Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук (ЦЭМИ РАН)

На правах рукописи

Белоусов Федор Анатольевич

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-мат. наук
Бекларян Лева Андреевич

Москва - 2014

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена периодическим решениям нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Периодические решения играют важную роль как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих других научных областях и прикладных задачах. Существуют разделы физики и техники, которые полностью базируются на колебательных явлениях. Это задачи электромагнитных колебаний [16, 20, 21, 22], которые включают в себя оптику [45], учение о звуке [88], радиотехнику и прикладную акустику и т.д. Задачи анализа периодических решений дифференциальных уравнений также возникают в химии [19], при изучении биологических систем [55, 72, 73, 75], в задачах небесной механики и астродинамики [78] и при моделировании экономических процессов [31].

Универсального подхода для изучения периодических решений дифференциальных уравнений не существует. Имеется несколько основных методов, которые предлагают различные способы решения данной задачи. В качестве основных методов доказательства существования периодических решений дифференциальных уравнений следует отметить метод точечных отображений Пуанкаре-Андронова [6, 14], топологический метод, метод направляющих функций [37, 40, 63], усреднение Крылова-Боголюбова [43, 44, 12], вариационные методы и т.д. Метод Пуанкаре-Андронова применим в том случае, когда известно в какой части фазового пространства может располагаться периодическая траектория, а также трансверсальная к ней гиперповерхность. В этом случае изучается отображение (локальное) трансверсальной гиперповерхности в себя, порожденное движением вдоль фазовых траекторий, и поиск неподвижной точки для такого отображения, соответствующая периодической траектории. Метод направляющих функций основан на наличии функций с заданным набором условий, которые гарантируют существование периодической траектории. Метод усреднения Крылова-Боголюбова основан на том, что некоторые классы уравнений допускают усреднение, которое порождает принципиально более простое уравнением чем исходное и сохраняет периодическое решение. Также существует целый ряд работ, где используются как перечисленные выше методы, так и другие методы, предметом изучения которых являются линейные и нелинейные системы. Среди таких работ можно отметить следующие работы [47, 48, 49, 54, 41, 83, 13, 18, 25, 30, 28, 56, 69, 77, 83]. Однако, большую часть из перечисленных методов достаточно сложно применять на практике, они требуют выполнения целого ряда трудно проверяемых условий и значительной предваительной работы. Одним из главных результатов этой диссертационно работы является получение легко проверяемых условий, выполнение которых обеспечивает существование единственного периодического решения для дифференциалных уравений различных классов.

Объектом исследования в диссертации являются различные классы дифференциальных уравнений.

Предметом исследования является система условий, обеспечивающих существование и единственность периодических решений для рассматриваемых классов дифференциальных уравнений.

Методы исследования включают методы интегральных уравнений, методы оптимизации и линейной алгебры.

Цель и задачи исследования. Целью работы является нахождение легко проверяемых условий, сформулированных в терминах правых частей, которые обеспечивают существование и единственность периодических решений для различных классов дифференциальных уравнений. Для достижения поставленной в работе цели были сформулированы следующие задачи:

- Получить условия существования и единственности периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;
- Получить условия существования и единственности периодических решений для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка ($n > 1$);
- Получить условия существования и единственности периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Научная новизна. Предлагаемый в работе подход, который использовался в [10, 11] , по своей сути наиболее близок к методу интегральных уравнений, который детально изложен в монографии Е. Н. Розенвассера [70], однако он существенно модифицирован. Такой подход для изучения периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений был использован в работах А. И. Перова и его учеников [64, 66, 67, 33].

Основной особенностью перечисленных работ является процедура построения операторной функции Грина, с помощью которой и строится периодическое решение. Сама процедура построения функции Грина, а также проверка условий, которым она должна удовлетворять, являются сложными. Решение каждой конкретной задачи требует проведения нетривиальной большой предварительной работы. Подход, развиваемый в диссертационной работе, позволяет обойти эти сложности.

Одним из наиболее важных результатов данной работы является получение теорем существования и единственности периодических решений, условия в которых сформулированы в терминах правой части дифференциального уравнения (константа Липшица, величина отклонения для функционально-дифференциального уравнения). Такие условия легко проверяемы. В диссертационной работе все полученные для проверки условия, кроме одного, вычисляются за конечное число операций и используют характеристики правой части дифференциального уравнения. Оставшееся условие имеет тип ряда от тех же характеристик, остаток которого легко оценивается.

Другой особенностью рассматриваемого в работе подхода является процедура линеаризации правой части уравнения, необходимого для исследования периодических решений. Как правило, наиболее распространенным способом выделения линейной части считается тейлоровская линеаризация. Существуют примеры, которые показывают, что тейлоровская линеаризация не всегда позволяет установить существование периодического решения, хотя при иных линеаризациях это удается. Для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений дается алгоритм оптимального, с точки зрения предлагаемого в диссертационной работе подхода, выделения линейной части.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть применены при исследовании периодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Эти результаты также несут практическую ценность, поскольку позволяют определять наличие единственного периодического решения для дифференциальных уравнений различных типов. А также, в случае выполнения определенных условий, позволяет эти решения найти.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на конференции "Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXIII" (Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Воронеж, 3-9 мая 2012 г.), на VII международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, 27 мая - 3 июня 2012 г.), на международной конференции "International conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach" (Национальный университет им. Ивана Франко, Львовский политехнический национальный университет, Институт прикладной математики и механики (г. Донецк), Институт математики НАН Украины, Украина, г. Львов, 17-21 сентября 2012 г.), на международной конференции "Крымская осенняя математическая школа"(КРОМШ-2012) (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Филиал Московского государственного университета им. Ломоносова в Севастополе, Крымский научный центр НАН Украины, Крымский математический фонд, Крымская академия наук, Украина, г. Севастополь, 17-29 сентября 2012 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ общим объемом 3,5 п.л. (вклад автора - 2,91), из них 2 работы в изданиях, входящих в перечень ВАК Министерства образования и науки РФ, объемом 1,7 п.л.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 114 страниц машинописного текста. Список использованной литературы содержит 89 наименований.

В первой главе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с нелинейной правой частью следующего вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x),$$

где $g(\cdot, \cdot)$ - некоторая непрерывная, периодическая по времени функция.

Эта глава состоит из трех разделов, в каждом из которых рассматриваются различные процедуры линеаризации.

В первом разделе изучается простейшая линеаризация, а именно

$$\dot{x}(t) = ax + f(t, x),$$

где a - некоторая ненулевая константа и $f(t, x) = g(t, x) - ax$.

Во втором разделе изучается линеаризация

$$\dot{x}(t) = a(t)x + f(t, x)$$

с использованием заданной периодической функцией $a(\cdot)$, период которой совпадает с периодом $f(\cdot, \cdot)$, где $f(t, x) = g(t, x) - a(t)x$.

В третьем разделе изучается матричная линеаризация

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t, x),$$

где A - некоторая невырожденная (n, n)-матрица и $f(t, x) = g(t, x) - Ax$. Отдельно рассмотрен случай $n = 2$.

Во всех трех случаях сформулированы условия, обеспечивающие существование единственного периодического решения. Такие условия сформулированы в терминах правой части уравнения и являются легко проверяемыми.

Во второй главе рассматривается квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка следующего вида

$$x^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}),$$

где $g(\cdot, ..., \cdot)$ - некоторая непрерывная, периодическая по времени функция. Такое уравнение и ее процедура линеаризации рассматриваются как важный частный случай матричной линеаризации. Сформулированы условия, которые гарантируют существование единственного периодического решения. В случае $n = 2$ сформулированные условия удается представить в развернутом виде.

В третьей главе изучаются функционально-дифференциальные уравнения точечного типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t+\tau_1), ..., x(t+\tau_s)),$$

где $f(\cdot, ..., \cdot)$ - непрерывно-дифференцируемая функция, а $\tau_1, ..., \tau_s$ - отклонения аргумента, удовлетворяющие условиям соизмеримости. В терминах правой части исходного нелинейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа и характеристик ее линеаризации будут сформулированы условия существования и единственности 2π-периодического решения, описан итерационный процесс построения такого решения, а также указана скорость сходимости итерационного процесса.

Как отмечалось выше, дополнительно условие гладкости на правую часть необходимо, чтобы пользуясь методом рядов Фурье в терминах правых частей оценить норму оператора периодических решений, а также сформулировать условие "регулярности"процедуру линеаризации.

1 Вопросы существования периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

1.1 Основные понятия

1.1.1 Постановка задачи

Будет изучаться уравнение общего вида

$$\dot{x}(t) = g(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

где $g(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - некоторая непрерывная, ω-периодическая по времени функция, т.е. для любых $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad g(t,x) = g(t+\omega,x)$.

Решением уравнения (1.1) называется всякая непрерывно-дифференцируемая функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая этому уравнению.

Будут сформулированы условия существования и единственности периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (1.1), а также описана процедура построения такого решения.

Процедура линеаризации. Из правой части уравнения (1.1) линейная часть может быть выделена несколькими способами

$$g(t,x) = ax + f(t,x),$$

$$g(t,x) = a(t)x + f(t,x),$$

$$g(t,x) = Ax + f(t,x),$$

где $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ -ненулевая ω-периодическая функция, A - ненулевая (n,n)-матрица, удовлетворяющая специальным условиям, о которых будет сказано ниже. После выделения линейной части уравнение (1.1) преобразуется в одно из следующих уравнений

$$\dot{x}(t) = ax + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$\dot{x}(t) = a(t)x + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

Очевидно, что $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ также будет ω-периодической по времени.

Процедура выделения линейной части в уравнениях (1.2), (1.3) и (1.4) в дальнейшем будет называться линеаризацией. В этой главе будут изучаться условия, накладываемые на константу a, функцию $a(\cdot)$, матрицу A, а также функцию $f(\cdot,\cdot)$, которые обеспечивают существование и единственность ω-периодического решения. Очевидно, что линеаризация (1.2) является частным случаем линеаризаций (1.3) и (1.4).

Далее будем считать, что для правой части уравнения (1.1) будет выполнено условие Липшица,

$$\|g(t,x^1) - g(t,x^2)\|_{\mathbb{R}^n} \le L_g\|x^1 - x^2\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.5}$$

обеспечивающее существование и единственность решений из класса $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ для соответствующей задачи Коши. Очевидно, если это условие выполнено для функции $g(\cdot,\cdot)$, то после линеаризации это условие также будет выполнено и для функции $f(\cdot,\cdot)$, но относительно некоторой своей константы L_f. Введенная константа Липшица будет играть в дальнейшем ключевую роль при формировании условий существования и единственности периодического решения.

1.1.2 Свойства периодических решений

В этом разделе приведены некоторые общие достаточно хорошо известные свойства периодических решений, которые будут необходимы для дальнейших рассуждений. Для уравнения общего вида (1.1) сформулируем простое, но очень важное утверждение.

Предложение 1.1 *Решение* $x(t)$ *уравнения* (1.1) *является* ω*-периодическим тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство*
$x(0) = x(\omega)$. ■

Доказательство этого утверждения легко вытекает из ω-периодичности функции $g(t,x)$ по t и факта существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1.1).

Предложение 1.1 позволяет в последующих разделах, вместо исследования исходных периодических решений в пространстве $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, изучать ограничения периодических решения в пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0,\omega],\mathbb{R}^n)$.

Процедура линеаризация третьего типа (1.4) связана с изучением свойств линейного неоднородного вида

$$\dot{x}(t) = Ax + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

где A - (n,n)-матрица, а $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая функция. Наряду с этим уравнением будет рассмотрено линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Теперь мы можем сформулировать очень важный и хорошо известный результат, который, в частности, можно найти в [15]. Эти условия также известны как условия отсутствия резонансности. Результат является основополагающим для проведения дальнейших рассуждений, поэтому здесь мы приведем его доказательство.

Теорема 1.1 *([15]) Уравнение* (1.6) *имеет единственное ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда единственным ω-периодическим решением линейного однородного уравнения* (1.7) *является функция, тождественно равная нулю.*

`Доказательство.` Прежде чем приступить к доказательству, введем в рассмотрение матрицу фундаментальных решений $\phi(t)$. Она является решением матричного уравнения с начальным условием матрица является решением уравнения

$$\dot{\phi}(t) = A\phi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\phi(0) = \mathbb{I},$$

где $\mathbb{I}$ - единичная (n,n)-матрица.

Любое решение однородного уравнения (1.7) представимо в виде $x(t) = \phi(t)x(0)$, а произвольное решение неоднородного уравнения (1.6) имеет представление $x(t) = \phi(t)x(0) + \psi(t)$, где $\psi(t)$ -частное решение уравнения (1.6) с начальными условиями $\psi(0) = 0$. Используя это, приступим непосредственно к доказательству теоремы.

`Достаточность.` Пусть тривиальное решение является единственным ω-периодическим решением уравнения (1.7). Тогда из предложения 1.1 и из того, что для решений уравнения (1.7) справедливо представление $x(\omega) = \phi(\omega)x(0)$, получаем, что единственным решением линейного уравнения $x = \phi(\omega)x$ является вектор $x = 0$. Из этого вытекает невырожденность матрицы $(\mathbb{I} - \phi(\omega))$. С другой стороны, для произвольного решения уравнения (1.6) справедливо представление $x(\omega) = \phi(\omega)x(0) + \psi(\omega)$. Таким образом, учитывая, что для периодического решения выполняется равенство $x(0) = x(\omega)$, задача нахождения периодического решения сводится к поиску решения линейного уравнения $(\mathbb{I} - \phi(\omega))x(0) = \psi(\omega)$. Используя тот факт, что матрица $(\mathbb{I} - \phi(\omega))$ невырождена, получаем, что для произвольного $\psi(\omega)$ решение исходного уравнения будет единственным, а это эквивалентно единственности ω-периодического решения уравнения (1.6).

`Необходимость.` Докажем от противного. Пусть для уравнения (1.6) существует единственное ω-периодическое решение, тогда как для уравнения (1.7) помимо нулевого есть как минимум еще одно ω-периодическое решение. Из последнего факта следует, что матрица $(\mathbb{I} - \phi(\omega))$ является вырожденной. В этом случае можно показать, что линейное уравнение $(\mathbb{I} - \phi(\omega))x = \psi(\omega)$ будет иметь более одного решения, что противоречит единственности ω-периодического решения уравнения (1.6). ■

Теперь можно определить условия, которым должна удовлетворять матрица A, чтобы для уравнения (1.6) существовало единственное ω-периодическое решение. Условия отсутствия резонанстности.

Следствие 1 *Уравнение* (1.6) *имеет единственное ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда ни одно из собственных значений матрицы A не равно $\frac{2\pi i}{\omega}k$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$.* ■

Нетрудно убедиться, что, если линейное однородное уравнение (1.7) имеет более одного ω-периодического решения, то линейное неоднородное уравнение (1.6) имеет либо бесконечное число ω-периодических решений, либо вообще не имеет таких решений.

Для иллюстрации рассмотрим простейшее линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = 0.$$

Очевидно, что собственным значением правой части является $\lambda = 0$, а произвольная константа $x(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$ есть решение этого уравнения. Таким образом у этого уравнения все решения периодические. Теперь добавим к правой части некоторую нелинейную периодическую функцию

$$\dot{x} = \xi(t).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\xi(t) \equiv 1$. Тогда решения примут вид $x(t) = t + C, \quad C \in \mathbb{R}$, т. е. периодических решений у этого уравнения не будет. С другой стороны, если положить $\xi(t) = cos\ t$, то решения уравнения примут вид $x(t) = sin\ t + C, \quad C \in \mathbb{R}$, т. е. все решения являются периодическими.

Очевидно, что процедура линеаризации первого типа является частным случаем процедуры линеаризации третьего типа и соответствует случаю $A = a\mathbb{I}$, где $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{I}$ - единичная (n,n)-матрица, все условия, обеспечивающие существование единственного ω-периодического решения задачи (1.6), будут выполнены. Случай $A = a\mathbb{I}$, $a \in \mathbb{R}$ соответствует простейшей линеаризации как среди матричных линеаризаций, так и линеаризаций вида $a(t)\mathbb{I}$, где $a(t)$ - скалярная функция.

Процедура линеаризации второго типа (1.3) связана со свойствами линейного неоднородного уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)x + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

где $a(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодические функции.

Введем следующее обозначение

$$\bar{a} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega a(\tau)d\tau. \tag{1.9}$$

Переформулируем теорему 1.1 в терминах функции $a(t)$.

Теорема 1.2 *Для уравнения* (1.8) *существует единственное* ω*-периодическое решение тогда и только тогда, когда справедливо условие*

$$\bar{a} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega a(\tau)d\tau \neq 0.\blacksquare \tag{1.10}$$

`Доказательство.` Докажем необходимость и достаточность условия существования единственного ω-периодического решения.

`Достаточность.` Пусть выполнены условия (1.10). Легко видеть, что любое решение уравнения (1.8) может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}x(0) + e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}\int_0^t e^{-\int_0^\tau a(s)ds}\xi(\tau)d\tau. \tag{1.11}$$

Учитывая предложение 1.1, для любого периодического решения выполнено равенство $x(0) = x(\omega)$. Получаем, что для периодического решения начальное значение $x(0)$ будет принимать значение

$$x(0) = (1 - e^{\int_0^\omega a(\tau)d\tau})^{-1} e^{\int_0^\omega a(\tau)d\tau} \int_0^\omega e^{-\int_0^\tau a(s)ds} \xi(\tau)d\tau. \qquad (1.12)$$

Легко видеть, что в силу условия (1.10) такое решение существует и оно единственно.

`Необходимость.` Пусть существует единственное ω-периодическое решение. Такое решение имеет вид (1.11). В силу условия ω-периодичности получаем представление для начального значения $x(0)$

$$(1 - e^{\int_0^\omega a(\tau)d\tau})x(0) = e^{\int_0^\omega a(\tau)d\tau} \int_0^\omega e^{-\int_0^\tau a(s)ds} \xi(\tau)d\tau.$$

Из условия единственности ω-периодического решения и будет следовать справедливость условия (1.10). ■

Линеаризация первого типа, как ранее отмечалось, является частным случаем линеаризаций второго типа и третьего типов и связана со свойствами линейного неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = ax + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (1.13)$$

где $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая функция, является частным случае как уравнения (1.6), так и уравнения (1.8). Сформулируем следствие теоремы 1.2.

Следствие 2 *Уравнение* (1.13) *имеет единственное ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда $a \neq 0$.* ■

1.1.3 Оператор периодических решений

Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность ω-периодического решения для линейного неоднородного уравнения (1.7), либо (1.8). В этом случае можно ввести линейный оператор $\mathbb{P}$, который каждой ω-периодической функции $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ из правой части уравнения (1.6), либо (1.8) ставит в соответствие единственное ω-периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{P} : \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \mathbb{P}\xi(\cdot) = x(\cdot). \tag{1.14}$$

При каждом $k = 0, 1, ...$ определим пространства

$$\mathbb{C}_{\omega}^{(k),n} = \Big\{ x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}([0, \omega], \mathbb{R}^n) \Big|, \quad x^{(j)}(0) = x^{(j)}(\omega), \quad j = 0, ..., k \Big\}.$$

Норму в этих пространствах введем такую же как в $\mathbb{C}^{(k)}([0, \omega], \mathbb{R}^n)$. В частности, для $k = 0$ и $k = 1$ норма будет считаться по правилу

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}} = \max_{t \in [0,\omega]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.15}$$

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(1),n}} = \max\{\max_{t \in [0,\omega]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \max_{t \in [0,\omega]} \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\}. \tag{1.16}$$

В силу предложения 1.1, оператор периодических решений $\mathbb{P}$ находится во взаимно однозначном соответствии со своим ограничением на интервал $[0, \omega]$, которая имеет вид

$$\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{\omega}^{(1),n}, \quad \hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{1.17}$$

Пусть $\mathbb{J} : \mathbb{C}_\omega^{(1),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ оператор естественного вложения. В дальнейшем, под оператором периодических решений будем подразумевать линейный оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$. Очевидно, что действие оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ является взаимооднозначным.

1.2 Простейшая линеаризация, не зависящая от времени

В этом подразделе будет изучаться простейшая линеаризация уравнения (1.2). Приведем это уравнение еще раз

$$\dot{x}(t) = ax + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

где $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени функция.

1.2.1 Оценка нормы оператора периодических решений

Рассматривается ограничение линейного неоднородного уравнения (1.13) на $[0,\omega]$

$$\dot{\hat{x}}(t) = a\hat{x} + \hat{\xi}(t), \quad t \in [0,\omega], \tag{1.19}$$

где $\hat{\xi}(t) = \xi(t)$ при $t \in [0,\omega]$. Будем изучать решения $\hat{x}(\cdot)$ этого уравнения, принадлежащие пространству $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$. Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) = \mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}[\hat{\xi}(\cdot)]$.

Определим норму оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ для уравнения (1.19).

Теорема 1.3 *Оператор* $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ *является непрерывным. Более того, норма такого оператора* $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ *равна* $1/|a|$. *Причем равенство* $\|\mathbb{J}\,\mathbb{P}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = 1/|a|$ *достигается, в частности, при* $\hat{\xi}(\cdot) \equiv 1$.

Доказательство.

На первом этапе покажем, что $\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\| \geq 1/|a|$. Для этого в качестве нелинейного слагаемого $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ правой части уравнения (1.19) рассмотрим функцию тождественно равную вектору $\hat{e}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\hat{e}_1 = (1, 0, ..., 0)'$. Тогда единственным периодическим решением уравнения (1.19) будет функция $\hat{x}(\cdot)$, у которой первая координата тождественно равна $-1/a$, а все остальные тождественно равны 0. Из этого и из того, что $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\hat{e}_1\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = 1$, $\|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = 1/|a|$, следует, что $\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\| \geq \|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{e}_1\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = 1/|a|$.

Теперь покажем, что $\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\| \leq 1/|a|$. Предположим обратное. Пусть существует некоторая функция $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$, $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = 1$, для которой $\|\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} > 1/|a|$. Обозначим через $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ результат воздействия оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ на $\hat{\xi}(\cdot)$ (т.е. $\hat{x}(\cdot) = \mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)$ и при этом $\|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} > 1/|a|$). Отметим, что фактической областью определения оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ является пространство $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$, поэтому $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$. Тогда из свойств этого пространства следует, что во всех точках $\bar{t} \in [0, \omega]$, где $\|\hat{x}(\bar{t})\|_{\mathbb{R}^n} = \|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}$ также справедливо условие $(\dot{\hat{x}}(\bar{t}), \hat{x}(\bar{t}))_{\mathbb{R}^n} = 0$. В этом случае, справедлива следующая оценка

$$1 = \|\hat{\xi}(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\dot{\hat{x}}(t) - a\hat{x}(t)\|^2_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \geq \|\dot{\hat{x}}(\bar{t}) - a\hat{x}(\bar{t})\|^2_{\mathbb{R}^n} =$$

$$\|\dot{\hat{x}}(\bar{t})\|^2_{\mathbb{R}^n} - 2a(\dot{\hat{x}}(\bar{t}), \hat{x}(\bar{t}))_{\mathbb{R}^n} + a^2\|\hat{x}(\bar{t})\|^2_{\mathbb{R}^n} = \|\dot{\hat{x}}(\bar{t})\|^2_{\mathbb{R}^n} + a^2\|\hat{x}(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}. \quad (1.20)$$

Так как $\|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} > 1/a$, то приходим к противоречию с (1.20). Следовательно, $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| = 1/|a|$. ■

1.2.2 Уравнение с нелинейным слагаемым и простейшей линеаризацией

В данном разделе будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейного дифференциального уравнения (1.1), в котором $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ является ω-периодической функцией. Такие условия будут получены с помощью простейшей линеаризации (1.18). Если функция $g(.)$ из уравнения (1.1) удовлетворяет условию Липщица (1.5) с константой L_g, то в уравнении (1.18) функция $f(t,x) = g(t,x) - ax$ также будет удовлетворять условию Липщица с некоторой константой L_f

$$\|f(t,x^1) - g(t,x^2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_f \|x^1 - x^2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

С каждой линеаризацией уравнения (1.1) связана линейная неоднородная система (1.13)

$$\dot{x}(t) = ax + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая функция. В свою очередь, если выполняются условия следствия 2, т.е. $a \neq 0$, то корректно определен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$. Определим оператор

$$\mathbb{F} : \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \qquad \mathbb{F}[x(\cdot)](t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Ограничение этого оператора на функции определенные на отрезок $[0,\omega]$ будет обозначаться через $\hat{\mathbb{F}}$

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega},$$
$$\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t,\hat{x}(t)), \quad t \in [0,\omega]. \tag{1.22}$$

Теорема 1.4 *Если выполняется условие*

$$\frac{L_f}{|a|} < 1, \tag{1.23}$$

то для уравнения (1.18) *(соответственно, для уравнения* (1.1)*) существует ω-периодическое решение $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к функции $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega}$, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega}} \leq \left(\frac{L_f}{|a|}\right)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega}}, \tag{1.24}$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем ее периодического продолжения на всю числовую ось $\mathbb{R}$. ■

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{1.25}$$

В силу предложения 1.1, продолжение по периодичности ω на всю числовую ось всякого решения уравнения (1.25) задает периодическое решение уравнения (1.18) (соответственно, уравнения (1.1)) и наоборот. Так как

$g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (1.25) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$.

Из условия Липшица для функции $f(\cdot)$ следует неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \leq L_f \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}.$$

В силу теоремы 1.3, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)])\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \\ &\quad \leq \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| \;\; \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \leq \frac{L_f}{|a|} \;\; \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Следовательно получаем, что при $L_f/|a| < 1$ отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ будет сжимающим и существует единственная неподвижная точка $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ этого отображения. Решение $x(\cdot)$ исходного уравнения (1.18) (и (1.1)) из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ легко получить периодическим продолжением функции $\hat{x}(\cdot)$ на всю числовую ось.

Оценка сходимости (1.24) также легко получается из приведенной последовательности неравенств. Теорема доказана. ■

Следствие 3 *Если функция $f(t,x)$ из уравнения* (1.18) *принадлежит классу* $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *и для нее выполнено условие* $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{\mathbb{R}^n} < \gamma$, *то при условии $\gamma/|a| < 1$ существует единственное ω-периодическое решение.* ■

Полученный результат является достаточным, но не необходимым условием существования единственного ω-периодического решения.

Далее будет рассмотрен пример, иллюстрирующий итерационное применение оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$.

`Пример.` В качестве примера изучим следующее простое уравнение

$$\dot{x}(t) = ax + x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1\}.$$

Известно, что любое решение этого уравнения имеет вид $x(t) = x(0)e^{(a+1)t}$, где $x(0) \in \mathbb{R}$. Очевидно, единственным периодическим решением является функция $x(t) \equiv 0$.

Посмотрим, какой результат даст изложенный в данной работе подход. В силу того, что $\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)] = \hat{x}(\cdot)$, то $\|\hat{\mathbb{F}}\| = 1$ для произвольного $\omega > 0$. Таким образом, $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}\| = 1/|a|$ для любого $\omega > 0$. Следовательно, если $|a| > 1$, то оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ является сжимающим отображением, неподвижной точкой которого является периодическая функция. Тогда для любого $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ пределом последовательности $\{\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]\}_{k\in\mathbb{N}}$ является периодическое решение исходного уравнения.

Можно в этом убедиться непосредственной проверкой. Положим $\hat{x}^0(\cdot) \equiv 1$, тогда, чтобы найти $\hat{x}^1(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[1]$, необходимо рассмотреть уравнение $\dot{\hat{x}}(t) = a\hat{x}(t) + 1$ и найти единственное периодическое решение. Очевидно, $\hat{x}^1(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[1] = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}[1] = -1/a$. Аналогично можно получить $\hat{x}^2(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}^1(\cdot)] = \hat{\mathbb{P}}[-1/a] = 1/a^2$. Таким образом, $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[1] = (-1)^k/a^k$, т.е. при $|a| > 1$ пределом последовательности является функция $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$, что и требовалось показать.

С другой стороны, видно, что при $|a| < 1$ у исходного уравнения решение $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$ остается единственным периодическим решением, однако изложенный здесь метод его не выявляет. Для того, чтобы получить нужный результат, необходимо данное уравнение представить в несколько измененном виде. А именно, в качестве одного из вариантов можно поменять местами слагаемые $a\hat{x}(t)$ и $\hat{x}(t)$ и обозначить a как b, при этом положив $a = 1$. В результате получается следующее уравнение

$$\dot{x}(t) = ax + bx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad b \in (-1, 1)\backslash\{0\}, \quad a = 1.$$

Отсюда видно, что в таком представлении оператор $\hat{\mathbb{F}}$ определяется как $\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)] = b\hat{x}(\cdot)$, $|b| < 1$ и $b \neq 0$. Таким образом, видно, что $\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}\| = |b|/a = |b| < 1$, т.е. в этом случае также можно получить единственное ω-периодическое решение $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$, применяя оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ итерационно. ■

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что рассматриваемый подход требует корректного разбиения правой части некоторого изучаемого дифференциального уравнения на $ax(t)$ и $f(t, x(t))$ так, чтобы итерационно можно было получить единственное периодическое решение. Таким образом, возникает вопрос, существует ли в принципе такая константа a, которая обеспечила бы сходимость итерационного метода и, если существует, то как выбрать эту константу наилучшим образом. В дальнейшем будут приведены ответы на поставленные вопросы для одномерного случая.

1.2.3 Наилучшее значение константы a_{opt} в одномерном случае

Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, рассматривается дифференциальное уравнение общего вида (1.1) в одномерном случае

$$\dot{x}(t) = g(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.27}$$

где $g(t,x) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ - ω-периодическая по времени. Поскольку правая часть уравнения удовлетворяет условию Липшица (1.5) с константой $L_g > 0$, можно ввести в рассмотрение понятия верхней и нижней константы Липшица L_{g1} и L_{g2}, соответственно.

`Определение. Верхней и нижней константами Липшица` одномерной функции $g(t,x)$ называются такие величины L_{g1} и L_{g2} из $\mathbb{R}$ ($L_{g1} \le L_{g2}$), для которых при любом $t \in [0,\omega]$ и произвольных x_1 и x_2 ($x_1 \le x_2$) выполняются неравенства

$$L_{g1}(x_2 - x_1) \le g(t,x_2) - g(t,x_1) \le L_{g2}(x_2 - x_1).\blacksquare$$

Очевидно, $L_{g1} \ge -L$, $L_{g2} \le L$ и $L = \max\{|L_{g2}|,|L_{g1}|\}$. Таким образом, если в правой части рассматриваемого дифференциального уравнения вычленить слагаемое $ax(t)$, то неравенство (1.23), определяющее возможность сходимости рассматриваемого итерационного метода, примет вид

$$\frac{\max\left[\,|L_{g2}-a|,|L_{g1}-a|\,\right]}{|a|} < 1.$$

Легко убедиться, что если $L_{g1}L_{g2} \le 0$, то это неравенство никогда не будет выполняться и отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ не будет сжимающим, т.е. гарантировать существование единственного периодического решения нельзя. Если $L_{g1}L_{g2} > 0$, то при определенных значениях a это неравенство будет справедливым. Можно найти оптимальное с точки зрения оценки сходимости (1.23) значение этой константы. Для этого необходимо минимизировать по параметру a величину

$$\frac{L_f}{|a|} = \frac{\max\left[\,|L_{g2}-a|,|L_{g1}-a|\,\right]}{|a|}.$$

Такая задача эквивалентна нахождению решения уравнения

$$\frac{|L_{g2}-a|}{|a|}=\frac{|L_{g1}-a|}{|a|},$$

разрешив которое, получим $a_{opt}=(L_{g1}+L_{g2})/2$. В итоге, учитывая приведенные рассуждения, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.5 *Пусть для верхней и нижней констант Липшица L_{g1} и L_{g2} функции $g(\cdot,\cdot)$ из одномерного уравнения* (1.27) *выполняется неравенство $L_{g1}L_{g2}>0$. Тогда существуют такие константы a, для которых выполнено неравенство $L_f/|a|<1$ и, в силу теоремы 1.4, для уравнения* (1.27) *существует ω-периодическое решение $x(\cdot)$ и $x(\cdot)\in\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции $\hat{x}^0(\cdot)\in\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot)=(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к функции $\hat{x}(\cdot)\in\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}\leq\left(\frac{L_f}{|a|}\right)^k\|\hat{x}^0(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}},\qquad(1.28)$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем ее периодического продолжения на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Величина $L_f/|a|$ будет достигать своего минимального значения (т.е. итерационный метод будет сходиться быстрее всего) при $a=(L_{g1}+L_{g2})/2$. ■

Нетрудно видеть, что для функции $g(t,x)$ из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ условие $L_{g1}L_{g2}>0$ эквивалентно тому, что производная функции $g(t,x)$ по второму аргументу должна быть либо строго положительной, либо строго отрицательной при всех $t\in[0,\omega]$. Таким образом, на основе этой теоремы можно сформулировать важное следствие.

Следствие 4 *Пусть функция $g(t,x)$ из одномерного уравнения* (1.27) *удовлетворяет условию Липшица* (1.5), *принадлежит пространству* $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, *а производная функции $g(t,x)$ по второму аргументу либо строго положительная, либо строго отрицательная при всех $t\in[0,\omega]$. Тогда для уравнения* (1.27) *существует ω-периодическое решение. Такое решение единственное.* ■

1.3 Простейшая линеаризация, зависящая от времени

В данном разделе будет проведена линеаризация, зависящая от времени, то как это было сделано в уравнении (1.3). Приведем это уравнение еще раз

$$\dot{x}(t) = a(t)x + f(t,x), \tag{1.29}$$

$a(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ - ω-периодическая функция, $f(\cdot,\cdot)\in\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени функция.

1.3.1 Оценка нормы оператора периодических решений

Для линейного неоднородного уравнения (1.8) оценим норму оператора периодических решений. Приведем ограничение этого уравнения на интервал $[0,\omega]$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{a}(t)\hat{x} + \hat{\xi}(t), \quad t\in[0,\omega], \tag{1.30}$$

где $\hat{a}(t) = a(t)$ и $\hat{\xi}(t) = \xi(t)$ при $[0,\omega]$. Будем изучать решения $\hat{x}(\cdot)$ этого уравнения, принадлежащие пространству $\mathbb{C}^{(1),n}_{\omega}$. Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}[\hat{\xi}(\cdot)]$.

Тогда можно найти норму оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ для уравнения (1.30), где оператор $\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$ - оператор периодических решений, а оператор $\mathbb{J} : \mathbb{C}_\omega^{(1),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ - оператор естественного вложения. Введем обозначения

$$\hat{\zeta}(t) = exp(\int_0^t \hat{a}(\tau)d\tau - \bar{a}t), \quad t \in [0, \omega], \tag{1.31}$$

где $\bar{a}$ определяется формулой (1.9).

Предложение 1.2 *Если выполнено условие*

$$\bar{a} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \hat{a}(\tau)d\tau \neq 0,$$

то оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ *является непрерывным. Более того, норма такого оператора* $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ *равна*

$$\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\| = \max_{t\in[0,\omega]} \Big|\hat{\zeta}(t)\Big(e^{\bar{a}t}\bar{y}_0 + e^{\bar{a}t}\int_0^t e^{-\bar{a}\tau}\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)}d\tau\Big)\Big| \tag{1.32}$$

где $\hat{\zeta}(\cdot)$ *определяется формулой* (1.31), *а* $\bar{y}_0$ *определяется соотношением*

$$\bar{y}_0 = (1 - e^{\bar{a}\omega})^{-1}e^{\bar{a}\omega}\int_0^\omega e^{-\bar{a}\tau}\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)}d\tau.$$

`Доказательство.` Не ограничивая общности, при доказательстве будем предполагать, что уравнение (1.29) одномерно. То, что результат справедлив и для n-мерного случая, вытекает из того, что уравнение (1.30) может быть разбито на n независимых одномерных уравнений.

Найдем ненулевые вещественные собственные значения оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$. Для этого необходимо рассмотреть уравнение $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}[\hat{x}(\cdot)] = \lambda\hat{x}(\cdot)$ или, что тоже самое, найти периодическое решение уравнения $\lambda\dot{\hat{x}}(t) = \lambda\hat{a}(t)\hat{x} + \hat{x}(t)$. Решение имеет вид $\hat{x}(t) = exp(\int_0^\omega \hat{a}(\tau)d\tau + \frac{1}{\lambda}t)$. Очевидно, единственным ненулевым вещественным собственным значением является $\lambda = -1/\bar{a}$, а соответствующая ему собственная функция есть функция $\hat{\zeta}(\cdot)$ определенная формулой (1.31). Делая замену $\hat{x}(t) = \hat{\zeta}(t)\hat{y}(t)$, вместо уравнения (1.30) рассматривается новое уравнение, но уже относительно $\hat{y}(t)$. Учитывая, что $\hat{\zeta}(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, \omega]$ и $\dot{\hat{\zeta}}(t) = \hat{a}(t)\hat{\zeta}(t) - \bar{a}\hat{\zeta}(t)$, такое уравнение примет вид

$$\dot{\hat{y}}(t) = \bar{a}\hat{y} + \hat{\phi}(t),$$

где $\hat{\phi}(t) = \hat{\xi}(t)/\hat{\zeta}(t) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),1}$. Относительно этого уравнения можно ввести еще один оператор периодических решений $\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),1} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),1}$, $\quad \mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}[\hat{\phi}(\cdot)] = \hat{y}(\cdot)$. Оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$ может быть выражен через новый оператор следующим образом

$$\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{\zeta}(\cdot)\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}\frac{\hat{\xi}(\cdot)}{\hat{\zeta}(\cdot)}.$$

Из теоремы 1.3 нетрудно получить, что норма оператора $\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}$ будет достигать максимальных значений при максимальном значении нормы $\hat{\xi}(\cdot)$ при условии $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),1}} \leq 1$. Следовательно, норма оператора $\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}$ своего максимального значения будет достигать в частности при $\hat{\xi}(\cdot) \equiv 1$. Тогда, используя формулу (1.11), можно получить значение нормы $\|\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\phi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),1}}$ при $\hat{\xi}(\cdot) \equiv 1$

$$\|\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\phi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),1}} = \|\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}\frac{1}{\hat{\zeta}(\cdot)}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),1}} = \max_{t\in[0,\omega]}\left|e^{\bar{a}t}\bar{y}_0 + e^{\bar{a}t}\int_0^t e^{-\bar{a}\tau}\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)}d\tau\right|,$$

где $\bar{y}_0$ определяется формулой

$$\bar{y}_0 = (1 - e^{\bar{a}\omega})^{-1}e^{\bar{a}\omega}\int_0^\omega e^{-\bar{a}\tau}\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)}d\tau.$$

В таком случае норма оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ будет равна

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| = \max_{t\in[0,\omega]} \left|\hat{\zeta}(t)\Big(e^{\bar{a}t}\bar{y}_0 + e^{\bar{a}t}\int_0^t e^{-\bar{a}\tau}\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)}d\tau\Big)\right|,$$

что и требовалось доказать. ■

1.3.2 Уравнение с нелинейным слагаемым и простейшей линеаризацией, зависящей от времени

В данном разделе будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейного дифференциального уравнения (1.1), в котором $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ является ω-периодической функцией. Такие условия будут получены с помощью линеаризации вида (1.29). Если функция $g(.)$ из уравнения (1.1) удовлетворяет условию Липшица (1.5) с константой L_g, то в уравнении (1.18) функция $f(t,x) = g(t,x) - ax$ также будет удовлетворять условию Липшица с некоторой константой L_f

$$\|f(t,x^1) - g(t,x^2)\|_{\mathbb{R}^n} \le L_f\|x^1 - x^2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

С каждой линеаризацией уравнения (1.1) связана линейная неоднородная система (1.8)

$$\dot{x}(t) = a(t)x + \xi(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

где $a(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ - ω-периодические функции. В свою очередь, если выполняются условия теоремы 1.2, то корректно определен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$. Операторы $\mathbb{F}$ и $\hat{\mathbb{F}}$ будут определены по правилам (1.21) и (1.22), соответственно. А именно,

$$\mathbb{F}:\, \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \qquad \mathbb{F}[x(\cdot)](t) = f(t,x(t)), \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}, \qquad \hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}(t)), \quad t \in [0, \omega].$$

Теорема 1.6 *Если выполняется условие*

$$L_f \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| < 1, \tag{1.33}$$

где $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$ *определяется формулой* (1.32)*, то для уравнения* (1.29) *(соответственно, для уравнения* (1.1)*) существует* ω*-периодическое решение* $x(\cdot)$ *и* $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$*. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции* $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),n}$*, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le \Big(L_f \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|\Big)^k \, \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}, \tag{1.34}$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем ее периодического продолжения на всю числовую ось* $\mathbb{R}$*.*

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{1.35}$$

В силу предложения 1.1, продолжение по периодичности ω на всю числовую ось всякого решения уравнения (1.35) задает периодическое решение уравнения (1.29) (соответственно, уравнения (1.1)) и наоборот. Так как $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (1.35) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$.

Из условия Липшица для функции $f(\cdot)$ следует неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le L_f \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}.$$

В силу теоремы 1.2, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)])\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \\ &\le \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| \ \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \le L_f \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| \ \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

где $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$ определяется формулой (1.32). Следовательно получаем, что при $L_f\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| < 1$ отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ будет сжимающим и существует единственная неподвижная точка $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ этого отображения. Решение $x(\cdot)$ исходного уравнения (1.29) (и (1.1)) из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ легко получить периодическим продолжением функции $\hat{x}(\cdot)$ на всю числовую ось.

Оценка сходимости (1.34) также легко получается из приведенной последовательности неравенств. Теорема доказана. ■

Следствие 5 *Если функция $f(t,x)$ из уравнения* (1.29) *принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и для нее справедливо неравенство $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{\mathbb{R}^n} < \gamma$, то при условии $\gamma\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| < 1$, где $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$ определяется соотношением* (1.32), *существует единственное ω-периодическое решение.* ■

1.4 Матричная линеаризация

В данном разделе рассматривается матричная линеаризация (1.4), а именно,

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.37}$$

где A - некоторая невырожденная (n,n)-матрица, такая, что все собственные значения действительны и все жордановы клетки при диагонализации имеют единичную размерность, $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени.

В случае $n=2$ матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы у такой матрицы все собственные значения были действительными и все жордановы клетки при диагонализации имели единичную размерность, достаточно, чтобы для элементов a_{ij}, $i,j=1,2$ было справедливо неравенство

$$(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0. \tag{1.38}$$

Основной задачей при любом из способов линеаризации является оценка нормы оператора периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$.

Предполагается, что функция $f(t,x) = (f_1(t,x),...,f_n(t,x))' \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ в правой части (1.37) удовлетворяет условию Липшица с константами $l_{i,j}$, $i,j\in\{1,...,n\}$. То есть, для любого i из $\{1,...,n\}$, любого $t\in\mathbb{R}$ и любых $x^1=(x_1^1,...,x_n^1)'$ и $x^2=(x_1^2,...,x_n^2)'$ из $\mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$|f_i(t,x^1) - f_i(t,x^2)| \le \sum_{j=1}^{n} l_{i,j}|x_j^1 - x_j^2|. \tag{1.39}$$

1.4.1 Оценка нормы оператора периодических решений

Рассматривается линейное неоднородное уравнение (1.6). Запишем его ограничение на интервал $[0, \omega]$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + \hat{\xi}(t), \tag{1.40}$$

где все собственные значения λ_i, $i = \overline{1, n}$ матрица A принадлежат $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1, а $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$.

В силу выполнения условий следствия 1 теоремы 1.1, оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ определен корректно.

Норма в пространствах $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$ определяется по правилам (1.15) и (1.16), соответственно. Однако здесь нам придется изменить правило, по которому будет вычисляться норма. Для этого норму относительно пространства $\mathbb{R}^n$ определим следующим образом

$$\|x\|_\Sigma = m_1|x_1| + m_2|x_2| + \cdots + m_n|x_n|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.41}$$

где $m_1 = 1, \quad m_k > 0, \quad k \in \{2, 3, ..., n\}$ - весовые параметры. В случае $n = 1$ эта норма совпадает с классической нормой $\|x\|_\Sigma = |x|$. Очевидно, новая норма эквивалентна классической норме пространства $\mathbb{R}^n$. Пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$ с новой нормой обозначим как $\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(1),n}$, соответственно. Нормы в этих пространствах примут следующий вид

$$\|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),n}} = \max_{t\in[0,\omega]} \|\hat{x}(\cdot)\|_\Sigma, \tag{1.42}$$

$$\|\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(1),n}} = \max\Big\{ \max_{t\in[0,\omega]} \|\hat{x}(t)\|_\Sigma, \ \max_{t\in[0,\omega]} \|\dot{\hat{x}}(t)\|_\Sigma \Big\}. \tag{1.43}$$

Очевидно, новые пространства $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ и $\mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$ также являются банаховыми относительно новых норм.

Норма оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ относительно новой нормы будет обозначаться как $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|||_\Sigma$. Норму произвольного линейного оператора G, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\Sigma$, будет обозначаться также через $|||\, G \,|||_\Sigma$.

Вернемся к рассмотрению линейного неоднородного уравнения (1.40). С учетом спектральных свойств матрицы A, уравнение (1.40) можно представить в другом виде. Существует некоторая матрица $Q = \{q_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ (каждый столбец матрицы Q^{-1} является собственным вектором матрицы A), такая, что QAQ^{-1} окажется диагональной матрицей, причем на диагонали находятся собственные значения исходной матрицы A. Тогда, делая замену $\hat{y}(t) = Q\hat{x}(t)$ и $\hat{\zeta}(\cdot) = Q\hat{\xi}(\cdot)$, можно получить новое линейное неоднородное уравнение

$$\dot{\hat{y}} = \Lambda\hat{y} + \hat{\zeta}(t), \tag{1.44}$$

где $\Lambda = QAQ^{-1} = diag(\{\lambda_i\}_{i=1}^n)$ - диагональная (n, n)-матрица.

Введем в рассмотрение еще один оператор периодических решений, действующий по правилу

$$\widetilde{\mathbb{P}} : \mathbb{C}^{(0),n}_\omega \to \mathbb{C}^{(1),n}_\omega, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot) = \hat{y}(\cdot).$$

Учитывая, что $\hat{x}(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)$, имеем

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot) = Q^{-1}\hat{y}(\cdot) = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot) = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q\hat{\xi}(\cdot).$$

Таким образом, получаем

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q.$$

Тогда для нормы $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|||_\Sigma$ справедлива оценка

$$|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|||_\Sigma \leq |||Q^{-1}|||_\Sigma |||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma.$$

Таким образом, задача оценки $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|||_\Sigma$ может быть сведена к задаче оценки норм $|||Q^{-1}|||_\Sigma$ и $|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma$.

Решим первую задачу. Задача нахождения нормы в $\mathbb{R}^n$ матрицы Q^{-1}, определенной по правилу (1.41), эквивалентна решению следующей оптимизационной задачи

$$\|Q^{-1}\eta\|_\Sigma \to \max_\eta$$

при условии

$$\|\eta\|_\Sigma = |\eta_1| + m_2|\eta_2| + ... + m_n|\eta_n| = 1.$$

Данная задача решается с помощью геометрических представлений. Нетрудно убедиться, что множество точек, для которых выполнено равенство $\|\eta\|_\Sigma = 1$, является $2n$-угольником в пространстве $\mathbb{R}^n$, при этом координаты вершин этого $2n$-угольника $\{\eta^k\}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ описываются следующим образом:

$$\eta_i^{2j-1} = \begin{cases} \frac{1}{m_j}, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \quad \eta_i^{2j} = \begin{cases} -\frac{1}{m_j}, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \tag{1.45}$$

где $j \in \{1, ..., n\}$, $\quad i \in \{1, ..., 2n\}$. Множество таких вершин обозначим через $M_1 = \{\eta^k\}_{k=1}^{2n}$. Аналогично, в силу невырожденности матрицы Q^{-1} каждая линия уровня $\{\eta \in \mathbb{R}^n | \quad \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma = c\}$, соответствующая некоторой положительной константе c, представляет собой $2n$-угольник. Причем, при увеличении c происходит параллельный сдвиг всех сторон этого $2n$-угольника в сторону увеличения его объема. Тогда из приведенных рассуждений легко заключить, что максимальное значение c, при котором выполнено $\|\eta\|_\Sigma = 1$, будет достигаться в одной или нескольких точках множества M_1. Сформулировать данный результат в виде леммы.

Лемма 1.1 *Норма оператора Q^{-1} имеет вид*

$$|||Q^{-1}|||_\Sigma = \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma,$$

где $M_1 = \{\eta^k\}_{k=1}^{2n}$, а координаты точек $\eta^k \in \mathbb{R}^n$ определяются формулой (1.45). ■

Теперь найдем значение нормы $|||\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma$. Для этого вводится в рассмотрение следующее множество

$$\Omega = \{Q\eta \in \mathbb{R}^n | \quad \|\eta\|_\Sigma \leq 1\}. \tag{1.46}$$

В силу невырожденности матрицы Q множество Ω представляет собой $2n$-угольник. Дополнительно через M_2 обозначим множество, состоящее из $2n$ точек, которые являются вершинами этого многоугольника. Кроме этого вводится в рассмотрение пространство $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}(\Omega)$

$$\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}(\Omega) = \{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega} \mid \hat{\xi}(t) \in \Omega \text{ при } \forall t \in [0,\omega]\}.$$

Теперь сформулируем следующее предложение.

Предложение 1.3 *Значение нормы оператора $|||\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma$ определяется соотношением*

$$|||\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma = \max_{\eta \in M_2} \|\Lambda^{-1}\eta\|_\Sigma,$$

где $\mathbb{J}\widetilde{\mathbb{P}} = Q\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}Q^{-1}$, M_2 - множество точек, которые являются вершинами $2n$-угольника Ω (1.46).

`Доказательство.` Рассматривается линейное неоднородное уравнение (1.44). Необходимо оценить значение нормы $|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma$. Для этого нужно решить следующую задачу максимизации

$$\|\hat{y}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = \|\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \to \max_{\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}$$

при условии

$$\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq 1.$$

Учитывая, что $\hat{\zeta}(\cdot) = Q\hat{\xi}(\cdot)$ имеем

$$\|\hat{y}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = \|\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \to \max_{\hat{\psi}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}$$

при условии

$$\hat{\zeta}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}(\Omega).$$

Решение задачи $\hat{y}(\cdot) = \mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot)$ эквивалентно решению дифференциального уравнения

$$\dot{\hat{y}} = \Lambda\hat{y} + \hat{\zeta}(t). \tag{1.47}$$

Эта система может быть рассмотрена как n независимых уравнений

$$\dot{\hat{y}}_i(t) = \lambda_i\hat{y}_i(t) + \hat{\zeta}_i(t), \quad i = \{1, ..., n\}.$$

Из теоремы 1.3 легко заключить, что $\|\hat{y}_i(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}}$ будет достигать наибольших значений при такой $\hat{\zeta}_i(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}$, при которой значение нормы $\|\hat{\zeta}_i(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}}$ будет наибольшим. Причем, функция $\hat{\zeta}(\cdot)$ при этом может, в частности, быть постоянной функцией. Таким образом, несложно показать, что норма оператора $|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_\Sigma$ будет достигаться в случае, когда функция $\hat{\zeta}(\cdot)$

будет постоянной, равной одной из точек множества M_2. Тогда имеем

$$|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|||_{\Sigma} = \max_{\eta\in M_2} \|\Lambda^{-1}\eta\|_{\Sigma},$$

что и требовалось доказать. ■

В итоге получается следующий результат.

Теорема 1.7 *Оператор* $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ *является непрерывным. Более того, справедлива следующая оценка*

$$|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|||_{\Sigma} \leq \max_{\eta\in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_{\Sigma} \max_{\eta\in M_2} \|\Lambda^{-1}\eta\|_{\Sigma}, \tag{1.48}$$

где $M_1 = \{\eta^k\}_{k=1}^{2n}$, *координаты* $\eta^k \in \mathbb{R}^n$ *определяются по формуле* (1.45), M_2 *- множество точек, которые являются вершинами* $2n$*-угольника* Ω, *определенного в* (1.46). ■

1.4.2 Уравнение с нелинейным слагаемым. Случай $n = 2$.

Теперь можно вывести условия, которые обеспечат существование и единственность периодических решений для уравнений вида (1.37) в случае $n = 2$.

Уравнение (1.37) примет вид

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.49}$$

где A - некоторая невырожденная $(2,2)$-матрица, элементы которой удовлетворяют условию (1.38), а $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ - ω-периодическая по времени, которая имеет вид

$$f(t,z) = f(t,x,y) = \begin{pmatrix} f_1(t,x,y) \\ f_2(t,x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Относительно нормы $\|\cdot\|_\Sigma$ для функции $f(t,x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любых $x^1 = (x_1^1, x_2^1)'$ и $x^2 = (x_1^2, x_2^2)'$ в силу условий Липшица (1.39), выполняется оценка

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\|_\Sigma = \|f(t,x_1^1,x_2^1) - f(t,x_1^2,x_2^2)\|_\Sigma =$$

$$|f_1(t,x_1^1,x_2^1) - f_1(t,x_1^2,x_2^2)| + m_2|f_2(t,x_1^1,x_2^1) - f_2(t,x_1^2,x_2^2)| \leq$$

$$l_{1,1}|x_1^1 - x_1^2| + l_{1,2}|x_2^1 - x_2^2| + m_2(l_{2,1}|x_1^1 - x_1^2| + l_{2,2}|x_2^1 - x_2^2|) =$$

$$(l_{1,1} + m_2 l_{2,1})|x_1^1 - x_1^2| + (l_{1,2} + m_2 l_{2,2})|x_2^1 - x_2^2| =$$

$$(l_{1,1} + m_2 l_{2,1})(|x_2^1 - x_1^2| + \frac{l_{1,2} + m_2 l_{2,2}}{l_{1,1} + m_2 l_{2,1}}|x_2^1 - x_2^2|).$$

Параметр m_2 выбирается таким, чтобы коэффициент $\frac{l_{1,2}+m_2 l_{2,2}}{l_{1,1}+m_2 l_{2,1}}$ стал равным m_2. Для этого необходимо разрешить квадратное уравнение

$$m_2^2 l_{2,1} + m_2(l_{1,1} - l_{2,2}) - l_{1,2} = 0. \tag{1.51}$$

Решив это уравнение, получим

$$m_2 = \frac{\sqrt{D} - (l_{1,1} - l_{2,2})}{2l_{2,1}}, \tag{1.52}$$

где $D = (l_{1,1} - l_{2,2})^2 + 4l_{2,1}l_{1,2}$. При этом, если $l_{2,1} = 0$, то

либо $m_2 = l_{1,2}/(l_{1,1} - l_{2,2})$, если $l_{1,1} > l_{2,2}$;

либо, если $l_{1,1} \leq l_{2,2}$, $l_{1,1}$ можно увеличить так, что m_2 будет принимать любое положительное значение.

Таким образом, после определения m_2 получаем

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\|_\Sigma = \|f(t,x_1^1,x_2^1) - f(t,x_1^2,x_2^2)\|_\Sigma \leq$$

$$(l_{1,1}+m_2l_{2,1})(|x_1^1-x_1^2|+\frac{l_{1,2}+m_2l_{2,2}}{l_{1,1}+m_2l_{2,1}}|x_1^2-x_2^2|)=(l_{1,1}+m_2l_{2,1})\|x^1-x^2\|_\Sigma. \tag{1.53}$$

Операторы $\mathbb{F}$ и $\hat{\mathbb{F}}$ будут определены по правилам

$$\mathbb{F}:\ \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)\ \to \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2),\qquad \mathbb{F}[x(\cdot)](t)=f(t,x(t)),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Ограничение этого оператора на пространство функций, определенных на отрезке $[0,\omega]$, будем обозначать через $\hat{\mathbb{F}}$

$$\hat{\mathbb{F}}:\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}\to\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma},$$

$$\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t)=f(t,\hat{x}(t)),\quad t\in[0,\omega].$$

Теорема 1.8 *Пусть A - невырожденная $(2,2)$-матрица, для элементов которой a_{11},a_{12},a_{21} и a_{22} выполнено условие* (1.38)

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})>0,$$

а параметр m_2 определяется формулой (1.52)*. Если выполнено условие*

$$\Big(l_{1,1}+m_2l_{2,1}\Big)\max_{\eta\in M_1}\|Q^{-1}\eta\|_\Sigma\max_{\eta\in M_2}\|\Lambda^{-1}Q\eta\|_\Sigma<1, \tag{1.54}$$

где $M_1=\{\eta^k\}_{k=1}^{2n}$, координаты $\eta^k\in\mathbb{R}^n$ определяются по формуле (1.45)*, M_2 - множество точек, которые являются вершинами $2n$-угольника Ω, определенного в* (1.46)*, то существует ω-периодическое решение для уравнения* (1.49) *$x(\cdot)$ и $x(\cdot)\in\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции $\hat{x}^0(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ последовательность $\hat{x}^k(\cdot)=(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ стремится к функции $\hat{x}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(1),2}_{\omega,\Sigma}$, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}\le$$

$$\Big(l_{1,1}+m_2l_{2,1}\Big)\max_{\eta\in M_1}\|Q^{-1}\eta\|_\Sigma\max_{\eta\in M_2}\|\Lambda^{-1}Q\eta\|_\Sigma\ \|\hat{x}^0(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}, \qquad (1.55)$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ индуцируется функцией $\hat{x}(\cdot)$ путем ее периодического продолжения на всю числовую ось $\mathbb{R}$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot)=\hat{x}(\cdot). \qquad (1.56)$$

В силу предложения 1.1, продолжение по периодичности ω на всю числовую ось всякого решения уравнения (1.56) задает периодическое решение уравнения (1.49) и наоборот. Так как правая часть уравнения (1.49) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, то каждое решение уравнения (1.56) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(1),2}_{\omega,\Sigma}$.

Из условия Липшица (1.53) для функции $f(\cdot)$ получаем, что относительно оператора $\hat{\mathbb{F}}$ для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ справедливо неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}\le(l_{1,1}+m_2l_{2,1})\|\hat{y}(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}.$$

Тогда, в силу теоремы 1.7, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)\in\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega}}=\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)])\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega}}\le$$

$$\le\||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\||_\Sigma\ \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega}}\le$$

$$\le\Big(l_{1,1}+m_2l_{2,1}\Big)\max_{\eta\in M_1}\|Q^{-1}\eta\|_\Sigma\max_{\eta\in M_2}\|\Lambda^{-1}Q\eta\|_\Sigma\|\hat{y}(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}.$$

Следовательно получаем, что при выполнении условия (1.54) отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ будет сжимающим и существует единственная неподвижная точка $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ этого отображения. Решение $x(\cdot)$ исходного уравнения (1.49) из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ легко получить периодическим продолжением функции $\hat{x}(\cdot)$ на всю числовую ось.

Оценка сходимости (1.55) также легко получается из приведенной последовательности неравенств. Теорема доказана. ■

1.4.3 Уравнение с нелинейным слагаемым. Случай произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Ранее были получены результаты для случая $n = 2$. Эти результаты могут быть получены также для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейного дифференциального уравнения (1.1), в котором $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ является ω-периодической функцией. Такие условия будут получены с помощью линеаризации вида (1.37). Функция $f(.)$ уравнения (1.37) удовлетворяет условию Липшица (1.39). В свою очередь, если выполняются условия теоремы 1.1 (следствия 1), то корректно определен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$. Также как и в двумерном случае операторы $\mathbb{F}$ и $\hat{\mathbb{F}}$ будут определены по правилам

$$\mathbb{F} : \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \qquad \mathbb{F}[x(\cdot)](t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}, \qquad \hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}(t)), \quad t \in [0, \omega].$$

С учетом условия Липшица (1.39) для функции $f(t, x)$ относительно нормы $\|\cdot\|_\Sigma$ и для любых $t \in \mathbb{R}$ и любых $x^1 \in \mathbb{R}^n$ и $x^2 \in \mathbb{R}^n$ справедлива следующая оценка

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\|_\Sigma = |f_1(t,x^1) - f_2(t,x^2)| + m_2|f_2(t,x^1) - f(t,x^2)| + ...+$$

$$+m_n|f_n(t,x^1) - f_n(t,x^2)| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{1,i}|x_i^1 - x_i^2| + m_2 \sum_{i=1}^{n} l_{2,i}|x_i^1 - x_i^2| + ... + m_n \sum_{i=1}^{n} l_{n,i}|x_i^1 - x_i^2| =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1} \Big)|x_1^1 - x_1^2| + ... + \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,n} \Big)|x_n^1 - x_n^2| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,i} \Big)|x_i^1 - x_i^2| = \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1} \Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}} |x_i^1 - x_i^2| \Big).$$

Параметры m_j, $j = \{2, ..., n\}$ для нормы $\|\cdot\|_{\Sigma^n}$ должны быть такими, чтобы они удовлетворяли системе $n-1$ уравнений

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}} = m_i. \tag{1.57}$$

Легко видеть, что, разрешая эти уравнения относительно m_j, $j = \{2, ..., n\}$, можно получить квадратное уравнение, дискриминант которого всегда неотрицателен и поэтому всегда существует по крайней мере один положительный корень этого уравнения.

При таком выборе этих параметров получится следующая оценка

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\|_\Sigma \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1} \Big) \|x^1(\cdot) - x^2(\cdot)\|_\Sigma. \tag{1.58}$$

Теорема 1.9 *Пусть A - невырожденная (n,n)-матрица, все собственные значения которой вещественны, жордановы клетки имеют единичную размерность, а параметры m_j, $j \in \{2, 3, ..., n\}$ являются решениями* *системы из* $(n-1)$ *уравнений* (1.57). *Если выполнено условие*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j1}\right) \;|||\, Q^{-1} \,|||_{\Sigma} \;\max_{\eta \in M_n} \|\Lambda^{-1}\eta\|_{\Sigma} < 1, \tag{1.59}$$

где M_n *- множество точек, которые являются вершинами* $2n$*-угольника* $\Omega = \{Q\eta \in \mathbb{R}^n | \;\; \|\eta\|_{\Sigma} \le 1\}$, *то существует* ω*-периодическое решение для уравнения* (1.37) *(соответственно, для уравнения* (1.1)*)* $x(\cdot)$ *и* $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. *Такое решение является единственным. Более того, для любой исходной функции* $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$, *справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \le$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j1}\right) \;|||\, Q^{-1} \,|||_{\Sigma} \;\left(\max_{\eta \in M_n} \|\Lambda^{-1}\eta\|_{\Sigma}\right) \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}, \tag{1.60}$$

а периодическое решение $x(\cdot)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем ее периодического продолжения на всю числовую ось* $\mathbb{R}$.

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{1.61}$$

В силу предложения 1.1, продолжение по периодичности ω на всю числовую ось всякого решения уравнения (1.61) задает периодическое решение уравнения (1.37) и наоборот. Так как правая часть уравнения (1.37) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (1.61) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$.

Из условия Липшица (1.58) для функции $f(\cdot)$ получаем, что относительно оператора $\hat{\mathbb{F}}$ для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}$ справедливо неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}\Big)\|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}.$$

Тогда, в силу теоремы 1.7, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)])\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq$$

$$\leq \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| \;\; \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j l_{j,1}\Big) \max_{\eta\in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_{\Sigma} \max_{\eta\in M_2} \|\Lambda^{-1}\eta\|_{\Sigma} \, \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,\Sigma}}.$$

Следовательно получаем, что при выполнении условия (1.59) отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ будет сжимающим и существует единственная неподвижная точка $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ этого отображения. Решение $x(\cdot)$ исходного уравнения (1.37) из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ легко получить периодическим продолжением функции $\hat{x}(\cdot)$ на всю числовую ось.

Оценка сходимости (1.60) также легко получается из приведенной последовательности неравенств. Теорема доказана. ■

1.5 Области применения изучаемого метода поиска периодических решений.

В данном разделе рассматриваются несколько примеров, которые наглядно показывают области применения изучаемого подхода. Важным является последний пример этого раздела, который показывает, что тейлоровская линеаризация относительно известного периодического решения далеко не всегда является наилучшей.

Для одномерных уравнений в случае простейшей линеаризации область применения метода рассмотрена в теореме 1.5. Очевидно, однако, что простейшая линеаризация является частным случаем выделения линейной части в виде функции. Поэтому логично предположить, что выделение линейной части в виде функции может дать лучший результат по сравнению с простейшей линеаризацией. Первый из приведенных ниже примеров это наглядно демонстрирует.

Пример 1. Рассматривается уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}x + x\ \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что единственным периодическим решением этого уравнения является тривиальная функция $x(t) \equiv 0$. Если применить теорему 1.5, то легко видеть, что верхняя и нижняя константы Липшица будут равны $L_{g1} = -1/2$ и $L_{g2} = 3/2$. Таким образом, при любом выделении тривиальной линейной части периодическое решение найдено не будет. То есть видно, что в теореме 1.5 сформулированы достаточные, но не необходимые условия существования единственного ω-периодического решения.

С другой стороны, можно найти это решение путем выделения линейной части, содержащей функцию. Рассмотрим следующий вариант выделения такой линейной части

$$\dot{x}(t) = a(t)x + 0,1\cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

где $a(t) = \frac{1}{2}x(t) + 0,9\cos t, \quad f(t) = 0,1\cos t$. Очевидно, для функции $f(\cdot)$

константа Липшица $L_f = 0,1$. Необходимо оценить норму оператора $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$. Проводя численные вычисления, получить $\|\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\| = 5,33$. Следовательно, коэффициент $\|\mathbb{J}\mathbb{P}\|L_f$ примет значение $0,53$. Таким образом, условия теоремы 1.6 выполнены и исходное уравнение имеет единственное периодическое решение, которое можно получить итерационным путем.

`Пример 2.` В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение вида $\dot{x}(t) = \ x\cos t$. Для правой части этого уравнения верхние и нижние константы Липшица будут равны $L_{g1} = -1$ и $L_{g2} = 1$, т.е. как и в предыдущем случае, изложенный здесь метод не применим. При этом легко заметить, что множество решений этого уравнения будет иметь вид $x(t) = Ce^{\sin t}$, т.е. все решения в данном случае являются 2π-периодическими (не выполнены условия теоремы 1.1).

`Пример 3.` Рассмотрим уравнение вида $\dot{x}(t) = (\cos t + 2)x$. В этом случае константы Липшица равны $L_{g1} = 1$, $L_{g2} = 3$ и, выбрав оптимальное $a_{opt} = (L_{g1} + L_{g2})/2 = 2$, можно успешно применить изложенный итерационный метод.

Может возникнуть вопрос: не является ли тейлоровское выделение линейной части относительно периодического решения самым оптимальным выделением линейной части с точки зрения оценки сходимости (1.24). Действительно, если в качестве начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ брать функцию из некоторой достаточно близкой окрестности периодического решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$, то такое разложение может быть оптимальным. Однако, если в качестве $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ взять достаточно далекую от периодического решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ функцию, то может оказаться, что предложенный в теореме 1.4 итерационный подход не дать нужного результата, что показывает приведенный ниже пример.

`Пример 4.` Рассматривается уравнения вида (1.27), в котором функция $g(t,x)$ зависит только от второго аргумента, т.е. $g(t,x) = g(x)$

$$\dot{x}(t) = g(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.62}$$

где $g(x) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ имеет следующий вид

$$g(x) = \begin{cases} 3x+2, \quad x \in (-\infty,-1) \\ x, \quad x \in [-1,1] \\ 3x-2, \quad x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Легко видеть, что единственным решением уравнения (1.62) является функция тождественно равная нулю, т.е. $x(t) \equiv 0$. Очевидно, применив тейлоровское выделение линейной части относительно нулевого решения, уравнение (1.62) примет вид

$$\dot{x}(t) = x + f_1(x),$$

где $f_1(x) = g(x) - x$. То есть функция $f_1(x)$ примет вид

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x+2, \quad x \in (-\infty,-1) \\ 0, \quad x \in [-1,1] \\ 2x-2, \quad x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

В качестве начальной функции $\hat{x}^0(\cdot)$ выбирается постоянная функция, которая лежит в пределах от -1 до 1. Легко убедиться, что метод, изложенный в теореме 1.4, сойдется к нулевому решению за одну итерацию. Однако, если в качестве начальной функции взять также постоянную функцию, но уже лежащую в пределах от 2 до плюс бесконечности, то легко проверить, что рассматриваемый итерационный метод будет уже расходиться и нулевое решение найдено не будет.

С другой стороны, если использовать результат теоремы 1.5, учитывая, что верхняя и нижняя константы Липшица принимают значения $L_{g1} = 1$ и $L_{g2} = 3$, линеаризованное уравнение будет иметь вид

$$\dot{x}(t) = 2x + f_2(x),$$

где $f_2(x) = g(x) - \frac{1}{2}(L_{g1} + L_{g2})x = g(x) - 2x$. Выпишем эту функцию в явном виде

$$f_2(x) = \begin{cases} x + 2, \quad x \in (-\infty, -1) \\ -x, \quad x \in [-1, 1] \\ x - 2, \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Легко убедиться, что при любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot)$ из пространства $\mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}$ рассматриваемый итерационный метод будет сходиться к единственному периодическому решению $\hat{x}(t) \equiv 0$.

В заключении главы отметим, что величины $L_f/|a|$ в теоремах 1.4 и 1.5, $L_f\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|$ из теоремы 1.6 и левая часть неравенства (1.59) теоремы 1.9 и (1.54) теоремы 1.8 не зависят от периода ω. Поэтому, полученное единственное периодическое решение в случае автономных уравнений окажется стационарным состоянием. Такие решения гораздо легче получить приравняв правую часть уравнения (1.1) к нулю. Таким образом, полученные результаты имеют ценность лишь в случае неавтономных уравнений.

`Пример 5.` Приведем пример использования функциональной нелинейной части. Рассматривается уравнение вида

$$\dot{x}(t) = 2\,(1+\sin t)x + \frac{\cos t}{1+x^2}.$$

Для этого уравнения выберем следующую фкнкциональную линейную часть

$$a(t) = 2\,(1+\sin t).$$

Тогда $f(t,x) = \frac{\cos t}{1+x^2}$. По формуле (1.32) численно определим значение нормы $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{2\pi}}$

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{2\pi}} \approx 0,38.$$

Также легко получить, что

$$L_f = \frac{9}{8\sqrt{3}}.$$

Таким образом имеем

$$L_f\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{2\pi}} \approx 0,25.$$

Следовательно исходное уравнение имеет единственное 2π-периодическое решение.

2 Вопросы существования периодических решений для одномерных дифференциальных уравнений n-го порядка

2.1 Постановка задачи

В данной главе будут изучаться одномерные дифференциальные уравнения n-го порядка вида

$$x^{(n)}(t) = g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ - ω-периодическая по времени функция. Решением уравнения (2.1) называется всякая непрерывно-дифференцируемая функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая этому уравнению. Будут сформулированы условия существования и единственности периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (2.1), а также описана процедура построения такого решения.

Линеаризация правой части уравнения проводится следующим образом

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) + \chi(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где $\chi(\cdot) = g(\cdot) - a_{n-1}x^{(n-1)}(t) - ... - a_1\dot{x}(t) - a_0x(t)$. Коэффициенты $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$, должны удовлетворять специальным свойствам, о которых будет сказано ниже.

Уравнение (2.2) сведем к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае выделенная линейная часть по сравнению с разделом 1.4 (Матричная линеаризация) будет иметь специальный вид, что позволяет получить более уточненный результат.

Предполагается, что функция $g(\cdot)$ из уравнения (2.1), а соответственно и функция $\chi(\cdot)$ уравнения (2.2), удовлетворяет условию Липшица,

$$|\chi(t, x^1) - \chi(t, x^2)| \leq \sum_{i=1}^{n} l_i |x_i^1 - x_i^2|. \tag{2.3}$$

В этой главе будут изучаться условия, которые необходимо наложить на матрицу A и функцию $\chi(\cdot)$, чтобы для уравнения (2.2) (соответственно уравнения (2.1)) обеспечить существование единственного ω-периодического решения из класса непрерывно-дифференцируемых функций.

2.2 Сведение одномерного уравнения n-го порядка к уравнению первого порядка размерности n

В данном разделе одномерное дифференциальное уравнение n-го порядка, в правой части которого стоит функция, зависящая только от времени, будет сведено к n-мерному дифференциальному уравнению первого порядка специальным образом. Результаты будут уточнены также для случая $n = 2$.

Рассматривается дифференциальное уравнение следующего вида

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — ω-периодическая функция, коэффициенты $a_0, ..., a_{n-1}$ из $\mathbb{R}$ такие, что при приведении уравнения (2.4) к n-мерному уравнению первого порядка соответствующая матрица должна иметь действительные собственные значения, жордановы клетки которых должны иметь размерность равную 1.

Приведем уравнение (2.4) к уравнению первого порядка размерности n. Для этого сделаем замену $x(t) = z_1(t)$, $\dot{z}_1(t) = z_2(t)$,..., $\dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t)$ и таким образом получим

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2 \\ \dot{z}_2(t) = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) = -a_0 z_1 - a_1 z_3 - ... - a_{n-1} z_n + \psi(t), \end{cases}$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Будем искать решение $z(\cdot) = (z_1(\cdot), ..., z_n(\cdot))'$ из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. В матричном виде это уравнение примет вид

$$\dot{z}(t) = Az + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \xi(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Можно легко получить, что $|\det A| = |a_0|$. Поэтому параметр a_0 должен быть не равен 0. Параметры $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ будут выбираться такими, чтобы все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ были действительными и жордановы клетки этих собственных значений имели единичную размерность. В таком случае можно составить матрицу Q, i-ый столбец которой является собственным вектором соответствующего собственного значения

λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда матрица QAQ^{-1} будет диагональной матрицей с собственными значениями λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$ на диагонали. Используя лемму 1.1, норма $|||Q^{-1}|||_\Sigma$ определяется соотношением

$$|||Q^{-1}|||_\Sigma = \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma, \tag{2.7}$$

где множество M_1 состоит из $2n$ точек, определенных формулой (1.45).

Полученные результаты для $n \in \mathbb{N}$ уточним для случая $n = 2$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение следующего вида

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — ω-периодическая функция.

Произведя соответствующую замену переменных, уравнение (2.8) представим в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y \\ \dot{y}(t) = -a_0 x - a_1 y + \psi(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Будем искать решение $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))'$ из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. В матричном виде это уравнение примет вид

$$\dot{z}(t) = Az + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \xi(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что для невырожденности матрицы A необходимо выполнение условия $a_0 \neq 0$. Изучим спектральные свойства такой матрицы. Для этого найдем ее собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \tag{2.11}$$

Видно, что для того, чтобы у уравнения было два различных собственных значения, величины $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ должны удовлетворять неравенству

$$a_1^2 - 4a_0 > 0. \tag{2.12}$$

Данное неравенство является аналогом условия (1.38).

Если это условие выполнено, то существует матрица Q такая, что QAQ^{-1} будет диагональной матрицей с λ_1 и λ_2 на диагонали. Построим матрицы Q^{-1} и Q, а также второй столбец q_2 матрицы Q

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Первым столбцом матрицы Q^{-1} будет собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_1, вторым столбцом будет собственный вектор соответствующий собственному значению λ_2. Тогда, используя лемму 1.1, можно определить норму матрицы Q^{-1} относительно нормы $|||\cdot|||_\Sigma$

$$|||Q^{-1}|||_\Sigma = \max_{\eta \in M} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma = \max\left\{1 + m_2|\lambda_1|; \frac{1}{m_2} + |\lambda_2|\right\}, \tag{2.13}$$

где множество M состоит из четырех точек $(\pm 1, 0)'$ и $(0, \pm 1/m_2)'$ из $\mathbb{R}^2$.

2.3 Пространство периодических решений и оператор периодических решений

Рассматривается линейное неоднородное уравнение (2.5). Запишем ограничение этого уравнения на интервале $[0, \omega]$

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z} + \hat{\xi}(t), \quad t \in [0, \omega], \tag{2.14}$$

где A — (n,n)-матрица, все собственные значения которой λ_i, $i \in \{1,...,n\}$ принадлежат пространству $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1, а $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$. Веса $m_2,...,m_n$ для нормы пространства $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ будут установлены ниже.

В силу ограничений, налогаемых на матрицу A, условия теоремы 1.1 (следствия 1) для уравнений (2.14) выполнены, т.е. в этом случае обеспечивается существование и единственность ω-периодического решения для линейного неоднородного уравнения (2.14). Тогда оператор периодических решений

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}, \quad \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{z}(\cdot)$$

определен корректно.

Так как дальше одномерное дифференциальное уравнение n-го порядка будет приводиться к n-мерному уравнению первого порядка (в частности $n = 2$), то в качестве функции $\hat{\xi}(\cdot)$ в уравнении (2.14) нас будет интересовать не произвольные функции из класса $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$, а функции следующего вида

$$\hat{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{\xi}_n(t) \end{pmatrix},$$

где $\hat{\xi}_n(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}$. Тогда определим подпространство таких функций формально, обозначив его через $\mathbb{D}^n$.

$$\mathbb{D}^n = \left\{ \hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} | \quad \hat{\xi}_i(\cdot) \equiv 0, \quad i = \{1,...,(n-1)\} \right\}.$$

2.4 Оценка нормы оператора периодических решений

Нас будет интересовать оценка нормы оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$, индуцируемого уравнением (2.14), который действует из подпространства $\mathbb{D}^n$ во все пространство $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$. Другими словами, оценим значение следующей величины $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_{\Sigma}$.

Вернемся к рассмотрению уравнения (2.14). Подставляя в это уравнение вместо функции $\hat{\xi}(\cdot)$ из пространства $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ функцию из подпространства $\mathbb{D}^n$, а также учитывая спектральные свойства матрицы A, уравнение (2.14) можно переписать в ином виде. А именно, как это делалось в разделе 1.4 (Матричная линеаризация), существует некоторая матрица $Q = \{q_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ (каждый столбец матрицы Q^{-1} является собственным вектором матрицы A), такая, что QAQ^{-1} окажется диагональной матрицей, причем на диагонали будут находиться собственные значения исходной матрицы A. Сделаем замену $\hat{y}(t) = Q\hat{z}(t)$ и учитывая, что $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{D}^n$, $\hat{\zeta}(\cdot) = Q\hat{\xi}(\cdot) = q_n\hat{\xi}_n(\cdot)$, где q_n — последний столбец матрицы Q, а $\hat{\xi}_n(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}$ — функция, являющаяся n-ой координатой $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{D}^n$. В новых координатах уравнение (2.14) примет вид

$$\dot{\hat{y}}(t) = \Lambda\hat{y} + \hat{\zeta}(t), \quad t \in [0,\omega], \tag{2.15}$$

где $\Lambda = QAQ^{-1} = \mathrm{diag}\,(\{\lambda_i\}_{i=1}^n)$ — диагональная (n,n)-матрица.

Введем в рассмотрение еще один оператор периодических решений, действующий по правилу

$$\widetilde{\mathbb{P}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot) = \hat{y}(\cdot).$$

Учитывая, что $\hat{z}(\cdot) = \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)$, имеем

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{z}(\cdot) = Q^{-1}\hat{y}(\cdot) = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}\hat{\zeta}(\cdot) = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q\hat{\xi}(\cdot).$$

Таким образом, получаем

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} = Q^{-1}\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q.$$

Нас будет интересовать не сам оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$, а его ограничение на подпространство $\mathbb{D}^n$, т.е. $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}$.

После воздействия матрицей Q подпространство $\mathbb{D}^n$ будет обладать иной конструкцией. В новых координатах обозначим это подпространство через $\widetilde{\mathbb{D}}^n$ и опишем его формально

$$\widetilde{\mathbb{D}}^n = \left\{ \hat{\psi}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} | \quad \hat{\psi}(\cdot) = Q\hat{\phi}(\cdot) = q_n\hat{\phi}_n(\cdot), \quad \hat{\phi}(\cdot) \in \mathbb{D}^n \right\}.$$

Нас интересует оценка нормы $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma$

$$|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma \leqslant |||Q^{-1}|||_\Sigma\,|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma = |||Q^{-1}|||_\Sigma\,|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^n}|||_\Sigma.$$

Таким образом задачу оценки $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma$ можно свести к задаче оценки норм $|||Q^{-1}|||_\Sigma$ и $|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^n}|||_\Sigma = |||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}Q|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma$. Оценка нормы $|||Q^{-1}|||_\Sigma$ была получена в лемме 1.1.

Оценим норму $|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^n}|||_\Sigma$. Для этого рассмотрим каждое из n уравнений преобразованного уравнения (2.15) в отдельности

$$\dot{\hat{y}}_i(t) = \lambda_i\hat{y}_i + \hat{\zeta}_i(\cdot), \quad i \in \{1, ..., n\}, \quad t \in [0, \omega].$$

Учитывая, что $\hat{\zeta}_i(\cdot) = q_{i,n}\hat{\xi}_n(\cdot)$ это уравнение примет вид

$$\dot{\hat{y}}_i(t) = \lambda_i\hat{y}_i + q_{i,n}\hat{\xi}_n(\cdot), \quad i \in \{1, ..., n\}, \quad t \in [0, \omega]. \tag{2.16}$$

Из теоремы 1.3 видно, что максимальное по норме решение каждого из таких уравнений, при условии $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = m_n\|\hat{\xi}_n(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}} \le 1, \quad \hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{D}^n$, будет достигаться, в частности, при $\hat{\xi}(\cdot) \equiv (0, ..., 0, 1/m_n)'$. Тогда значение нормы каждого из n решений будет равно $\|\hat{y}_i(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{\omega,\Sigma}} = |q_{i,n}/\lambda_i m_n|, \quad i \in \{1, ..., n\}$. Таким образом заключаем, что норма оператора $\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}$ ограниченного на подпространстве $\widetilde{\mathbb{D}}^n$ будет достигаться при $\hat{\zeta}(\cdot) \equiv m_n^{-1} q_n$ и равна эта норма

$$|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^n}|||_\Sigma = m_n^{-1}\|\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}} q_n\|_\Sigma = \frac{1}{m_n}\Big(\Big|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\Big| + m_2\Big|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\Big| + \cdots + m_n\Big|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\Big|\Big).$$

На основе проведенных рассуждений сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.1 *Если все собственные значения λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$ матрицы A уравнения* (2.14) *принадлежат пространству $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1, то это уравнение индуцирует ограниченный на подпространстве $\mathbb{D}^n$ оператор периодических решений $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}$, для нормы $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma$ которого справедлива следующая оценка*

$$\begin{aligned}|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma \leqslant |||Q^{-1}|||_\Sigma|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^n}|||_\Sigma = m_n^{-1}|||Q^{-1}|||_\Sigma\|\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}} q_n\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = \\ = \max_{\eta \in M_1}\|Q^{-1}\eta\|_\Sigma\Big(\frac{1}{m_n}\Big|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\Big| + \frac{m_2}{m_n}\Big|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\Big| + \cdots + \Big|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\Big|\Big),\end{aligned} \qquad (2.17)$$

где матрица Q такая, что $QAQ^{-1} = \mathrm{diag}\,\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, q_n - последний столбец матрицы Q и множество M_1 состоит из $2n$ точек, которые определяются формулой (1.45). ■

Теперь можно привести оценку нормы оператора периодических решений $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^2}|||_{\Sigma}$ для двумерного уравнения (2.9). Сформулируем следствие приведенной теоремы.

Следствие 6 *Норма оператора* $|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^2}|||_{\Sigma}$ *имеет следующую оценку*

$$|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^2}|||_{\Sigma} \leqslant |||Q^{-1}|||_{\Sigma}\,|||\mathbb{J}\,\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{D}}^2}|||_{\Sigma} =$$

$$= \max\left\{1 + m_2|\lambda_1|; \frac{1}{m_2} + |\lambda_2|\right\} \frac{1}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\left(\frac{1}{m_2}\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|}\right). \blacksquare \qquad (2.18)$$

Отметим, что норма $|||Q^{-1}|||_{\Sigma}$ оценивается по правилу (2.13).

2.5 Условия существования единственного периодического решения для уравнений n-го порядка

В этом разделе будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейных уравнений вида (2.1).

Рассмотрим уравнения (2.2). Это уравнение будет представлено как n-мерное дифференциальные уравнения первого порядка и рассмотрено его ограничение на отрезке $[0, \omega]$

$$\dot{z}(t) = Az + f(t, z), \qquad (2.19)$$

где $z(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot), ..., z_n(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$, A — (n, n)-матрица, определенная формулой (2.6), функция $f(t, z)$ принимает вид

$$f(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \chi\Big(t, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n\Big) \end{pmatrix}. \qquad (2.20)$$

Для нормы $\|\cdot\|_{\Sigma^n}$ определим параметры $m_2, ..., m_n$. Для любых $z^1 = (z_1^1, ..., z_n^1)'$ и $z^2 = (z_1^2, ..., z_n^2)'$ из $\mathbb{R}^n$ и $t \in [0, \omega]$ в силу условия Липшица (2.3) будет справедлива следующая оценка

$$\|f(t,z^1) - f(t,z^2)\|_\Sigma = m_n|\chi(t,z^1) - \chi(t,z^2)| \leq m_n(l_1|z_1^1 - z_1^2| + l_2|z_2^1 - z_2^2| + ... + l_n|z_n^1 - z_n^2|).$$

Тогда положим

$$m_2 = \frac{l_2}{l_1} > 0, \quad m_3 = \frac{l_3}{l_1}, \cdots, m_n = \frac{l_n}{l_1}. \tag{2.21}$$

При таком выборе $m_2, ..., m_n$ получаем следующую оценку

$$\|f(t,z^1) - f(t,z^2)\|_\Sigma \leq l_n\|z^1 - z^2\|_\Sigma, \tag{2.22}$$

для любых z^1 и z^2 из $\mathbb{R}^n$. То есть для функции $f(t,z)$ относительно выбранной нормы, константа l_n является константой Липшица.

Определим оператор

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma} \to \mathbb{D}^n, \quad \hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)](t) = f(t, \hat{z}(t)), \quad t \in [0, \omega],$$

где $f(\cdot,\cdot)$ определяется формулой (2.20).

Теорема 2.2 *Пусть ω-периодическая функция $\chi(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в уравнении* (2.2) *удовлетворяет условию Липшица* (2.3) *с константами l_i, $i \in \{1, ..., n\}$, а коэффициенты a_i, $i \in \{0, ..., (n-1)\}$ выбраны так, что соответствующая матрица* (2.6) *имеет вещественные собственные значения, жордановы клетки таких собственных значений имеют единичную размерность, а m_i, $i = \{2, ..., n\}$ определяются по правилу* (2.21). *Если справедливо неравенство*

$$l_n \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma \Big(\frac{1}{m_n}\Big|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\Big| + \frac{m_2}{m_n}\Big|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\Big| + \cdots + \Big|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\Big| \Big) < 1, \tag{2.23}$$

где матрица Q такая, что $QAQ^{-1} = \mathrm{diag}\,\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, q_n - последний столбец матрицы Q и множество M_1 состоит из $2n$ точек, которые определяются формулой (1.45), *то существует ω-периодическое решение $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ уравнения* (2.2) *(соответственно, уравнения* (2.1)*). Такое решение является единственным.*

Более того, для любой начальной функции $\hat{z}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ последовательность $\hat{z}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)]$ стремится по норме $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ к функции $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$. Кроме этого, справедлива оценка сходимости

$$\|(\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq$$

$$\leq \Big\{l_n \max_{\eta\in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_\Sigma \Big(\frac{1}{m_n}\Big|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\Big| + \frac{m_2}{m_n}\Big|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\Big| + \cdots + \Big|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\Big|\Big)\Big\}^k \|\hat{z}^0(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}. \tag{2.24}$$

При этом ω-периодическим решением $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ задачи (2.2) *(соответственно, задачи* (2.1)*) является продолжение на всю числовую ось первой координаты $\hat{z}_1(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1),1}_{\omega,\Sigma}$ функции $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}_1(\cdot), \cdots, \hat{z}_n(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$. Такое решение является единственным.*

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)])(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{2.25}$$

В силу предложения 1.1, продолжение по периодичности ω на всю числовую ось всякого решения уравнения (2.25) задает периодическое решение уравнения (2.19) (соответственно, уравнения (2.1)) и наоборот. Так как правая часть уравнения (2.19) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (2.25) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$.

Величины $m_2, ..., m_n$ выбираются по правилу (2.21). Тогда для оператора $\hat{\mathbb{F}}$ при любых $\hat{y}^1(\cdot)$, $\hat{y}^2(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ справедливо неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^1(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^2(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq l_n \|\hat{y}^1(\cdot) - \hat{y}^2(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}.$$

В силу теоремы 2.1, для любых $\hat{y}^1(\cdot)$, $\hat{y}^2(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ выполняется следующая цепочка неравенств

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^1(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^2(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^1(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^2(\cdot)])\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq$$

$$\leq |||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_{\Sigma} \;\; \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^1(\cdot)] - \hat{\mathbb{F}}[\hat{y}^2(\cdot)]\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}} \leq$$

$$\leq \max_{\eta \in M_1} \|Q^{-1}\eta\|_{\Sigma} \Big(\frac{1}{m_n}\Big|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\Big| + \frac{m_2}{m_n}\Big|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\Big| + \cdots + \Big|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\Big|\Big) \; l_n \; \|\hat{y}^1(\cdot) - \hat{y}^2(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}}.$$

Следовательно получаем, что при выполнении условия (2.23) отображение $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$ будет сжимающим и существует единственная неподвижная точка $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,\Sigma}$ этого отображения. Решение $x(\cdot)$ исходного уравнения (2.1) из пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ получается периодическим продолжением на всю числовую ось первой координаты $\hat{z}_1(\cdot)$ вектор-функции $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}_1(\cdot), \cdots, \hat{z}_n(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(1),n}_{\omega,\Sigma}$.

Оценка сходимости (2.24) также легко получается из приведенной последовательности неравенств. Теорема доказана. ■

2.6 Условия существования единственного периодического решения для уравнений второго порядка

В этом разделе будет рассмотрен случай $n = 2$. Тогда уравнение (2.2) окажется уравнением второго порядка

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = \chi_0(t, x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.26}$$

где $\chi_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ — ω-периодическая по времени функция, а для коэффициентов $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$ (условие (2.12)).

Запишем условия Липшица для функции χ_0.

$$|\chi_0(t, x^1, y^1) - \chi_0(t, x^2, y^2)| \leqslant l_1|x^1 - x^2| + l_2|y^1 - y^2|,$$

$$\text{для любых } x^1, x^2, y^1, y^2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

Постоянные $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq 0$ являются константами Липшица.

Будут изучаться условия, которые необходимо наложить на a_0, a_1 и на функцию $\chi_0(\cdot,\cdot,\cdot)$, чтобы для уравнения (2.26) обеспечить существование единственного ω-периодического решения из класса непрерывно-дифференцируемых функций.

Рассмотрим уравнения (2.26), сразу представив его как двумерное дифференциальные уравнения первого порядка

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z} + f(t, \hat{z}), \tag{2.28}$$

где матрица A — $(2,2)$-матрица, определенная формулой (2.10), $\hat{z}(\cdot) =$

$(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(0);2}_{\omega,\Sigma}$, функция $f(\cdot,\cdot)$ принимает вид

$$f(t,\hat{z}) = f(t,\hat{z}_1,\hat{z}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_0(t,\hat{z}_1,\hat{z}_2) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Для нормы $\|\cdot\|_\Sigma$, определенной соотношением (1.41), весовой параметр m_2 положим равным

$$m_2 = \frac{l_2}{l_1} > 0.$$

Тогда нетрудно видеть, что относительно такой нормы для функции $f(\cdot,\cdot)$, в силу наличия условий Липшица (2.27), будет выполнено неравенство

$$\|f(t,\hat{z}^1) - f(t,\hat{z}^2)\|_\Sigma =$$
$$= m_2|\chi_0(t,\hat{z}_1^1,\hat{z}_2^1) - \chi_0(t,\hat{z}_1^2,\hat{z}_2^2)| \leqslant m_2(l_1|\hat{z}_1^1 - \hat{z}_1^2| + l_2|\hat{z}_2^1 - \hat{z}_2^2|) =$$
$$= m_2 l_1(|\hat{z}_1^1 - \hat{z}_1^2| + \frac{l_2}{l_1}|\hat{z}_2^1 - \hat{z}_2^2|) = m_2 l_1(|\hat{z}_1^1 - \hat{z}_1^2| + m_2|\hat{z}_2^1 - \hat{z}_2^2|) = l_2\|\hat{z}^1 - \hat{z}^2\|_\Sigma,$$

для любых $\hat{z}^1 = (\hat{z}_1^1, \hat{z}_2^1)'$ и $\hat{z}^2 = (\hat{z}_1^2, \hat{z}_2^2)'$ из $\mathbb{R}^2$. То есть для функции $f(\cdot,\cdot)$, относительно выбранной нормы, константа l_2 является константой Липшица.

Условие (2.23) теоремы 2.2 в случае $n = 2$ примет вид

$$|||\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}|_{\mathbb{D}^n}|||_\Sigma\, l_2 \leqslant \max\left\{1 + m_2|\lambda_1|; \frac{1}{m_2} + |\lambda_2|\right\} \frac{1}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\left(\frac{1}{m_2}\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|}\right) l_2 =$$
$$\max\left\{1 + \frac{l_2}{l_1}|\lambda_1|; \frac{l_1}{l_2} + |\lambda_2|\right\} \frac{1}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\left(\frac{l_1}{|\lambda_1|} + \frac{l_2}{|\lambda_2|}\right) < 1.$$

Таким образом, для случая $n = 2$ теорема 2.2 может быть уточнена. Сформулируем ее.

Теорема 2.3 *Пусть ω-периодическая функция $\chi_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ уравнения* (2.26) *удовлетворяет условию Липшица* (2.27) *с константами $l_1 > 0$ и $l_2 > 0$, $m_2 = l_2/l_1$, и пусть для параметров $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ выполнено условие $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Тогда если справедливо неравенство*

$$\max\left\{1+\frac{l_2}{l_1}|\lambda_1|; \frac{l_1}{l_2}+|\lambda_2|\right\}\frac{1}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{l_1}{|\lambda_1|}+\frac{l_2}{|\lambda_2|}\right) < 1, \qquad (2.30)$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются по формуле (2.11)*, то существует единственное ω-периодическое решение $x(\cdot)$ и $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ уравнения* (2.26).

Более того, для любой начальной функции $\hat{z}^0(\cdot) = (\hat{z}_1^0(\cdot), \hat{z}_2^0(\cdot))' \in \mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),2}$ последовательность $\hat{z}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)]$ стремится по норме $\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),2}$ к единственному ω-периодическому решению $\hat{z}(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(1),2}$ уравнения (2.28). *Более того, справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{z}^0(\cdot)] - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),2}} \leqslant$$

$$\left\{\max\left\{1+\frac{l_2}{l_1}|\lambda_1|; \frac{l_1}{l_2}+|\lambda_2|\right\}\frac{1}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{l_1}{|\lambda_1|}+\frac{l_2}{|\lambda_2|}\right)\right\}^k \|\hat{z}^0(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),2}}.$$

При этом ω-периодическим решением $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ задачи (2.26) *является продолжение на всю числовую ось первой координаты $\hat{z}_1(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),1}$ функции $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))' \in \mathbb{C}_{\omega,\Sigma}^{(0),2}$. Такое решение является единственным.* ■

В заключении этой главы отметим, что выражение, стоящее в левой части неравенства (2.23) ((2.30)) в теореме 2.2 (2.3), не зависит от периода ω. Поэтому, полученное единственное периодическое решение в случае автономных уравнений окажется стационарным состоянием. Такие решения гораздо легче получить приравняв правую часть уравнения (2.1) к нулю. Таким образом, полученные результаты имеют ценность лишь в случае неавтономных уравнений.

3 Вопросы существования периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

3.1 Введение. Постановка задачи

В работе будет рассматриваться функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad k \in \{0, 1, ...\}$ является 2π-периодической по времени. Решением уравнения (3.1) называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(.)$, удовлетворяющая уравнению. Так как правая часть уравнения принадлежит пространству $\mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$, $k \in \{0, 1, ...\}$, то всякое решение $x(\cdot)$ будет принадлежать пространству $\mathbb{C}^{(k+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Уравнение любого периода $\omega > 0$ может быть очевидным образом сведено к уравнению периода 2π. Будут сформулированы условия существования и единственности 2π-периодического решения $x(\cdot)$ уравнения (3.1) из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, описан итерационный процесс построения такого решения, а также указана скорость сходимости процесса. Важной особенностью полученных результатов является то, что условия сформулированы в терминах правой части и они могут быть легко проверены. Для формулировки таких результатов требуются дополнительные ограничения. Это связано с тем, что в случае функционально-дифференциального уравнения оценка (неулучшаемая оценка) нормы оператора периодического решения является проблематичным. Но при дополнительных условиях, пользуясь методами теории рядов Фурье, удается в явном виде построить ограничение оператора периодического решения на подпространство гладких функций. Таким образом, первое, правая часть должна быть из класса $\mathbb{C}^{(1)}$ (а не из класса $\mathbb{C}^{(0)}$) для того, чтобы разложение в ряд Фурье было правомерным. Второе, нам потребуются дополнительные условия на правую часть уравнения, которые будут гарантировать существование и единственность решения соответствующей задачи Коши.

В силу того, что целью исследований являются 2π-периодические решения, то, не нарушая общности, можем считать, что все отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ принадлежат $[0, 2\pi)$. Действительно. Если отклонения таковы, что $\tau_j \in [2\pi k, 2\pi(k+1))$, $j \in \{1, ..., s\}$, $k \in \mathbb{N}$, то вместо них можно положить отклонения равные $\overline{\tau}_j = \tau_j - 2\pi k$. Если отклонения таковы, что $\tau_j \in [-2\pi(k+1), -2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$, то вместо них можно положить отклонения равные $\overline{\tau}_j = \tau_j + 2\pi(k+1)$. Очевидно, что новое уравнение будет иметь те же 2π-периодические решения, что и исходное.

Кроме этого будем полагать, что отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ удовлетворяют условию соизмеримости. Это означает, что для любых $\tau_i,\ \ \tau_j,\quad i, j, \in \{1, ..., s\}$ должны существовать $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $n_1 + n_2 \neq 0$ и $n_1|\tau_i| = n_2|\tau_j|$.

Уравнение (3.1) может быть представлено в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t + \tau_j) + f(t, x(t + \tau_1), \cdots, x(t + \tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

где

$$a_j \in \mathbb{R}, \quad \tau_j \in [0, 2\pi), \quad j \in \{1, ..., s\},$$

$$f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) - \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j),$$

и отклонения $\tau_1, ..., \tau_s$ являются соизмеримыми. Данная работа посвящена изучению условий, накладываемых на $a_j, \quad \tau_j, \quad j \in \{1, ..., s\}$ и $f(\cdot)$, которые обеспечивают существование и единственность 2π-периодического решения.

Такой тип функционально-дифференциальных уравнений исследовался в работах автора монографии [9]. Получены условия, обеспечивающие существование и единственность решения из специального класса функций для задачи Коши

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

$$x(0) = \overline{x}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $g(\cdot)$ следующие

(I) $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n), \quad k \in \{0, 1, ...\}$;

(II) для всех t, x_j и $\overline{x}_j, \quad j = \{1, ..., s\}$

$$\|g(t, x_1, ..., x_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^{s} \|x_j\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Отметим, что второе неравенство является условием Липшица;

(III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}$ такое, что выражение

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} M_0(t+i)(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна;

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,...,z_s}(t) = g(t+i, z_1, ..., z_s)(\mu^*)^{|i|}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (z_1, ..., z_s) \in \mathbb{R}^{n\times s}$$

на любом конечном интервале равностепенно непрерывно.

Очевидно, что в силу периодичности функции $g(\cdot)$ правой части (3.1), условия (III) будет выполняться автоматически, поэтому всюду далее будем считать, что $\mu^* = 1$.

Определим пространство

$$\mathcal{L}^n_\mu \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R}) = \{x(\cdot)| \quad x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \max_{0\le r\le k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)e^{-\delta|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty, \}$$

где $k \in \{0, 1, ...\}$ и $\mu = e^{-\delta}$.

Теорема 3.1 *[9] Если функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (I)-(IV) и для некоторого $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$L_g \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{3.5}$$

то для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ задачи Коши (3.3)- (3.4). *Такое решение является единственным и, более того, принадлежит классу* $\mathcal{L}^n_\mu \mathbb{C}^{(k+1)}(\mathbb{R})$.■

В случая, когда функция $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad k \in \{0, 1, ...\}$ в правой части уравнения (3.3) является ω-периодической, мы можем переформулировать данную теорему в виде следствия.

Следствие 7 *[9] Пусть функция* $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n), \quad k \in \{0, 1, ...\}$ *в уравнении* (3.3) *является ω-периодической по времени. Если функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (II) и (IV) и для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполняется неравенство* (3.5), *то для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ задачи Коши* (3.3)-(3.4). *Такое решение является единственным и, более того, принадлежит классу* $\mathcal{L}^n_\mu \mathbb{C}^{(k+1)}(\mathbb{R})$. ■

Рассмотрим пространство функций

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \big\{ f(.) : f(.) \text{ удовлетворяет условиям (I)-(III) } \big\}.$$

Для всех функций из $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (III). В пространстве $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ можно ввести Липшицеву норму

$$\|g(\cdot)\|_{L_{ip}} = \sup_{t\in R} \|f(t, 0, \dots, 0)e^{-\delta^*|t|}\|_{R^n} +$$

$$+ \sup_{t, z_1, \dots, z_s, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns}\times\mathbb{R}^{ns}} \frac{\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{R^n}}{\sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{R^n}}, \qquad \mu^* = e^{-\delta^*}.$$

Очевидно, что для функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы M_2 из условия Липшица (условие (II) данного параграфа), совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $f(.)$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой M_2 будем понимать именно такое её наименьшее значение. Правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахова пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Чтобы указать на зависимость решения задачи Коши (3.3)-(3.4) от начального значения $\bar{x}$, а также от самой правой части $g(.)$ функционально-дифференциального уравнения, будем пользоваться обозначением $x(t; \bar{t}, \bar{x}, g)$. Под непрерывной зависимостью решения $x(.)$ мы будем понимать его непрерывную зависимость по переменным $t, \varphi, g \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.2 (теорема о "грубости") *[9] В теореме 3.1 и следствии 7 решение основной задачи Коши* (3.3)-(3.4) *непрерывно зависит от переменных* $t, \bar{x}, g$. ■

В теореме 3.2 о непрерывной зависимости от начального условия $\bar{x}$ и правой части $g(\cdot)$ дифференциального уравнения можно сказать большее.

Замечание 1 *[9] В теореме 3.2 решение, как элемент пространства* $\mathcal{L}_\mu^n\mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ *непрерывно зависит от* $\bar{x}$ *и* $g(\cdot)$. ■

Так как в дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с периодическими функциями, когда это будет возможно вместо пространств $\mathcal{L}_\mu^n\mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ будут использоваться обычные пространства непрерывных функций $\mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\quad k \in \{0, 1, ...\}$.

3.2 Свойства периодических решений для линейного однородного уравнения

Здесь будут установлены некоторые свойства для линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, которые будут необходимы в дальнейшем.

Рассмотрим однородное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $\tau_j \in [0, 2\pi)$, $\quad j \in \{1, ..., s\}$.

Нам следует описать область всех тех $(a_1, ..., a_s, \tau_1, \cdots, \tau_s) \in \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$, при которых для однородного уравнения (3.6) существует только лишь нулевое периодическое решение. Другими словами сформулируем условия нерезонансности.

Лемма 3.1 *Однородное уравнение* (3.6) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение тогда и только тогда, когда для набора параметров* $(a_1, \cdots a_s, \tau_1, \cdots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *одновременно будут выполняться условия*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0; \qquad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0.$$

Такое 2π*-периодическое решение является тривиальным. В противном случае однородное уравнение* (3.6) *будет иметь бесконечное число* 2π*-периодических решений.*

`Доказательство.` Учитывая, что решения однородного уравнения (3.6), в частности, принадлежат пространству $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, любая i-ая координата $i \in \{1, ..., n\}$ произвольного 2π-периодического решения на интервале $[0, 2\pi]$ может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье

$$x_i(t) = \alpha_{i,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,2k-1} \cos kt + \alpha_{i,2k} \sin kt, \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Подставим это представление в уравнение (3.6) и приравняем коэффициенты при соответствующих базисных функциях. Получим, что для любыхо $i \in \{1, ..., n\}$, $k = 1, 2, ...$ должны выполняться равенства

$$1: \quad -\alpha_{i,0} \sum_{j=1}^{s} a_j = 0$$

$$\cos kt: \quad -\alpha_{i,2k-1} \sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j + \alpha_{i,2k}(k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j) = 0$$

$$\sin kt: \quad \alpha_{i,2k-1}(-k + \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j) - \alpha_{i,2k} \sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j = 0.$$

Следовательно, для существования ненулевого 2π-периодического решения уравнения (3.6) необходимо и достаточно, чтобы, либо выполнялось равенство $\sum_{j=1}^{s} a_j = 0$, либо выполнялось равенство $detA_k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, где

$$A_k = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j & k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j \\ -k + \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j & -\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$detA_k = (\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j)^2 + (k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j)^2,$$

откуда и следует доказательство леммы.■

Если правая часть уравнения (3.6) состоит только из одного слагаемого, т.е. имеет вид

$$\dot{x}(t) = ax(t+\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

то полученный результат может быть уточнен. В этом случае видно, что $detA_k = a^2 + k^2 - 2ak\sin k\tau, \quad k \in \mathbb{N}$ и приведенное выражение может равняться 0, если, либо $a = k$ и $\sin k\tau = 1$, либо $a = -k$ и $\sin k\tau = -1$. На основе проведенных рассуждений сформулируем еще одну лемму. Для этого введем в рассмотрение следующую систему множеств

$$H_k = \Big\{(a,\tau)\Big| \quad a = k, \quad \tau = \frac{\pi}{2k} + 2\pi\frac{j}{k}, \quad j \in \{0,...,k-1\}\Big\},$$

$$H_{-k} = \Big\{(a,\tau)\Big| \quad a = -k, \quad \tau = \frac{3\pi}{2k} + 2\pi\frac{j}{k}, \quad j \in \{0,...,k-1\}\Big\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3.2 *Однородное уравнение* (3.7) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение тогда и только тогда, когда* $a \neq 0$ *и набор параметров* $(a,\tau) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi)$ *не принадлежит счетному множеству* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(H_k \cup H_{-k})$. *Такое решение является тривиальным. В противном случае уравнение будет иметь бесконечное число* 2π*-периодических решений.*■

3.3 Свойства периодических решений для линейного неоднородного уравнения

Здесь будут приведены некоторые общие, хорошо известные для обыкновенных дифференциальных уравнений свойства периодических решений, которые будут необходимы для дальнейших рассуждений. Аналогичные результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в первой главе данной работы в разделе 1.1.2 (Свойства периодических решений).

Для уравнения общего вида (3.1) сформулируем простое, но очень важное утверждение.

Предложение 3.1 *Пусть выполнены условия следствия 7, тогда решение* $x(\cdot)$ *уравнения* (3.1) *является* 2π*-периодическим тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство* $x(0) = x(2\pi)$.

`Доказательство.` Доказательство этого утверждения легко вытекает из 2π-периодичности функции $g(\cdot)$ по t и выполнения условия существования и единственности решения задачи Коши (3.3)-(3.4) (Следствие 7). ■

Перейдем к рассмотрению линейного неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t + \tau_j) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $\tau_j \in [0, 2\pi)$, $j \in \{1, ..., s\}$, $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ - 2π-периодическая функция. Наряду с ним будем рассматривать также и соответствующее линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t + \tau_j), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Условия (I)-(IV) для правых частей уравнений (3.8) и (3.9), очевидно, будут выполнены. Определим константу

$$M = \max_{1 \le j \le s} |a_j|.$$

Теорема 3.3 *[1] Пусть для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполнено неравенство* (3.5), *принимающее вид*

$$M\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|\tau_j|} < \ln\mu^{-1}.$$

Тогда, чтобы для неоднородного уравнения (3.8) *существовало единственное 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы единственным 2π-периодическим решением однородного уравнения* (3.9) *была функция, тождественно равная нулю.*

`Доказательство.` Прежде чем приступить к доказательству, введем в рассмотрение матрицу фундаментальных решений $\phi(t)$. Она является решением матричного уравнения с начальным условием

$$\dot{\phi}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j\phi(t+\tau_j), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\phi(0) = \mathbb{I}.$$

Существование такой матрицы фундаментальных решений вытекает из следствия 7. В силу того же следствия 7, любое решение однородного уравнения (3.9) представимо в виде $x(t) = \phi(t)x(0)$, а произвольное решение неоднородного уравнения (3.8) имеет представление $x(t) = \phi(t)x(0) + \psi(t)$, где $\psi(t)$ -частное решение уравнения (3.8) с начальными условиями $\psi(0) = 0$. Используя это, приступим непосредственно к доказательству теоремы.

`Достаточность.` Пусть тривиальное решение является единственным 2π-периодическим решением однородного уравнения (3.9). Тогда из предложения 3.1 и из того, что для решений однородного уравнения (3.9) справедливо представление $x(2\pi) = \phi(2\pi)x(0)$ получаем, что единственным решением уравнения $x = \phi(2\pi)x$ должно быть $x = 0$. Следовательно $det\,(\mathbb{I} - \phi(2\pi)\,) \neq 0$. С другой стороны, для произвольного решения неоднородного уравнения (3.8) справедливо равенство $x(2\pi) = \phi(2\pi)x(0) + \psi(2\pi)$. Так как для периодического решения выполнено условие $x(0) = x(2\pi)$, задача нахождения периодического решения неоднородного уравнения сводится к решению уравнения $(\mathbb{I} - \phi(2\pi))x = \psi(2\pi)$. Так как $det\,(\mathbb{I} - \phi(2\pi)\,) \neq 0$, то получим единственность 2π-периодического решения неоднородного уравнения (3.8).

`Необходимость.` Пусть для неоднородного уравнения (3.8) существует единственное 2π-периодическое решение. Доказательство проведем от противного. Предположим, что однородного уравнения (3.9) помимо нулевого есть как минимум еще одно 2π-периодическое решение. Из этого следует, что $det\,(\mathbb{I}-\phi(2\pi)\,) = 0$. В таком случае, уравнение $(\mathbb{I}-\phi(2\pi)\,)x = \psi(2\pi)$ либо не будет иметь решений, либо будет иметь бесконечное число решений, что противоречит единственности 2π-периодического решения неоднородного уравнения (3.8). Теорема доказана. ■

При доказательстве теоремы мы выяснили, что, при существовании ненулевого периодического решения для однородное уравнение (3.9), соответствующее неоднородное уравнение (3.8) может иметь, либо бесконечное число периодических решений, либо не иметь их вовсе. Для иллюстрации рассмотрим пример простейшего одномерного обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = \xi(t)$. Для него $a_j \equiv 0, \quad j = \{1, ..., s\}$ и соответствующее линейное уравнение примет вид $\dot{x} = 0$. То есть линейное уравнение имеет бесконечное число периодических решений $x(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогда в качестве $\xi(t)$ рассмотрим функцию $\xi(t) \equiv 1$. В этом случае семейство решений будет иметь вид $x(t) = t + C$, $C \in \mathbb{R}$, т. е. периодических решений у этого уравнения не будет. С другой стороны, если положить $\xi(t) = \cos t$, то решения уравнения примут вид $x(t) = \sin t + C$, $C \in \mathbb{R}$, т. е. все решения являются периодическими.

Теперь, на основе теоремы 3.3 и леммы 3.1 можно сформулировать следствие, уточняющее теорему 3.3.

Следствие 8 *Пусть для некоторого* $\mu \in (0,1)$ *справедливо неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln \mu^{-1}. \tag{3.10}$$

Неоднородное уравнение (3.8) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение тогда и только тогда, когда для набора параметров* $(a_1, \cdots a_s, \tau_1, \cdots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times \ldots \times [0, 2\pi)$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *одновременно будут выполнены условия*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \quad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0. \blacksquare$$

Отдельно рассмотрим случай с одним слагаемым в правой части. Неоднородное уравнение (3.8) преобразуется в уравнение вида

$$\dot{x}(t) = ax(t + \tau) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 2\pi)$, $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$ является 2π-периодической функцией.

Следствие 9 *Пусть для некоторого* $\mu \in (0,1)$ *выполнено неравенство*

$$a\mu^{-|\tau|} < \ln \mu^{-1}. \tag{3.12}$$

Тогда неоднородное уравнение (3.11) *имеет единственное* 2π*-периодическое решение тогда и только тогда, когда* $a \neq 0$ *и набор параметров* $(a,\tau) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi)$ *не принадлежит счетному множеству* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(H_k \cup H_{-k})$.■

3.4 Оператор периодических решений

Вернемся к рассмотрению линейного неоднородного уравнения (3.8), переписав его еще раз

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, отклонения $\tau_j \in [0,2\pi), \quad j \in \{1,...,s\}$ являются соизмеримыми, а $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \quad k \in \{0,1,...\}$ задает 2π-периодическую функцию. Будем рассматривать также и соответствующее линейное однородное уравнение (3.9)

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Рассматриваются такие однородные уравнения (3.14), для которых параметры

$$(a_1, \cdots a_s, \tau_1, \cdots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0,2\pi) \times ... \times [0,2\pi),$$

удовлетворяют условиям следствия 8. Каждое такое однородное уравнение определяет оператор $\mathbb{P}$ периодических решений следующим образом:
в силу следствия 8, при каждой 2π-периодической функции $\xi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$,

$k \in \{0, 1, ...\}$ следует положить $\mathbb{P}\xi(\cdot) = x(\cdot)$, где $x(\cdot)$ является 2π-периодическим решением соответствующего линейного неоднородного уравнения (3.13) (более того, $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$). При каждом $k = 0, 1, ...$ определим пространства

$$\mathbb{C}_{2\pi}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \Big\{ x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \Big| \quad x^{(j)}(t) = x^{(j)}(t+2\pi), \quad j = 0, ..., k, \quad t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Следовательно, при каждом $k = 0, 1, ...$ определен линейный оператор

$$\mathbb{P}: \mathbb{C}_{2\pi}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(k+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \mathbb{P}\xi(\cdot) = x(\cdot). \tag{3.15}$$

Легко видеть, что действие оператора $\mathbb{P}$ является взаимнооднозначным. При операторе $\mathbb{P}$ мы не будем ставить индекс k, так как это не приводит к недоразумению. Более того, оператор $\mathbb{P}$ для $k \in \{1, 2, ...\}$ является сужением аналогичного оператора при индексе $(k-1)$.

При каждом $k = 0, 1, ...$ определим пространства

$$\mathbb{C}_{2\pi}^{(k),n} = \Big\{ x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(k)}([0, 2\pi], \mathbb{R}^n) \Big|, \quad x^{(j)}(0) = x^{(j)}(2\pi), \quad j = 0, ..., k \Big\}.$$

Норму в этих пространствах введем такую же как в $\mathbb{C}^{(k)}([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$. В силу предложения 3.1, примененного к неоднородному уравнению (3.14), оператор периодических решений $\mathbb{P}$ находится во взаимно однозначном соответствии со своим ограничением на интервал $[0, 2\pi]$ и при каждом $k = 0, 1, ...$ имеет вид

$$\hat{\mathbb{P}}: \mathbb{C}_{2\pi}^{(k),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(k+1),n}, \quad \hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{3.16}$$

Пусть $\mathbb{J} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(k+1),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(k),n}, \quad k = 0, 1, ...$ оператор естественного вложения. В дальнейшем, под оператором периодических решений будем подразумевать линейный оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(k),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(k),n}, \quad k = 0, 1, \ldots$. Очевидно, что действие оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ является взаимнооднозначным.

Предложение 3.2 *Пусть для некоторого*

$\mu \in (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln\, \mu^{-1},$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$ *одновременно будут выполнены условия*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \quad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0.$$

Тогда оператор

$$\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}, \quad \hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot) = \hat{x}(\cdot). \tag{3.17}$$

является непрерывным.

`Доказательство.` Оно непосредственно следует из теоремы 3.2 и следствия 1. ■

Одной непрерывности оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ недостаточно. Нам потребуется еще и точная оценка нормы такого оператора. Однако, оценка нормы такого оператора затруднительна. В действительности нам будет достаточно иметь оценки, полученные для сужения рассматриваемого оператора на подпространство 2π-периодических функций класса $\mathbb{C}^{(1)}$. Для этого определим величины

$$\mathbb{A} = \frac{1}{|\sum_{j=1}^{s} a_j|}, \qquad \mathbb{D} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k}}, \tag{3.18}$$

$$\det A_k = \Big(\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j\Big)^2 + \Big(k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j\Big)^2, \quad k = 1, 2, \dots \,. \tag{3.19}$$

Предложение 3.3 *Пусть для некоторого*

$\mu \in (0,1)$ *справедливо неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln\, \mu^{-1},$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$ *одновременно будут выполнены условия*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \quad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0.$$

Тогда

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} = 1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}.$$

`Доказательство.` Доказательство проведено для одномерного случая. То, что результат справедлив и для n-мерного случая вытекает из того, что система (3.13) состоит из n независимых одномерных уравнений. Детальное доказательство этого факта будет приведено в конце пункта 4.

1. *Построение оператора* $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ *в явном виде (*$n = 1$ *одномерный случай).* Используя ряды Фурье, построим оператор $(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}})^{-1}$. Разложим в ряд Фурье периодическое решение $\hat{x}(\cdot)$ уравнения (3.13) и функцию $\hat{\xi}(\cdot)$ из правой части этого уравнения

$$\hat{x}(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1} \cos kt + \alpha_{2k} \sin kt$$

$$\hat{\xi}(t) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k-1} \cos kt + \beta_{2k} \sin kt.$$

Тогда

$$\hat{\xi}(t) = ((\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}})^{-1}\hat{x}(\cdot))(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \sum_{j=1}^{s} a_j \hat{x}(\,(t+\tau_j)(mod\,2\pi)\,)$$

или, подставляя вместо соответствующих функций их разложения в ряды Фурье и приравнивая коэффициенты при соответствующих базисных функциях получаем

$$\beta_0 = -\alpha_0 \sum_{j=1}^{s} a_j$$

$$\beta_{2k-1} = -\alpha_{2k-1} \sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j + \alpha_{2k}(k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j)$$

$$\beta_{2k} = \alpha_{2k-1}(-k + \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j) - \alpha_{2k} \sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты β_{2k-1} и β_{2k} определяются из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} \beta_{2k-1} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} \alpha_{2k-1} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix},$$

где A_k, как и в разделе выше, матрица вида

$$A_k = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j & k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j \\ -k + \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j & -\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для определения оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ в явном виде необходимо обратить матрицу A_k. Из условий предложения следует, что такие матрицы являются невырожденными и поэтому справедливы равенства

$$\alpha_0 = -\frac{\beta_0}{\sum_{j=1}^{s} a_j}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2k-1} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix} = A_k^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{2k-1} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det A_k} \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^s a_j \cos k\tau_j & -k + \sum_{j=1}^s a_j \sin k\tau_j \\ k - \sum_{j=1}^s a_j \sin k\tau_j & -\sum_{j=1}^s a_j \cos k\tau_j \end{pmatrix}.$$

Таким образом оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ в явном виде принимает вид

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot))(t) = -\frac{\beta_0}{\sum_{j=1}^s a_j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k} \Big\{ \Big(-\beta_{2k-1} \sum_{j=1}^s a_j \cos k\tau_j +$$

$$+\beta_{2k}(-k+\sum_{j=1}^s a_j \sin k\tau_j) \Big) \cos kt + \Big(\beta_{2k-1}(k-\sum_{j=1}^s a_j \sin k\tau_j) - \beta_{2k} \sum_{j=1}^s a_j \cos k\tau_j \Big) \sin kt \Big\}.$$

2.*Мажорирование нормы* $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}}, \quad \hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),1}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} \leq 1.$

Для вывода оценок, сформулированных в предложении 3.3 нам следует решить следующую экстремальную задачу:

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} \to \sup_{\hat{\xi}(\cdot)} \tag{3.20}$$

при условии

$$\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),1}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} \leq 1. \tag{3.21}$$

Для этого воспользуемся явным видом действия оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ на функциях $\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),1}, \quad \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} = 1$, полученный в предыдущем пункте доказательства. В начале покажем справедливость оценки

$$\frac{1}{\det A_k} \Big\{ \Big(-\beta_{2k-1} \sum_{j=1}^s a_j \cos k\tau_j + \beta_{2k}(-k + \sum_{j=1}^s a_j \sin k\tau_j) \Big) \cos kt +$$

$$+\Big(\beta_{2k-1}(k-\sum_{j=1}^{s}a_j\sin k\tau_j)-\beta_{2k}\sum_{j=1}^{s}a_j\cos k\tau_j\Big)\sin kt\Big\}\le\frac{\sqrt{\beta_{2k-1}^2+\beta_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Действительно. Введем обозначения

$$\Gamma_k=\Big(-\beta_{2k-1}\sum_{j=1}^{s}a_j\cos k\tau_j+\beta_{2k}(-k+\sum_{j=1}^{s}a_j\sin k\tau_j)\Big),$$

$$\Delta_k=\Big(\beta_{2k-1}(k-\sum_{j=1}^{s}a_j\sin k\tau_j)-\beta_{2k}\sum_{j=1}^{s}a_j\cos k\tau_j\Big),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Легко проверить, что

$$\Gamma_k^2+\Delta_k^2=\det A_k(\beta_{2k-1}^2+\beta_{2k}^2),\quad k\in\mathbb{N}.$$

В новых обозначениях левая часть доказываемого неравенства примет вид

$$\frac{\Gamma_k\cos kt+\Delta_k\sin kt}{\det A_k}.$$

Преобразовывая полученное выражение, получим

$$\frac{1}{\det A_k}(\Gamma_k\cos kt+\Delta_k\sin kt)=\frac{\sqrt{\Gamma_k^2+\Delta_k^2}}{\det A_k}(\cos\theta_k\cos kt+\sin\theta_k\sin kt)=$$

$$=\frac{\sqrt{\Gamma_k^2+\Delta_k^2}}{\det A_k}\cos(\theta_k-kt)=\frac{\sqrt{\beta_{2k-1}^2+\beta_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}}\cos(\theta_k-kt),$$

где

$$\cos\theta_k=\frac{\Gamma_k}{\sqrt{\Gamma_k^2+\Delta_k^2}},\quad \sin\theta_k=\frac{\Delta_k}{\sqrt{\Gamma_k^2+\Delta_k^2}}.$$

Очевидно, что такое выражение достигает своего максимума при тех t, при которых $\cos(\theta_k-kt)=1$. Это и доказывает оценку.

Таким образом, для всякой функций $\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),1}$, $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}}=1$ норма $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}}$ мажорируется следующим образом

$$\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}}\le\Big|\frac{\beta_0}{\sum_{j=1}^{s}a_j}\Big|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\beta_{2k-1}^2+\beta_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}}.\qquad(3.22)$$

Ниже будет показано, что ряд в правой части полученного неравенства сходится.

3.*Вспомогательная экстремальная задача для оценки нормы* $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{2\pi}}$. Решение такой задачи трудное. Такую задачу мы можем заменить на более простую. Для этого значение нормы $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_{2\pi}}$ заменим новым функционалом в виде правой части из неравенства (3.22), а новый функционал будем максимизировать на более широком множестве функций $\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi],\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\pi}$. Такая экстремальная задача формулируется следующим образом:

$$\Big|\frac{\beta_0}{\sum_{j=1}^{s} a_j}\Big| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\beta_{2k-1}^2 + \beta_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}} \to \sup_{\beta_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \tag{3.23}$$

при условии

$$\|\hat{\xi}(\cdot)\|_{L_2([0,2\pi],\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\pi}. \tag{3.24}$$

Очевидно, что при этом значение функционала на решении задачи (3.23)-(3.24) больше чем значение функционала на решении задачи (3.20)-(3.21). По равенству Парсеваля относительно ортогонального базиса $\{1, \cos kt, \sin kt\}_{k\in\mathbb{N}}$ пространства $L_2([0,2\pi],\mathbb{R})$

$$\|\xi(\cdot)\|^2_{L_2[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} \hat{\xi}^2(t)dt = 2\pi\beta_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2.$$

В таком случае, экстремальную задачу (3.23)-(3.24) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\Big|\frac{\beta_0}{\sum_{j=1}^{s} a_j}\Big| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\beta_{2k-1}^2 + \beta_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}} \to \sup_{\beta_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

при условии

$$\beta_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2 \leq 1.$$

4.*Завершение доказательства предложения.*

Введем в рассмотрение пространство числовых последовательностей l_2. Рассмотрим элементы этого пространства r_1 и r_2, которые определяются по правилу

$$r_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}|\sum_{j=1}^{s} a_j|}, \frac{1}{\sqrt{\det A_1}}, \frac{1}{\sqrt{\det A_2}}, ... \right\},$$

$$r_2 = \left\{ \sqrt{2}|\beta_0|, \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \sqrt{\beta_3^2 + \beta_4^2}, ... \right\}.$$

Легко видеть, что r_2 принадлежит пространства l_2, т.к. для достаточно больших k имеет место $\frac{1}{\det A_k} = O(\frac{1}{k^2})$ и выполнено неравенство $\|r_2\|_{l_2} < +\infty$. Задача оптимизации (3.4)-(3.4) в новых терминах будет иметь следующий вид:

$$(r_1, r_2)_{l_2} \to \sup_{r_2 \in l_2}$$

при условии

$$\|r_2\|_{l_2}^2 \leq 2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем следующее ограничение сверху

$$(r_1, r_2)_{l_2} \leq \|r_1\|_{l_2} \|r_2\|_{l_2} \leq \sqrt{2} \|r_1\|_{l_2}.$$

Вычислим норму r_1.

$$\|r_1\|_{l_2}^2 = \frac{1}{2(\sum_{j=1}^{s} a_j)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k}.$$

Известно, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается в случае коллинеарности векторов. Следовательно, если подобрать такие

$\bar{\beta}_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, при которых вектор r_2 будет коллинеарен вектору r_1 и будет выполнено неравенство $\|r_2\|_{l_2} \leq \sqrt{2}$, исходная задача максимизации будет решена. Очевидно, такие $\bar{\beta}_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют. В таком случае, целевой функционал (3.4) в точке максимума принимает значение

$$\Big|\frac{\bar{\beta}_0}{\sum_{j=1}^{s} a_j}\Big| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\bar{\beta}_{2k-1}^2 + \bar{\beta}_{2k}^2}}{\sqrt{\det A_k}} = \sqrt{\frac{1}{(\sum_{j=1}^{s} a_j)^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k}} = \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2},$$

что и доказывает предложение в одномерном случае. Приведем доказательство предложения в многомерном случае. Пусть $\hat{\xi}(\cdot) = (\hat{\xi}_1(\cdot), ..., \hat{\xi}_n(\cdot))' \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$. Для оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ справедлива оценка

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} =$$

$$= \sup_{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1} \Big(\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}_1 \hat{\xi}_1(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} + ... + \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}_1 \hat{\xi}_n(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} \Big) \leq$$

$$\leq \sup_{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1} \Big((\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2) \|\hat{\xi}_1(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} + ... + (\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2) \|\hat{\xi}_n(\cdot)\|^2_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),1}} \Big) =$$

$$= (\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2),$$

где через $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}_1$ обозначен оператор периодических решений в одномерном случае. Следовательно для многомерного случая также получим оценку

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq 1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}.$$

Предложение доказано. ■

Для случая простейшей линеаризации с одним единственным слагаемым в линейном части получим уточненный результат. Речь идет об однородном (3.11) и соответствующем неоднородном (3.7) линейных уравнениях. В этом случае

$$\mathbb{A} = \frac{1}{|a|}, \qquad \mathbb{D} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k}}, \quad \det A_k = \Big(a^2 + k^2 - 2ak \sin k\tau\Big).$$

Следствие 10 *Пусть для некоторого $\mu \in (0,1)$ выполнено неравенство*

$$a\mu^{-|\tau|} < \ln\, \mu^{-1}$$

и

$$a \neq 0, \quad (a,\tau) \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (H_k \cup H_{-k}).$$

Тогда

$$\sup_{\hat{\xi}(\cdot)\in\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}, \|\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}=1} \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\xi}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2\mathbb{D}^2}. \tag{3.25}$$

Замечание 2 *В случае $\tau = 0$ линейное неоднородное функционально-дифференциальное уравнение* (3.7) *становится обыкновенным дифференциальным уравнением. В этом случае вместо предложения 3.3 можно применить результат теоремы 1.4, в которой показано, что для нормы оператора $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n} \to \mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$ имеет место равенство $\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\| = \frac{1}{|a|}$.* ■

По всей видимости, оценка (3.25) может быть улучшена и при других значениях параметра $\tau \in (0, 2\pi)$, но этот вопрос пока остается открытым.

3.5 Существование и единственность 2π-периодического решения для нелинейного уравнения. Случай простейшей линеаризации.

В данном заключительном разделе будут получены условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений для нелинейного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3.1), в котором $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ является 2π-периодической функцией. Наряду с уравнением (3.1) будем рассматривать и уравнение (3.2), полученное из уравнения (3.1) путем процедуры линеаризации. Если функция $g(.)$ из уравнения (3.1) удовлетворяет условию Липшица с константой L_g

$$\|g(t, x_1, ..., x_s) - g(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L_g \sum_{j=1}^{s} \|x_j - \overline{x}_j\|_{\mathbb{R}^n},$$

то в уравнении (3.2) функция f

$$f(.) = g(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)) - \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j) \qquad (3.26)$$

также будет удовлетворять условию Липшица с некоторой константой L_f. С каждой линеаризацией уравнения (3.1) связана линейная неоднородная система

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} a_j x(t+\tau_j) + \xi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (3.27)$$

В свою очередь, если для набора $(a_1, \cdots a_s, \tau_1, \cdots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s \times [0, 2\pi) \times ... \times [0, 2\pi)$ выполняются условия следствия 8, то корректно определен оператор $\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}$. Определим оператор

$$\mathbb{F}: \mathbb{C}^{(k)}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^{(k)}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad k = 0, 1,$$

$$\mathbb{F}[x(\cdot)](t) = f(t, x(t+\tau_1), \cdots, x(t+\tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ограничение этого оператора на функции определенные на отрезок $[0, 2\pi]$ будет обозначаться через $\hat{\mathbb{F}}$

$$\hat{\mathbb{F}} : \mathbb{C}^{(k),n}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{(k),n}_{2\pi}, \quad k = 0, 1,$$

$$\hat{\mathbb{F}}[\hat{x}(\cdot)](t) = f(t, \hat{x}(\,(t+\tau_1)(mod\,2\pi)\,), \cdots, \hat{x}(\,(t+\tau_s)(mod\,2\pi)\,)\,), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Теорема 3.4 *Пусть:*

в нелинейном уравнении (3.1) *функция* $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times s}, \mathbb{R}^n)$ *является* 2π*-периодической функцией и удовлетворяет условию Липшица* (3.5)*, а* L_f*, соответственно, константа Липшица функции* $f(\cdot)$*;*

для некоторого $\mu \in (0, 1)$ *выполнено неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|\tau_j|} < \ln\, \mu^{-1}, \quad M = \max_{1\le j\le s} |a_j|;$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ *одновременно справедливы условия*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \neq 0, \quad |\sum_{j=1}^{s} a_j \cos k\tau_j| + |k - \sum_{j=1}^{s} a_j \sin k\tau_j| \neq 0.$$

Если справедливо условие

$$sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1, \tag{3.28}$$

то для уравнения (3.1) *существует* 2π*-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству* $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*.*

Более того, для любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2),n}_{2\pi}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к единственной функции* $\hat{x}(\cdot) \in$

$\mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$, *и справедлива оценка сходимости:*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}\leq\Big(sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2+2\mathbb{D}^2}\Big)^k\|\hat{x}^0(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}. \quad (3.29)$$

Периодическое решение $x(\cdot)\in\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем продолжения ее по периодичности* 2π *на всю числовую ось* $\mathbb{R}$. ■

`Доказательство.` В пространстве $\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}$ определим операторное уравнение

$$(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{x})(\cdot)])(\cdot)=\hat{x}(\cdot). \quad (3.30)$$

В силу следствия 8, продолжение по периодичности 2π на всю числовую ось всякого решения уравнения (3.30) задает периодическое решение уравнения (3.2) (соответственно, уравнения (3.1)) и наоборот. Так как $g(\cdot)\in\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s},\mathbb{R}^n)$, то каждое решение уравнения (3.30) будет принадлежать пространству $\mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$.

Из условия Липшица для функции $f(\cdot)$ следует неравенство

$$\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}\leq sL_f\|\hat{y}(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}.$$

В силу предложения 3.3, для любых $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)\in\mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}=\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)])\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}=\\&=\|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\Big(\frac{\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]}{\|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|}\Big)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}\leq\sqrt{\mathbb{A}^2+2\mathbb{D}^2}\ \ \|\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)]-\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}\leq\\&\leq sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2+2\mathbb{D}^2}\ \ \|\hat{y}(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Из неравенства (3.31) несложно получить фундаментальность последовательности $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$ для любой функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(1),n}$. По предложению 3.2 оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}$ непрерывен и, соответственно, непрерывен оператор $\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}$. Поэтому всякая фундаментальная последовательность $(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot)$ сходится к неподвижной точке уравнения (3.30). Остается показать, что для уравнения (3.30) неподвижная точка единственная. Мы уже отмечали, что каждая неподвижная точка уравнения (3.30) принадлежит пространству $\mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$. Если $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)$ различные неподвижные точки уравнения (3.30), то, в силу неравенства (3.31), должно выполняться соотношение

$$\|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} = \|\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{y}(\cdot)] - \mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}}[\hat{z}(\cdot)]\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} < \|\hat{y}(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \quad (3.32)$$

чего не может быть. Теорема доказана. ■

В теореме 3.4 при выборе линеаризации в линейной части берутся только те отклонения, которые присутствуют в правой части исходного функционально-дифференциального уравнения (3.1). И это по существу. Если при выборе линеаризации окажется, что в функции $f(.)$ есть хотя бы одно отклонение $\bar{\tau}$, не совпадающее ни с одним из отклонений $\tau_1, ..., \tau_s$, тогда нетрудно убедиться, что неравенство $sL_f\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} < 1$, как правило, нарушается.

Отдельно рассмотрим случай простейшей линеаризации с одним единственным слагаемым в линейной части. В этом случае уравнение (3.2) примет вид

$$\dot{x}(t) = a_j x(t + \tau_j) + f(t, x(t + \tau_1), \cdots, x(t + \tau_s)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.33)$$

где $(a_j, \tau_j) \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \times [0, 2\pi), \quad j \in \{1, ..., s\}$.

Следствие 11 *Пусть:*

в нелинейном уравнении (3.1) *функция* $g(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ *является* 2π*-периодической функцией и удовлетворяет условию Липшица* (3.5), *а* L_f, *соответственно, константа Липшица функции* $f(.)$;

для некоторого $\mu \in (0, 1)$ *выполнено неравенство*

$$|a_j|\, \mu^{-|\tau_j|} < \ln\, \mu^{-1}; \tag{3.34}$$

$$(a_j, \tau_j) \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (H_k \cup H_{-k}).$$

Если справедливо условие

$$sL_f \sqrt{\frac{1}{{a_j}^2} + 2\mathbb{D}^2} < 1, \tag{3.35}$$

то для уравнения (3.1) *существует* 2π*-периодическое решение. Такое решение является единственным и оно принадлежит пространству* $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Более того, для любой начальной функции $\hat{x}^0(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$ *последовательность* $\hat{x}^k(\cdot) = (\mathbb{J}\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)]$ *стремится к единственной функции* $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{C}_{2\pi}^{(2),n}$, *и справедлива оценка сходимости*

$$\|(\mathbb{J}\,\hat{\mathbb{P}}\hat{\mathbb{F}})^k[\hat{x}^0(\cdot)](\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}} \leq \left(sL_f \sqrt{\frac{1}{{a_j}^2} + 2\mathbb{D}^2}\right)^k \|\hat{x}^0(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}^{(0),n}}; \tag{3.36}$$

Периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *индуцируется функцией* $\hat{x}(\cdot)$ *путем продолжения ее по периодичности* 2π *на всю числовую ось* $\mathbb{R}$. ■

Подчеркнем, что представленные результаты получены в терминах правых частей уравнений и могут быть легко проверены.

Замечание 3 *Если среди отклонений* $\tau_1, ..., \tau_s$ *есть нулевое отклонение* $\tau_j = 0, \quad j \in \{1, ..., s\}$, *то в качестве линейной части уравнения* (3.33) *можно выбрать* $a_j x(t)$. *Тогда, в силу замечания 2, для существования единственного* 2π*-периодического решения достаточно выполнения условия* $\frac{sL_f}{|a_j|} < 1$. ■

В заключении рассмотрим пример.

`Пример.` Рассматривается уравнение вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{10}x_1(t+\pi) + \frac{1}{12}\ln(1 + x_2(t+\pi))\cos t \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{10}x_2(t+\pi) + \frac{1}{12}\ln(1 + x_1(t+\pi))\cos t, \end{cases}$$

Видно, что количество отклонений в правой части $s = 1$ и единственное отклонение τ принимает значение $\tau = \pi$. В качестве линейной части возьмем $\frac{1}{10}x(t+\pi)$, т.е. положим $a = 1/10$. Тогда нелинейная часть $f(\cdot,\cdot)$ примет вид

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\ln(1 + x_2)\cos t \\ \frac{1}{12}\ln(1 + x_1)\cos t \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Нетрудно получить, что для этой функции константа Липшица будет иметь значение $L_f = 1/12$.

Можно показать, что существуют такие μ, при которых будет выполнено условие (3.34) (например, если взять μ равное $0,8$).

Вычислим $\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2}$. Очевидно $\mathbb{A} = 1/100$. Подсчитаем $\mathbb{D}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\det A_k}$.

$$\det A_k = (\cos k\pi)^2 + (k - \sin k\pi)^2 = k^2 + 1 - 2k\sin k\pi = k^2 + 1.$$

Получаем

$$\mathbb{D}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \approx 1,63.$$

Следовательно имеем

$$\sqrt{\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{D}^2} \approx \sqrt{0,01 + 3,27} = 10,16.$$

Тогда условие (3.35)

$$sL_f\sqrt{\frac{1}{a^2} + 2\mathbb{D}^2} \approx \frac{10,16}{12} = 0,85 < 1$$

будет выполнено и рассматриваемое функционально-дифференциальное уравнение имеет единственное 2π-периодическое решение.

Похожий класс уравнений также изучается в диссертации Поляковой Л.А. [66]. Однако в указанной диссертации условия приводятся в терминах функции Грина, здесь же эти условия приведены в терминах правой части и эти условия легче проверять. Полученные в данной работе результаты гарантируют существование периодического решения из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, тогда как в работе [66] гарантируется решения из класса функций ограниченной вариации. Кроме этого, в многомерном случае полученные условия в работе [66] являются плохо проверяемыми, тогда как здесь они также легко проверяемые.

Литература

[1] L. A. Beklaryan, F.,A. Belousov Existence of Periodical Solutions for Functional Differential Equations of Pointwise Type. // Functional Differential Equations. 1(1). 2009.

[2] E. A. Coddington, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations. Krieger Pub Co, edition 1984. - 429 p.

[3] M. Kamenskii, P. Nistri. Am averaging method for singulary perturbed system of semilinear differental inclusions with C_0 - semigroups. // Set. -Valued Analysis. -2003. -Vol. 11, N.4 -pp 345-357.

[4] G. Makay. Periodic solutions of dissipative functional differential equations with infinite delay. // Tohoku Mathematical Journal. 38 (1996), 355-362.

[5] J. R. Ward. Periodic solutions of ordinary differential equations with bounded nonlinearities. // Journal of the Juliusz Schauder Center. Volume 19, 2002, 275-282.

[6] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. -918 с.

[7] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. О периодических и близких к ним решениях дифференциальных уравнений. Труды ИСА РАН 2009. Т. 46.

[8] Р. Р. Ахмеров. Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. $http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode\_unicode/$

[9] Л. А. Бекларян. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. - 288 с. - (Методы современной математики; Вып. 5).

[10] Ф. А. Белоусов. Достаточные условия существования единственного периодического решения для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка. Вестник РУДН, сер. кМатематика. Информатика. Физикаљ, 2013, N1, с. 27-37.

[11] Ф. А. Белоусов. Существование и единственность периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем / под ред. Ю. С. Попкова. – М.:URSS. 56(1). с. 5-19. 2010.

[12] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в нелинейных колебаниях (3-е издание). М.: 1963.

[13] Ю. Е. Бояринцев. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск. 1980. -с. 224.

[14] Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. Л. Фуфаев. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1976. -с. 385.

[15] Ю. Н. Бибиков. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука. 1991. -с. 303.

[16] Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. -М.:Радио и связь, 1988.

[17] В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. Техническая электродинамика. -М.:Связь, 2002.

[18] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1978, -с. 336.

[19] Д. Гарел, О. Гарел. Колебательные химические реакции. М.: Мир. 1986.

[20] Д.В. Гололобов, В.Б. Кирильчук. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: Ч. 1 Распространение радиоволн. -Мн.:БГУИР, 2004.

[21] Д.В. Гололобов, В.Б. Кирильчук. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: Ч. 2 Фидерные устройства. -Мн.:БГУИР, 2005.

[22] Д.В. Гололобов, В.Б. Кирильчук, О.А. Юрцев. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: Ч. 3 Антенны. -Мн.:БГУИР, 2006.

[23] Л. А. Данилович, В. Н. Латинский. Об одном представлении периодического решения линейного матричного дифференциального уравнения. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, є 2. С. 276-278.

[24] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970. -с. 536.

[25] В. М. Даревский. О решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в тригонометрических рядах // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. є 12. -с. 2163-2173.

[26] А. И. Егоров. Обыкновенные дифференциальные уравнения приложениями. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 384 с. - ISBN 5-9221-0553-1.

[27] Н. П. Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Издательство академии наук БССР, Минск, 1968. - 273 с.

[28] А. И. Зайцев. Об аналитическом виде решений линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3. є 2. -с. 219-225.

[29] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. - 5-е изд. - М. Физматли, 2001. - 320 с. - ISBN 5-9221-0129-3 (Вып. 4).

[30] Г. Г. Исламов. О полиэдрайдной разрешимости системы линейных дифференциальных уравнений. // Изв. вузов. Математика. 1999. є3. -с. 31-37.

[31] В.А. Колемаев. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ. 1998. -240 с.

[32] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 572 с. - ISBN 5-9221-0266-4.

[33] И. Д. Коструб. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка: дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02, РГБ ОД, 61:12-1/67. - Воронеж, 2011. - 139 с.

[34] М. А. Красносельский. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1966. -331 с.

[35] М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.

[36] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурда, Ю. С. Колесова. Нелинейные почти периодические колебания. - М.: Наука, 1970. - 350 с.

[37] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. Геометические методы нелинейного анализа. -М.: Наука, 1975, - 512 с.

[38] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. -М.: Наука, 1966. -499 с.

[39] М. А. Красносельский, А. И. Перов. О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений. ДАН СССР 126, 1959, N1.

[40] М. А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. Векторные поля на плоскости. -М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963. -245 с.

[41] С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. с. -464.

[42] Р. М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. -М.: Постмаркет, 2000. -352 с.

[43] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР Киев, 1937.

[44] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Изд-во АН УССР Киев, 1934.

[45] С.И. Кузнецов. Колебания и волны. Геометрическая и воновая оптика: учебное пособие. -Томск: Изд-во Томского политихнического университета, 2007. -170 с.

[46] В. Г. Курбатов. Линейные дифференциално-разносные уравнения. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. -168 с.

[47] В. Н. Лаптинский. К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1983. -Т.19. -є8. -с.1335-1343.

[48] В. Н. Лаптинский. Метод мнимых квадратов. Дифференциальные уравнения. 1969. -Т. 5. -є 12. -с. 2269-2271.

[49] В. Н. Лаптинский. О построении периодических решений дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1984. -Т. 20. -є 3. -с. 536-539.

[50] Лаптинский В.Н. Титов В.Л. К теории периодических решений полулинейных дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1999. -Т.35. -є8. -с.1036-1045.

[51] Лаптинский В.Н. О построении периодических решений дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1984. -Т.20. -є3. -с.536-539.

[52] Б. М. Левитан, В. В. Жиков. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. Издательство Московского Университета, 1978. - 205 с.

[53] Д.К. Лика, Ю.А. Рябов. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. -Кишинев: Изд-во "Штиинца 1974. -291 с.

[54] И. И. Маковецкий. Конструктивный анализ двухточечной краевой задачи для нелинейного метричного дифференциального уравнения Ляпунова: дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02, ИТМ НАИБ; ГрГУ (02.12.2005)

[55] Дж. Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. -397 с.

[56] Х. Массара, Х. Шеффер. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир. 1970. -с. 456.

[57] Н.В. Медведев. Об одном принципе существования периодического решения диффернциального уравнения в банаховом пространстве. // Математические заметки. Т. 4(1). с. 105-111.

[58] А.Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. -М.: Наука, 1972. -352 с.

[59] Ю. И. Неймарк. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изд.2, 2010. -471 с.

[60] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: 1947. - 448 с.

[61] С. Н. Нидченко. Рождение периодических решений дифференциального уравнения с запаздывающим из положения равновесия. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. є 4, 2005

[62] О. И. Никитин, А. И. Перов. К вопросу о приближенном нахождении периодических решений дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1983. -19, є11. - с. 2001-2004.

[63] А. И. Перов, В. К. Евченко. Метод направляющих функций. Воронежский государственный университет. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. -с. 182.

[64] А. И. Перов, И. Д. Коструб. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка: монография. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга 2013. -с. 227.

[65] А. И. Перов. О. И. Никитин. О нахождении коэффициентов Фурье периодических решений. // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Межвуз. сборник. Куйбышев. 1979. є 5. -с. 43-52.

[66] Л. А. Полякова. Обобщенный принцип сжимающих отображений и периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений: дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02, РГБ ОД, 61:07-1/387. - Воронеж, 2006. - 126 с.

[67] Л. А. Полякова. Периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Известия РАЕН, Дифференциальные уравнения. 2006. є11. -с. 179-182.

[68] Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1970. - 332 с.

[69] М. Л. Расулов. Метод контурного интеграла. М.: Наука. 1964. -с. 464.

[70] В. Н. Розенвассер. Колебания нелинейных систем. - М.: Наука, 1969. - 576 с.

[71] В. Н. Розенвассер. Периодические нестационарные системы уравнений, М.: Наука, 1973. - 511 с.

[72] Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. -304 с.

[73] Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. Что такое биофизика. М.: Просвещение, 1971. -135 с.

[74] В.П. Рубаник. Колебание квазилинейных систем с запаздыванием. - М.: Наука, 1969. - 288 с.

[75] Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1979. -352 с.

[76] Ю. Н. Синтяев. Об условиях обратимости возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициетами. // Вестник ВГУ, Серия: Физика, Математика. 1, с. 84-87. 2008.

[77] П. Е. Соболевский. Об одном типе дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. є 12. -с. 2278-2280.

[78] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука. 1976. -864 с.

[79] Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. -М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. -256 с.

[80] В. А. Треногин. Функциональный анализ. - М.: Наука. 1993. - 440 с.

[81] А. Халанай, Д. Векслер. Качественная теория импульсных систем. - М.: Мир, 1971. -312 с.

[82] Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. - 720 с.

[83] А. Я. Хохряков. О матрице Грина периодической краевой задачи для ситемы линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. є 3. -с. 371-381.

[84] Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений: пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 421 с.

[85] Э. Хилле, Р. Филиппс. Функциональный анализ и полугруппы. -М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. -832 с.

[86] Д. Н. Чебан. Асимптотически почти периодические решения дифференциальные уравнения. Издательский центр Молдовского госуниверситета, 2002. -226 с.

[87] Л. Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Мир, 1964. -480 с.

[88] О.Д. Шабалин. Физические основы механики и акустики. -М.: Высшая школа, 1981. -263 с.

[89] Л.Э. Эльцгольц, С.Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом -М.: Наука, 1971. -296 с.