цель и задачи исследования. Целью работы является нахождение легко проверяемых условий, сформулированных в терминах правых частей, которые обеспечивают существование и единственность периодических решений для различных классов дифференциальных уравнений. Для достижения поставленной в работе цели были сформулированы следующие задачи:

- Получить условия существования и единственности периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- Получить условия существования и единственности периодических решений для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка ($n > 1$);
- Получить условия существования и единственности периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Научная новизна. Предлагаемый в работе подход по своей сути наиболее близок к методу интегральных уравнений, который детально изложен в монографии Е. Н. Розенвассера [1], однако он существенно модифицирован. Такой подход для изучения периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений был использован в работах А. И. Перова и его учеников. Основной особенностью перечисленных работ является процедура построения операторной функции Грина, с помощью которой и строится периодическое решение. Сама процедура построения функции Грина, а также проверка условий, которым она должна удовлетворять, являются сложными. Решение каждой конкретной задачи требует проведения нетривиальной большой предварительной работы. Подход, развиваемый в диссертационной работе, позволяет обойти эти сложности.

Одним из наиболее важных результатов данной работы является получение теорем существования и единственности периодических решений, условия в которых сформулирова-

[1] В. Н. Розенвассер. Колебания нелинейных систем. - М.: Наука, 1969. - 576 с.

ны в терминах правой части дифференциального уравнения (константа Липшица, величина отклонения для функционально-дифференциального уравнения). Такие условия легко проверяемы. В диссертационной работе все полученные для проверки условия, кроме одного, вычисляются за конечное число операций и используют характеристики правой части дифференциального уравнения. Оставшееся условие имеет тип ряда от тех же характеристик, остаток которого легко оценивается.

Другой особенностью рассматриваемого в работе подхода является процедура линеаризации правой части уравнения, необходимого для исследования периодических решений. Как правило, наиболее распространенным способом выделения линейной части считается тейлоровская линеаризация. Существуют примеры, которые показывают, что тейлоровская линеаризация не всегда позволяет установить существование периодического решения, хотя при иных линеаризациях это удается. Для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений дается алгоритм оптимального, с точки зрения предлагаемого в диссертационной работе подхода, выделения линейной части.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть применены при исследовании периодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

В физике очень часто фигурируют волновые явления различного характера, которые описываются периодическими функциями. Поэтому задачи нахождения периодических решений для дифференциальных уравнений встречаются достаточно часто. Как уже было отмечено выше, эти задачи возникают в электромагнитной динамике, небесной механике а также других разделах физики.

Задачи подобного класса также встречаются в биологии. В качестве примера можно привести модели типа «хищник-жертва», в которых количество особей каждой из популяций может описываться системой дифференциальных уравнений (как линейных, так и не линейных). Равновесными состояниями в этих моделях очень часто являются периодические решения таких систем, которые, в частности, можно искать и предложенным в данной диссертации способом.

Данная работа может быть использована в качестве дополнительного материала при прочтении курса дифференциального уравнения в высших учебных заведениях.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на конференции ”Воронежской весенней математической школы ”Понтрягинские чтения - XXIII” (Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Воронеж, 3-9 мая 2012 г.), на VII международном симпозиуме ”Ряды Фурье и их приложения” (Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, 27 мая - 3 июня 2012 г.), на международной конференции ”International conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach” (Национальный университет им. Ивана Франко, Львовский политехнический национальный университет, Институт прикладной математики и механики (г. Донецк), Институт математики НАН Украины, Украина, г. Львов, 17-21 сентября 2012 г.), на международной конференции "Крымская осенняя математическая школа"(КРОМШ-2012) (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Филиал Московского государственного университета им. Ломоносова в Севастополе, Крымский научный центр НАН Украины, Крымский математический фонд, Крымская академия наук, Украина, г. Севастополь, 17-29 сентября 2012 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ общим объемом 3,5 п.л. (вклад автора - 2,91), из них 2 работы в изданиях, входящих в перечень ВАК Министерства образования и науки РФ, объемом 1,7 п.л.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 114 страниц машинописного текста. Список использованной литературы содержит 89 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, формулируются цели и задачи исследования, определяются объекты, предмет и методы исследования, характеризуются научная новизна, приводятся сведения об апробации работы, структуре и объеме диссертации.

Первая глава посвящена изучению условий существования и единственности периодического решения для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с нелинейной правой частью общего вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x), \tag{1}$$

где $g(\cdot,\cdot\,) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - некоторая ω-периодическая по времени функция. Решением уравнения (1) называется всякая непрерывно-дифференцируемая функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая этому уравнению. Следует сформулировать условия существования и единственности периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (1), а также описать процедуру построения такого решения.

Всюду ниже будет подразумеваться, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица по второй переменной, т.е. для любых $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ из $\mathbb{R}^n$ и произвольного фиксированного $t \in [0, \omega]$ будет справедлива оценка

$$\|g(t, \bar{x}) - g(t, \tilde{x})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_g \|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{2}$$

где L_g некоторая положительная константа.

Процедура линеаризации. Из правой части уравнения (1) линейная часть может быть выделена несколькими способами

$$g(t, x) = ax + f(t, x), \quad g(t, x) = a(t)x + f(t, x), \quad g(t, x) = Ax + f(t, x),$$

где $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\;a(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -ненулевая ω-периодическая функция, A - ненулевая (n, n)-матрица, удовлетворяющая специальным условиям, о которых будет сказано ниже.

Очевидно, в силу справедливости условия Липшица (2) для функции $g(\cdot, \cdot)$, для функции $f(\cdot, \cdot)$ во всех трех случаях это условие также будет выполнено относительно некоторой своей константы Липшица L_f.

Глава разбита на три основные части, каждая из которых посвящена своему способу выделения линейной части.

В первой части рассматривается линеаризация следующего вида

$$\dot{x}(t) = ax + f(t, x), \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Вводится в рассмотрение два оператора. Для введения первого оператора, оператора периодических решений $\mathbb{P}$, рассматривается соответствующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax + \psi(t), \tag{4}$$

где $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая функция. Формулируются условия отсутствия резонансности, при которых для произвольной ω-периодической функции $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ существует единственное ω-периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ уравнения

(4). При этих условиях корректно определяется оператор периодических решений $\mathbb{P}[\psi(\cdot)] = x(\cdot)$, который каждой функции $\psi(\cdot)$ ставит в соответствие единственное периодическое решение $x(\cdot)$ уравнения (4).

Определим пространства

$$\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} = \{\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)| \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(\omega)\},$$

$$\mathbb{C}_{\omega}^{(1),n} = \{\tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)| \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(\omega), \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{\tilde{x}}(\omega)\}.$$

с нормами как в пространствах $\mathbb{C}^{(0)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}^{(1)}([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, соответственно.

Вместо оператора $\mathbb{P}$ рассматривается ограничение этого оператора на интервал $[0, 2\pi]$. Ограничение оператора будет обозначаться через $\hat{\mathbb{P}}$. И действует как $\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{\omega}^{(1),n}$. Вводится оператор естественного вложения $\mathbb{J} : \mathbb{C}_{\omega}^{(1),n} \to \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$. В дальнейшем, будет изучаться оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$, который также будем называть оператором периодических решений. Очевидно, такой оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ является линейным.

Определим второй оператор $\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$, который каждой функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$ ставит в соответствие функцию

$$\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}(t)),$$

где $f(\cdot,\cdot)$ - функция из правой части уравнения (3).

Если некоторая функция $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$ для отображения, заданного суперпозицией $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\,\hat{\mathbb{F}}$, является неподвижной точкой, т.е. справедливо равенство

$$\hat{x}(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\,\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)],$$

то периодическое продолжение этой функции на всю числовую ось является периодическим решением уравнения (3), а значит и исходного уравнения (1). Удается вычислить норму оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ и она имеет следующее значение $\| \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} \| = |a|^{-1}$.

Получен следующий результат.

Теорема 1 *Если выполняется условие*

$$\frac{L_f}{|a|} < 1,$$

то для уравнения (3) *(соответственно, для уравнения* (1)*) существует* ω*-периодическое решение* $x(\cdot)$ *и* $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. *Такое решение является единственным. Более того, для* *любой исходной функции* $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$*, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le \left(\frac{L_f}{|a|}\right)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}, \tag{5}$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем ее периодического продолжения на всю числовую ось* $\mathbb{R}$. ■

Очевидно, что в (5) сходимость зависит от значения отношения $L_f/|a|$. Чем оно меньше, тем больше скорость сходимости. Само отношение $L_f/|a|$ определяется выбором параметра a. Поэтому возникает вопрос о наилучшем выборе значения a. В одномерном случае удается найти ответ на этот вопрос. Для этого, наряду с константой Липшица $L_g > 0$, определяются понятия верхней и нижней констант Липшица L_{g1} и L_{g2}, соответственно.

Определение 1 *Верхней и нижней константами Липшица одномерной функции* $g(t,x)$ *называются такие величины* L_{g1} *и* L_{g2} *из* $\mathbb{R}$ $(L_{g1} \le L_{g2})$*, для которых при любом* $t \in [0,\omega]$ *и произвольных* x_1 *и* x_2, $x_1 \le x_2$ *выполняются неравенства*

$$L_{g1}(x_2 - x_1) \le g(t,x_2) - g(t,x_1) \le L_{g2}(x_2 - x_1). \blacksquare$$

Очевидно, $L_{g1} \ge -L_g$, $L_{g1} \le L_g$ и $L_g = \max\{|L_{g1}|, |L_{g2}|\}$.

Получен следующий результат.

Теорема 2 *Пусть для верхней и нижней констант Липшица* L_{g1} *и* L_{g2} *функции* $g(\cdot,\cdot)$ *из одномерного уравнения* (1) *выполняется неравенство* $L_{g1}L_{g2} > 0$*. Тогда существуют такие константы* a*, для которых выполнено неравенство* $L_f/|a| < 1$ *и, в силу теоремы 1, для уравнения* (3) *(соответственно, для уравнения* (1)*) существует* ω*-периодическое решение* $x(\cdot)$ *и* $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$*. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции* $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$*, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le \left(\frac{L_f}{|a|}\right)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}, \tag{5a}$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем ее периодического продолжения на всю числовую ось* $\mathbb{R}$*. Величина* $L_f/|a|$ *будет достигать своего минимального значения (т.е. итерационный метод будет сходиться быстрее всего) при* $a = (L_{g1}+L_{g2})/2$*.*

■

Сформулируем одно следствие из теоремы 2.

Следствие 1 *Пусть функция $g(t,x)$ из одномерного уравнения* (1) *удовлетворяет условию Липшица* (2), *принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, а производная функции $g(t,x)$ по второму аргументу либо строго положительная, либо строго отрицательная при всех $t\in[0,\omega]$. Тогда для уравнения* (1) *существует ω-периодическое решение. Такое решение единственно.* ■

В диссертации рассматриваются несколько примеров, которые демонстрируют различные аспекты применяемого подхода. Наиболее важным является пример, который показывает, что при тейлоровской линеаризации не всегда удается показать существование периодического решения. Вместе с тем, можно подобрать линеаризацию, представленную в правой части уравнения (3), при которой удается показать существование периодического решения. Приведем этот пример.

`Пример.` Рассматривается уравнение вида (1), в котором функция $g(t,x)$ зависит только от второго аргумента, т.е. $g(t,x)=g(x)$

$$\dot{x}(t)=g(x),\quad t\in\mathbb{R},\tag{6}$$

где $g(x)\in\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ имеет следующий вид

$$g(x)=\begin{cases}3x+2, & x\in(-\infty,-1)\\ x, & x\in[-1,1]\\ 3x-2, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Легко видеть, что единственным периодическим решением уравнения (6) является функция тождественно равная нулю, т.е. $x(t)\equiv 0$. Очевидно, применив тейлоровскую линеаризацию относительно нулевого решения, получим уравнение следующего вида

$$\dot{x}(t)=x+f_1(x),$$

где $f_1(x)=g(x)-x$. Здесь функция $f_1(x)$ имеет вид

$$f_1(x)=\begin{cases}2x+2, & x\in(-\infty,-1)\\ 0, & x\in[-1,1]\\ 2x-2, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Выберем в качестве начальной функции $x^0(\cdot)$ постоянную функцию, которая лежит в пределах от -1 до 1. Легко видеть, что итерационный метод (5) сойдется к нулевому решению за одну итерацию. Однако, если в качестве начальной функции взять также постоянную функцию, но уже лежащую в пределах от 2 до плюс бесконечности, то легко проверить, что рассматриваемый итерационный метод будет уже расходиться и нулевое решение найдено не будет.

С другой стороны, если использовать результат теоремы 2, учитывая, что верхняя и нижняя константы Липшица принимают значения $L_{g1} = 1$ и $L_{g2} = 3$, то линеаризованное уравнение можно подобрать следующего вида

$$\dot{x}(t) = 2x + f_2(x),$$

где $f_2(x) = g(x) - \frac{1}{2}(L_{g1} + L_{g2})x = g(x) - 2x$. Выпишем эту функцию в явном виде

$$f_2(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (-\infty, -1) \\ -x, & x \in [-1, 1] \\ x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Легко убедиться, что при любой начальной функции $x^0(\cdot)$ из пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),1}$ итерационный метод (5a) будет сходиться к единственному периодическому решению $x(t) \equiv 0$.

Во второй части главы изучается линеаризация вида

$$\dot{x}(t) = a(t)x + f(t, x), \tag{7}$$

где $a(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ не является нулевой.

Также, как и в первой части главы, определяются оператор естественного вложения $\mathbb{J} : \mathbb{C}_\omega^{(1),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$, оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ и оператор $\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$. Удается вычислить значение нормы оператора $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$.

Получен результат, аналогичный теореме 1.

Теорема 3 *Если выполняется условие*

$$L_f \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| < 1,$$

то для уравнения (7) *(соответственно, для уравнения* (1)*) существует ω-периодическое решение $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le \Big(L_f \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|\Big)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}},$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем ее периодического продолжения на всю числовую ось $\mathbb{R}$. ■

В третьей части главы изучается линеаризация вида

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t, x), \tag{8}$$

где A - невырожденная (n, n)-матрица, для которой все собственные значения действительные и все жордановы клетки имеют единичную размерность.

Для функции $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))' \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ из правой части уравнения (8) условие Липшица распишем для каждой координаты, то есть для любого $i \in \{1, ..., n\}$, любого $t \in \mathbb{R}$ и любых $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)'$ и $x^2 = (x_1^2, ..., x_n^2)'$ из $\mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$|f_i(t, x^1) - f_i(t, x^2)| \leq \sum_{j=1}^{n} l_{ij}|x_j^1 - x_j^2| \tag{9}$$

Для дальнейшего анализа необходимо ввести новую норму в пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта норма имеет вид

$$\|x\|_\Sigma = m_1|x_1| + m_2|x_2| + \cdots + m_n|x_n|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где $m_1 = 1$, $m_j > 0$, $j \in \{2, 3, ..., n\}$ - весовые параметры. Причем, в пространствах $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$ нормы также преобразуются в соответствии с нормой (10). Пространства с новой нормой переобозначим как $\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(1),n}$, соответственно. Нормы в этих пространствах примут следующий вид

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),n}} = \max_{t\in[0,\omega]} \|x(\cdot)\|_\Sigma, \tag{11}$$

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(1),n}} = \max\Big\{\max_{t\in[0,\omega]} \|x(t)\|_\Sigma, \ \max_{t\in[0,\omega]} \|\dot{x}(t)\|_\Sigma\Big\}. \tag{12}$$

Для того, чтобы условие Липшица (9) в новой норме $\|\cdot\|_\Sigma$ преобразовалось в условие вида

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\|_\Sigma \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}\Big)\|x^1 - x^2\|_\Sigma,$$

нужно специальным образом подобрать параметры m_j, $j \in \{2, 3, ..., n\}$. Параметры m_j, $j \in \{2, 3, ..., n\}$ следует выбирать такими, чтобы они удовлетворяли системе $(n-1)$ уравнений

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}} = m_i, \qquad i \in \{2, 3, ..., n\}. \tag{13}$$

Легко увидеть, что разрешая эти уравнения относительно m_i получим квадратное уравнение, дискриминант которого всегда не отрицателен и поэтому всегда существует по крайней мере один положительный корень этого уравнения. Матрица A в уравнении (8) может быть представлена как $A = Q\Lambda Q^{-1}$, где $\Lambda = diag(\{\lambda_i\}_{i=1}^n)$, а λ_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ собственные значения матрицы A. Получена оценка нормы оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\Sigma$ и порожденного матрицей Q^{-1}.

В дальнейшем, норму линейного оператора G, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\Sigma$, будем обозначать через $\||\, G \,\||_\Sigma$. В случае произвольной размерности $n \in \mathbb{N}$ получен следующий результат.

Теорема 4 *Пусть A - невырожденная (n, n)-матрица, все собственные значения которой вещественны, жордановы клетки имеют единичную размерность, а параметры m_j, $j \in \{2, 3, ..., n\}$ являются решениями системы из $(n-1)$ уравнений* (13). *Если выполнено условие*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j1}\Big) \ \||\, Q^{-1} \,\||_\Sigma \ \max_{\eta \in M_n} \|\Lambda^{-1}\eta\|_\Sigma < 1, \tag{14}$$

где M_n - множество точек, которые являются вершинами $2n$-угольника $\Omega = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \|Q\eta\|_\Sigma \le 1\}$, то существует ω-периодическое решение для уравнения (8) *(соответственно, для уравнения* (1)*) $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \le$$

$$\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j1}\Big) \ \||\, Q^{-1} \,\||_\Sigma \ \Big(\max_{\eta \in M_n} \|\Lambda^{-1}\eta\|_\Sigma\Big)\Big\}^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}},$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем ее периодического продолжения на всю числовую ось $\mathbb{R}$. ■

В случае размерности $n = 2$, полученную оценку удается уточнить.

Замечание 1 *Отметим, что величины $L_f/|a|$ в теоремах 1 и 2, $L_f\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$ из теоремы 3 и левая часть неравенства* (14) *теоремы 4 не зависят от периода ω. Поэтому, полученное единственное периодическое решение в случае автономных уравнений окажется стационарным состоянием. Такие решения гораздо легче получить приравняв правую часть* *уравнения (15) к нулю. Таким образом, полученные результаты имеют ценность лишь в случае неавтономных уравнений.* ■

Вторая глава посвящена изучению одномерного дифференциального уравнения n-го порядка, $n \in \mathbb{N}$

$$x^{(n)}(t) = g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ - ω-периодическая по времени функция. Решением уравнения (15) называется всякая непрерывно-дифференцируемая функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая этому уравнению. Будут сформулированы условия существования и единственности периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (15), а также описана процедура построения такого решения.

Проведем линеаризацию правой части уравнения следующим образом

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) + \chi(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

где $\chi(\cdot) = g(\cdot) - a_{n-1}x^{(n-1)}(t) - ... - a_1\dot{x}(t) - a_0x(t)$. Коэффициенты $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$, должны удовлетворять специальным свойствам, о которых будет сказано ниже.

Здесь, как и в предыдущей главе, будут изучаться условия, которые необходимо наложить на $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ и функцию $\chi(\cdot)$, чтобы для уравнения (16) (а значит и уравнения (15)) обеспечить существование единственного ω-периодического решения.

Предполагаем, что функция $g(\cdot)$ из уравнения (15), а соответственно и функция $\chi(\cdot)$ уравнения (16), удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любого $t \in \mathbb{R}$ и любых $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)'$ и $x^2 = (x_1^2, ..., x_n^2)'$ из $\mathbb{R}^n$ должны выполняться неравенства

$$|\chi(t, x^1) - \chi(t, x^2)| \leq \sum_{i=1}^{n} l_i |x_i^1 - x_i^2|. \tag{17}$$

Уравнение (16) может быть приведено к системе из n уравнений первого порядка специальным образом. Выпишем эту систему в явном виде. Для этого сделаем замену $x(t) = z_1(t)$, $\dot{z}_1(t) = z_2(t)$,..., $\dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t)$.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2 \\ \dot{z}_2(t) = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) = -a_0z_1 - a_1z_2 - ... - a_{n-1}z_n + \chi(t, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n), \end{cases}$$

В матричном виде это уравнение примет вид

$$\dot{z}(t) = Az + f(t, z), \quad t \in [0, \omega],$$

здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$f(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \chi\Big(t, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n\Big) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $a_0, ..., a_{n-1}$ выбираются такими, чтобы все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы A были действительными, а жордановы клетки имели единичную размерность. В таком случае можно составить матрицу Q, i-ый столбец которой является собственным вектором соответствующего собственного значения λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда матрица QAQ^{-1} будет диагональной матрицей с собственными значениями λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Найдена норма оператора порожденного матрицей Q и действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\Sigma$. Для того, чтобы условие Липшица (17) преобразовалось в условия Липшица для функции $f(\cdot,\cdot)$ в норме $\|\cdot\|_\Sigma$ значения констант $m_2, ..., m_n$ должны быть выбраны следующим образом

$$m_2 = \frac{l_2}{l_1} > 0, \quad m_3 = \frac{l_3}{l_1}, \cdots, m_n = \frac{l_n}{l_1}. \tag{19}$$

Вводится оператор естественного вложения $\mathbb{J} : \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ и оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ (норма в пространствах $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ и $\mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$ определяются по формулам (11) и (12)). В дальнейшем нам понадобится еще одно пространство, которое обозначим через $\mathbb{D}^n$.

$$\mathbb{D}^n = \Big\{ \tilde{\varphi}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \mid \tilde{\varphi}_i(\cdot) \equiv 0, \quad i \in \{1, ..., (n-1)\} \Big\}.$$

Вводится оператор $\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{D}^n$ по следующему правилу $\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)](t) = f(t, \hat{z}(t))$.

Относительно нормы пространства $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ найдена оценка нормы оператора периодических решений $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$. Так как в пространствах функций $\mathbb{D}^n$ и $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ образы функций принадлежат $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|.\|_\Sigma$, то норму оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}$ будем обозначать следующим образом $|||\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma$.

Через M_1 обозначим множество точек $\{\eta\}^j$, $\quad j \in \{1, 2, ..., 2n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, которое определяется следующим образом

$$\eta_i^{2k-1} = \begin{cases} \frac{1}{m_k}, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}, \quad \eta_i^{2k} = \begin{cases} -\frac{1}{m_k}, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases},$$

где $k \in \{1, ..., n\}, \quad i \in \{1, ..., 2n\}$.

Теорема 5 *Пусть ω-периодическая функция $\chi(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ в уравнении (16) удовлетворяет условию Липшица (17) с константами l_i, $i \in \{1, ..., n\}$, а коэффициенты a_i, $i \in \{0, ..., (n-1)\}$ выбраны так, что соответствующая матрица (18) имеет вещественные собственные значения, жордановы клетки таких собственных значений имеют единичную размерность, а m_i, $i = \{2, ..., n\}$ определяются по правилу (19). Если справедливо неравенство*

$$l_n \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma \Big(\frac{1}{m_n} \Big| \frac{q_{1,n}}{\lambda_1} \Big| + \frac{m_2}{m_n} \Big| \frac{q_{2,n}}{\lambda_2} \Big| + \cdots + \Big| \frac{q_{n,n}}{\lambda_n} \Big| \Big) < 1, \tag{20}$$

где матрица Q такая, что $QAQ^{-1} = \operatorname{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, q_n - последний столбец матрицы Q, то существует ω-периодическое решение уравнения (16) (соответственно, уравнения (15)) $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Такое решение является единственным.

Более того, для любой начальной функции $\hat{z}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ последовательность $\hat{z}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)]$ стремится по норме $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ к функции $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$. Кроме этого, справедлива оценка сходимости

$$\|(\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{ l_n \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma \Big(\frac{1}{m_n} \Big| \frac{q_{1,n}}{\lambda_1} \Big| + \frac{m_2}{m_n} \Big| \frac{q_{2,n}}{\lambda_2} \Big| + \cdots + \Big| \frac{q_{n,n}}{\lambda_n} \Big| \Big) \Big\}^k \|\hat{z}^0(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}.$$

При этом ω-периодическим решением $x(\cdot)$ задачи (16) (соответственно, задачи (15)) является периодическое продолжение на всю числовую ось первой координаты $\hat{z}_1(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),1}_{\omega,\Sigma}$ функции $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}_1(\cdot), \cdots, \hat{z}_n(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$. Такое решение является единственным. ■

Замечание 2 *Выражение, стоящее в левой части неравенства (20) в теореме 5, не зависит от периода ω. Поэтому, полученное единственное периодическое решение в случае автономных уравнений окажется стационарным состоянием. Такие решения гораздо легче получить приравняв правую часть уравнения (15) к нулю. Таким образом, полученные результаты имеют ценность лишь в случае неавтономных уравнений.* ■

В третьей главе изучаются условия, обеспечивающие существование и единственность периодического решения для функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Не ограничивая общности, будем полагать, что правая часть $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической по времени функцией, а отклонения τ_j, $j \in \{1, .., s\}$ лежат в пределах $[0, 2\pi)$. Кроме этого предполагается, что отклонения соизмеримы, т. е. для любых τ_i и τ_j, $i, j \in \{1, .., s\}$ должны существовать n_1 и n_2 из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $n_1 + n_2 \neq 0$ и $n_1|\tau_i| = n_2|\tau_j|$.

Будут сформулированы условия обеспечивающие существование и единственность 2π-периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (21), описан итерационный процесс построения такого решения, а также указана скорость сходимости процесса.

Такой тип функционально-дифференциальных уравнений исследовался в работах Л. А. Бекларяна[2] В работе приведены условия, обеспечивающие существование и единственность решения из специального класса функций для соответствующей задачи Коши. Всюду далее будет считаться, что эти условия выполнены.

Рассматриваются такие значения параметров $(a_1, ..., a_s, \tau_1, ..., \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$, для которых выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \quad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Условие (22) является условием остутствия резонансности.

Выделяется линейная часть правой части функционально-дифференциального уравнения (21) в следующем виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t + \tau_j) + f(t, x(t + \tau_1), \cdots, x(t + \tau_n)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

где $(a_1, ..., a_s, \tau_1, ..., \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ удовлетворяют условию (22),
$f(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}; \mathbb{R}^n)$ - 2π-периодическая по времени функция
($f(\cdot) = g(\cdot) - \sum_{j=1}^{s} a_j x(t + \tau_j)$), а отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ соизмеримы и лежат в пределах $[0, 2\pi)$.

Правая часть $g(\cdot)$ уравнения (21) удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любых $t \in [0, 2\pi]$, x_j и $\overline{x}_j$, $j \in \{1, ..., s\}$ из $\mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{24}$$

где L_g некоторая положительная константа Липшица. Очевидно, что для функции $f(\cdot)$ также будет выполняться условие Липшица с некоторой константой $L_f > 0$.

[2]Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. -288 с. - (Методы современной математики; Вып. 5)

По аналогии с тем как это делалось выше, вводится оператор естественного вложения $\mathbb{J} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$ и оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$, а также оператор $\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$ по следующему правилу $\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}((t+\tau_1)(mod\, 2\pi)), \cdots, \hat{x}((t+\tau_n)(mod\, 2\pi)))$, где $f(\cdot)$ - функция из правой части уравнения (23).

Вводятся обозначения

$$\mathbb{A}^2 = \frac{1}{(\sum_{j=1}^{s} a_j)^2}, \quad \mathbb{D}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k},$$

где $\det A_k = \Big(\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j \Big)^2 + \Big(k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j \Big)^2, \quad k = 1, 2, ...$

Теорема 6 *Пусть:*

в нелинейном уравнении (21) *функция* $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ *является* 2π*-периодической функцией и удовлетворяет условию Липшица* (24)*, а* L_f*, соответственно, константа Липшица функции* $f(\cdot)$*;*

для некоторого $\mu \in (0,1)$ *выполнено неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \quad M = \max_{1 \le j \le s} |a_j|;$$

и для $(a_1, ..., a_s, \tau_1, ..., \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ *справедливы соотношения* (22).

Если выполнено условие

$$sL_f \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1,$$

то для уравнения (21) *существует* 2π*-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству* $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Более того, для любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к единственной функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$*, и справедлива оценка сходимости:*

$$\|(\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \le \Big(sL_f \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} \Big)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}$$

Периодическое решение $x(\cdot)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем продолжения ее по периодичности* 2π *на всю числовую ось* $\mathbb{R}$. ■

Отметим, что в линейной части уравнения (23) берутся только те отклонения, которые присутствуют в правой части исходного функционально-дифференциального уравнения (21). И это по существу. Если при выборе линеаризации окажется, что в функции $f(\cdot)$

есть хотя бы одно отклонение $\bar{\tau}$, не совпадающее ни с одним из отклонений $\tau_1, ..., \tau_s$, тогда нетрудно убедиться, неравенство $sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, как правило, нарушается.

Пубдикации по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Белоусов Ф. А.* Существование и единственность периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем / под ред. Ю. С. Попкова. – М.:URSS, 2010, 56(1), с. 5-19. (1,27 п.л.)

2. *Белоусов Ф. А.* Достаточные условия существования единственного периодического решения для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка. // Вестник РУДН, сер. «Математика. Информатика. Физика», 2013, № 1, с. 27-37. (0,56 п.л.)

Статьи в других журналах:

3. *Beklaryan L.A., Belousov F.A.* Existence of Periodical Solutions for Functional Differential Equations of Pointwise Type. // Functional Differential Equations. 1(1). 2009. (1,17 п.л., доля автора - 0,59 п.л.)

Публикации тезисов докладов научныхконференций:

4. *Белоусов Ф. А.* Существование периодических решений функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции. - Воронеж: Воронежский государственный университет, 2007. - с. 25-26. (0,1 п.л.)

5. *Белоусов Ф. А.* Об одной теореме существования и единственности пермодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXIII" / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. -с. 29-30. (0,1 п.л.)

6. *Белоусов Ф. А.* Линеаризация правой части ОДУ. Существование и единственность периодических решений. // XX Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". VI Междисциплинарный семинар "Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий". Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2012. -с. 47-48. (0,1 п.л.)

7. *Belousov F.A.* On a theorem of existence and uniqueness of periodical solutions for functional-differential equations with deviating arguments. International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Bahach, Lvov, 2012. -с. 178. (0,1 п.л.)

8. *Белоусов Ф. А.* Условие существования периодических решений. Линеаризация правой части ОДУ. // Крымская осенняя математическая школа (КРОМШ-2012). Двадцать третья ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2012. -с. 9. (0,1 п.л.)

Белоусов Федор Анатольевич

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика

Специальность 08.00.13 - Математические и инструментальные методы экономики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Заказ	Объем п.л.	Тираж 100 экз.

ЦЭМИ РАН