Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE RAS

РОССИЙСКАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN
ACADEMY OF SCIENCES

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сборник статей
Выпуск 10

МОСКВА
2013

Анализ и моделирование экономических процессов / Сборник статей под ред. $\boxed{\text{В.З. Беленького}}$, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 155 с. (Рус.)

Коллектив авторов: **О.А. Андрюшкевич, $\boxed{\text{В.З. Беленький}}$, Т.А. Белкина, В.А. Булавский, С.С. Грачева, И.М. Денисова, Б.А. Ефимов, В.В. Калашников, Н.И. Калашникова, Н.Б. Конюхова, Т.А. Крапивина, Л.Я. Клеппер, М.А. Милкова, С.А. Смоляк, Н.А. Трофимова**.

Десятый выпуск ежегодного сборника включает, как и прежде, четыре тематических раздела: «Анализ реальных экономических процессов», «Модели финансовых и рыночных механизмов», «Динамические модели», «Дискуссии, заметки и письма».

Всего представлено 9 статей.

Analysis and Modeling of Economic Processes / The Collection of Articles, ed. $\boxed{\text{V.Z. Belenky}}$, N.A. Trofimova. Issue 10. – Moscow: CEMI RAS, 2013. – 155 p. (Rus.)

The tenth issue of annual Collection of articles consists of four sections: «Analysis of actual economic processes», «Modeling of financial and market mechanisms», «Dynamic models», «Discussions, Notes and Letters». As a whole 9 articles are presented.

Ответственные редакторы: доктор физико-математических наук, проф. $\boxed{\text{В.З. Беленький}}$,
кандидат экономических наук, доцент Н.А. Трофимова

Рецензенты: доктор экономических наук, проф. О.Б. Брагинский,
доктор экономических наук, проф. В.А. Волконский

ISBN 978-5-8211-0660-5

В.З. Беленький

28 сентября 2013 г. на 79-м году жизни скончался заведующий лабораторией динамических моделей экономики ЦЭМИ РАН, профессор, доктор физико-математических наук Виталий Зиновьевич Беленький.

Виталий Зиновьевич родился в Москве 26 января 1935 г., в 1958 г. окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности математик. После окончания университета получил распределение в Информационный центр МГУ, который был сформирован в 1956 г. В 1963 г. был создан Центральный экономико-математический институт. Это был период экономических надежд, и Виталий Зиновьевич перешел работать в ЦЭМИ. Большая часть его трудовой деятельности была связана с этим институтом, где он проработал почти 50 лет. Более 40 лет он занимался исследованиями в области математического моделирования экономических процессов, методов оптимизации и вычислительной математики.

Им был предложен метод описания монотонной функции, определенной на всей вещественной оси с помощью *диаграммы роста*; на основе такого описания получены необходимые и достаточные условия существования стационарного решения в модели Полтеровича–Хенкина «диффузии технологий». Кроме того, была предложена формализация задачи оптимизации для двойственной пары линейных дифференциальных неравенств, допускающих разрывные траектории.

В работах по теории фидуциальных вероятностей дано логическое обоснование теории фидуциальных вероятностей на основе предложенного автором *принципа инертности* свободных случайных величин и введено понятие *фидуциальная последовательность.*

Принимал он участие и в работах в области анализа инвестиционных проектов.

При разработке компьютерной алгебры дифференцирования им были построены рекуррентные алгоритмы разложения функций (скалярного аргумента) в ряд Тейлора до членов произвольно высокого порядка, что открыло принципиальную возможность разработки новых вычислительных методов. Частично эти результаты отражены в данном выпуске Сборника в статье «Вычислительная система TAYLOR, версия V4.0; возможности и примеры» в соавторстве с М.А. Милковой.

Настоящий выпуск Сборника посвящается памяти человека и ученого Виталия Зиновьевича Беленького, бессменного редактора Сборника на протяжении его 9 выпусков.

Виталий Зиновьевич

Беленький

1935–2013

Содержание

От редактора 8

Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов

Клейнер Г.Б. Паттерн-модель функционирования экономики в системном ракурсе 9

1. Базовая классификация экономических систем, процессов и благ
2. Взаимосвязь экономических процессов и экономических благ
3. Паттерн-модель функционирования экономики как взаимодействия экономических систем в ходе обращения благ

Андрюшкевич О.А., Денисова И.М. Особенности формирования национальных инновационных систем 24

1. Понятие национальной инновационной системы
2. Структура НИС
3. Модели инновационного развития

Трофимова Н.А., Крапивина Т.А. Моделирование влияния факторов на динамику социального капитала 49

1. Постановка задачи.
2. Факторы, влияющие на динамику социального капитала
3. Методология исследования
4. Экспериментальные расчеты и анализ полученных результатов

Смоляк С.А. Оценка износа машин, подвергающихся случайным отказам 65

1. Постановка задачи
2. Модель износа машины
3. Исследование модели
4. Применение к установлению коэффициентов годности

Раздел 2. Модели финансовых и рыночных механизмов

Булавский В.А., Калашников В.В., Калашникова Н.И. Равновесия с согласованными предположениями в смешанной олигополии с разрывной функцией спроса 82

1. Описание модели
2. Внешнее равновесие
3. Внутреннее равновесие

Ефимов Б.А. О периодических решениях динамических систем, связанных с равновесием по Нэшу бескоалиционных игр 97

1. Параметрическое равновесие по Нэшу в играх
2. Гармонический осциллятор и игры двух лиц
3. Некоторые аспекты теории риска для функции полезности многих переменных, представляющих предпочтения индивидов
4. Линейный осциллятор при наличии риска
5. Игры участников с квадратичными функциями полезности
6. Периодическая нагрузка при наличии риска в социальной среде
7. Взаимодействие двух фирм, имеющих бизнес-циклы

Раздел 3. Динамические модели

Белкина Т.А., Конюхова Н.Б. Об асимптотических представлениях функции Беллмана и оптимальной стратегии в модели управления процессом риска с диффузионным возмущением 112

1. Уравнение динамики капитала и задача оптимизации
2. Оптимальная стратегия и ее асимптотическое представление при малых значениях капитала
3. Асимптотические представления при больших значениях капитала: случай экспоненциального распределения размеров требований

Раздел 4. Дискуссии, заметки и письма

Беленький В.З., Милкова М.А. Вычислительная система TAYLOR-4: возможности и примеры 126

1. Обзор процедур TAYLOR-4
2. Примеры обращений к TAYLOR-4

Грачева С.С. Задача оптимального распределения средств на рекламные мероприятия с учетом специфики вуза 142

1. Постановка задачи
2. Описание модели
3. Конкретные примеры решения задачи

Аннотации 150

Abstracts 153

Авторы 155

От редактора

Десятый выпуск ежегодного Сборника «Анализ и моделирование экономических процессов» посвящен памяти его основателя и главного редактора на протяжении всех девяти выпусков – Виталия Зиновьевича Беленького.

Сборник выходит в формате, принятом в предыдущих выпусках. Этот формат предполагает деление материалов Сборника на четыре раздела.

Первый раздел «Анализ реальных экономических процессов» посвящен исследованию функционирования экономики в системном ракурсе, моделированию формирования национальных инновационных систем, а также исследованию и моделированию динамики социального капитала.

Во втором разделе «Модели финансовых и рыночных механизмов» рассматривается проблема дисконтирования денежных потоков применительно к задаче стоимостной оценки износа подержанных машин и оборудования, исследуются связи между динамическими системами и играми двух лиц, а также рассматривается понятие равновесий с предположениями в модели олигополистического рынка однородного продукта, функция спроса в которой не обязательно непрерывна.

Третий раздел «Динамические модели» посвящен исследованию асимптотических представлений оптимальной стратегии инвестиций и функции Беллмана в модели управления процессом риска.

Четвертый раздел «Дискуссии, заметки и письма» имеет целью расширить круг материалов для публикаций. Он включает как статью, в которой рассматривается задача оптимального распределения средств на рекламные мероприятия с учетом специфики вуза, так и статью, написанную непосредственно под руководством В.З. Беленького и посвященную последней теме, над которой работал Виталий Зиновьевич, разработке компьютерной алгебры дифференцирования.

Авторы, представленных в Сборнике статей, сразу откликнулись на просьбу редактора почтить память Виталия Зиновьевича Беленького и предоставили свои статьи для публикации. Это свидетельствует об отношении к Виталию Зиновьевичу Беленькому. Ведь все, кто работал с ним, всегда чувствовали его дружескую человеческую поддержку.

Память о Виталии Зиновьевиче Беленьком навсегда останется с нами.

Н.А. Трофимова

Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов

Г.Б. Клейнер

Паттерн-модель функционирования экономики в системном ракурсе[1]

Под *паттерн-моделью* мы понимаем математическую конструкцию, обладающую основными свойствами модели данной предметной области, но не позволяющую однозначно восстановить состояние предметной области в деталях. По сути дела, предметом моделирования для паттерн-моделей является целый класс объектов, отличающихся своими параметрами, но имеющих общую природу. Отношения между компонентами паттерн-модели отражают наиболее существенные отношения между элементами предметной области, но прогностическая сила такой модели ограничена и не позволяет исследовать детали состояния моделируемой системы. Иногда такие модели называют также *структурными*, отделяя их от *функциональных*, отражающих, в отличие от структурных, не только медленно меняющиеся отношения, но и быстро меняющиеся параметры. Построение паттерн-моделей является необходимым промежуточным этапом создания любой экономико-математической модели перед ее параметризацией и калибровкой [5]. Паттерн-моделью является, например, модель производства продукции на предприятии, записанная в виде задачи линейного программирования $\{Ax \leq b,\ x > 0,\ cx \rightarrow max\}$, где x – вектор объемов производимых видов продукции, A – матрица удельных затрат ресурсов, b – вектор ограничений по ресурсам, c – вектор цен на продукцию. Паттерн-моделью будет и такая модель, в которой виды продуктов и затрат ресурсов специфицированы, хотя числовые элементов матрицы A, векторов b и c не определены. Как паттерн-модель процесса производства на данном объекте можно рассматривать и запись $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, где y – объем производства продукции, $x_1,\ldots,x_n$ – объемы специфицированных по видам производственных ресурсов, f символ функциональной зависимости не специфицированного вида или же специфицированного вида с неопределенными значениями параметров.

В данной статье строится паттерн-модель функционирования экономики, рассматриваемой в контексте обобщенной системной парадигмы Я. Корнаи [1, 4, 6]. Согласно этой парадигме, экономика рассматривается как совокупность функционирующих экономических систем разного уровня.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-06-00-151.

Предлагаемая в статье паттерн-модель отражает функционирование экономики как процесс обращения благ (продуктов), создаваемых и потребляемых экономическими системами. При этом отображение моделирования, ставящее в соответствие экономическим системам, благам и процессам компоненты математической модели, базируется на построении естественной в некотором смысле типологии экономических систем, процессов и благ (подробно данная классификация изложена в [1]). Описываются производственные функции каждого вида систем, отражающие факторы и результаты деятельность экономических систем по созданию и потреблению экономических благ.

1. Базовая классификация экономических систем, процессов и благ

В этом разделе мы приводим краткое описание понятий и классификационных группировок основных рассматриваемых компонент предметной области – экономических систем, процессов и б*лаг.*

Экономические системы. Под *системой* понимается относительно обособленная и устойчивая в пространстве и во времени часть окружающего мира (рассматриваемого как системосодержащее пространство), характеризующаяся внешней целостностью и внутренним многообразием. Система считается *экономической*, если она в той или иной степени реализует процессы производства, а также распределения, обмена и потребления благ.

К числу экономических систем естественным образом относятся такие образования, как предприятия, организации, рынки, страны, субъекты РФ и другие подобные виды экономических образований. В качестве экономических систем целесообразно рассматривать также и экономические явления, такие, как институты и институциональные совокупности, социально-экономические процессы, программы, планы, проекты и т.п. (с включением в эти системы индивидов, участвующих в их деятельности). Экономическая активность индивидов может осуществляться как путем участия в деятельности (или в создании) какого-либо предприятия, так и путем участия в реализации экономических проектов, функционировании сред или включении в экономические процессы. Все это говорит о том, что «мир экономических систем» достаточно разнообразен и включает в себя системы, по крайней мере, четыре типов: объекты, проекты, процессы и среды.

В зависимости от локализации в пространственно-временном универсуме системы делятся на четыре группы (класса, типа) согласно табл. 1.

Таблица 1

Базовая классификация экономических систем

Имманентные границы в пространстве	Имманентная длительность жизненного цикла	
	Ограничена (определенная длительность)	**Н**е ограничена (неопределенная длительность)
Ограничено (пространственная определенность)	**Проект** (пример: строительство)	**Объект** (пример: предприятие)
Не ограничено (пространственная неопределенность)	**Процесс** (пример: диффузия инноваций)	**Среда** (пример: законодательство)

Символическое изображение четырех базовых типов систем в условных координатах «пространство-время» представлено на рис. 1. Утолщенные горизонтальны или вертикальные части границ прямоугольников, соответствующих процессным, проектным и объектным системам, символизируют ограниченность соответствующих систем по периоду функционирования или размещению в пространстве.

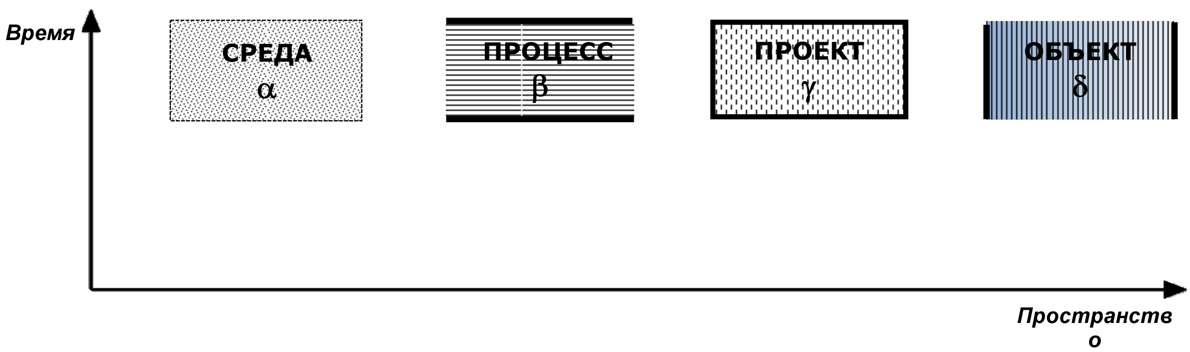

Рис. 1. Условное изображение четырех базовых типов систем в координатах «пространство время»

Ведя экономическую деятельность, т.е. процессы производства, потребления, распределения и обмена, экономическая система осуществляет расширенное (улучшенное) *воспроизводство* своего состояния и положения. Так, объектная система обеспечивает неограниченное продолжение функционирования во времени и сохранение занимаемого ею пространства; средовая система обеспечивает неограниченное продолжение функционирования во времени и неограниченное распространение в пространстве; процессная система – сохранение в пределах отведенного времени и неограниченное распространение в пространстве; проектная система – продолжение функционирования в отведенной пространственной зоне и в заданном периоде. Таким образом, воспроизводственный характер и, соответственно цели функционирования у экономических систем разного типа различны. Разнонаправлена и экономическая активность систем разного типа.

Экономические процессы. Многообразие технологических, управленческих, логистических, социальных, финансовых и иных процессов, посредством которых осуществляется экономическая деятельность, как известно, делится на четыре группы: производство, потребление, распределение и обмен. Роль каждого из процессов в ходе взаимодействия экономических систем подробно рассмотрена в [3]. В [2] обосновано распределение этих базовых экономических процессов между базовыми типами систем (см. табл. 2).

Таблица 2

Распределение базовых экономических процессов между системами различных типов

№ п/п	Тип системы	Основная Функция	Дополнительная функция
1.	Объектная	Производство	Потребление
2.	Средовая	Потребление	Распределение
3.	Процессная	Распределение	Обмен
4.	Проектная	Обмен	Производство

Можно заметить, что последовательность экономических процессов «производство – потребление – распределение – обмен» отражается в табл. 2 дважды: один раз в последовательности основных функций систем, второй (со сдвигом на одну позицию) – в последовательности дополнительных функций.

Дадим системную интерпретацию рассматриваемым процессам. *Производство*: создание экономических благ в виде товаров, услуг, работ и транспортировка их за пределы пространства, занимаемого системой-производителем. Товарное производство возможно лишь при ограниченности занимаемого производителем пространства. Таким свойством обладают системы объектного и проектного типов. *Потребление*: обеспечивает воспроизводство системы-потребителя во времени. Реализуется системами средового и объектного типа. *Распределение*: преодоление пространственной ограниченности, распространение, поддержание процесса освоения пространства. Реализуется системами средового и процессного типов. *Обмен***:** появление или исчезновение некоторого блага в данном месте за ограниченное время. Реализуется системами проектного и процессного типов.

В итоге производство можно охарактеризовать как процесс, свойственный системам средового и объектного типов; потребление – как процесс, общий для функционирования систем средового и объектного типов; распределение как общий процесс для функционирования систем средового и процессного типов; обмен – как процесс, общий для систем проектного и процессного типов.

Таким образом, каждый экономический процесс создает какое-либо благо. Производство – продукцию, дифференциацию пространства, потребление – продолжение деятельности потребителя, распределение – поддержание соответствующей системы в пространстве, обмен – динамику экономических условий. В принципе можно говорить о «производственной функции» каждого экономического процесса и каждой экономической системы.

Экономические блага (продукты). На базовом уровне и с опорой на пространственно-временной подход к исследованию системной экономики для классификации (типологии) благ достаточно двух признаков, определяющих доступ к данной единице блага с точки зрения пространства и с точки зрения времени.

Первичными свойствами любого предмета, образования или явления являются время и место (длительность и протяженность) его существования. С этой точки зрения, как и при классификации экономических систем, логично в качестве первого шага выделить блага с определенным *сроком* существования (точнее, доступа к их использованию) и блага с неопределенным (не ограниченным априорно) сроком существования в качестве блага. Большинство материальных благ имеют неопределенный срок существования. Существуют и материальные блага с фиксированным сроком годности, например, лекарства или скоропортящиеся продукты питания, но в реальности и они часто используются после истечения нормативного срока в качестве благ. Фактический срок использования зависит от условий хранения, индивидуальных особенностей потребителя и т.д. К благам с ограниченным сроком существования относятся, скажем, авиабилеты (без возможности изменения рейса), льготы для покупателей в определенный период (так называемые «потребительские акции»), услуги по срочным договорам, например, договорам аренды и др. Обычно блага первого типа называются *краткосрочными*, второго – *долгосрочными*. Мы также будем придерживаться этой терминологии, несмотря на то, что, по сути, речь идет не столько о длительности существования блага, сколько о его определенности.

Второй «экзистенциальный» признак классификации видов благ, или видов продукции[2], определяет особенности пространственного положения благ в период их существования. С каждым благом неразрывно связано «пространство доступа» – область пространства, которую должен занимать непосредственный пользователь данного блага (физическое лицо, юридическое лицо, иная экономическая система). Если это «пространство доступа» ограничено, так что правом доступа может пользоваться только один субъект (одно лицо), то такое благо относится к *частным*. Если пространство доступа не ограничено, данное благо относится к общественным.

Таким образом, блага, подобно экономическим системам, делятся на 4 группы (типа), см. табл. 3:

- частные краткосрочные (обозначение: ЧК),
- частные долгосрочные (ЧД),
- общественные краткосрочные (ОК),
- общественные долгосрочные (ОД).

Принадлежность блага к тому или иному типу определяется расположением соответствующего ему пространства доступа в пространственно-временном континууме.

Таблица 3

Базовая классификация экономических благ

Ограниченность пространства доступа	Длительность доступа	
	Ограничена (определенная длительность)	**Н**е ограничена (неопределенная длительность)
Ограничено	**Частные краткосрочные (ЧК)** (аудиенция у Папы)	**Частные долгосрочные (ЧД)** (изделия)
Не ограничено	**Общественные краткосрочные (ОК)** (прямой эфир)	**Общественные долгосрочные (ОД)** (Интернет)

[2] Понятие блага, вообще говоря, шире понятия продукции, поскольку благами могут быть и природные факторы, такие, как чистый воздух, ясная погода и т.п.

Подобно символическим изображениям экономических систем, экономические блага также могут быть представлены как ограниченные/неограниченные прямоугольники (рис. 2).

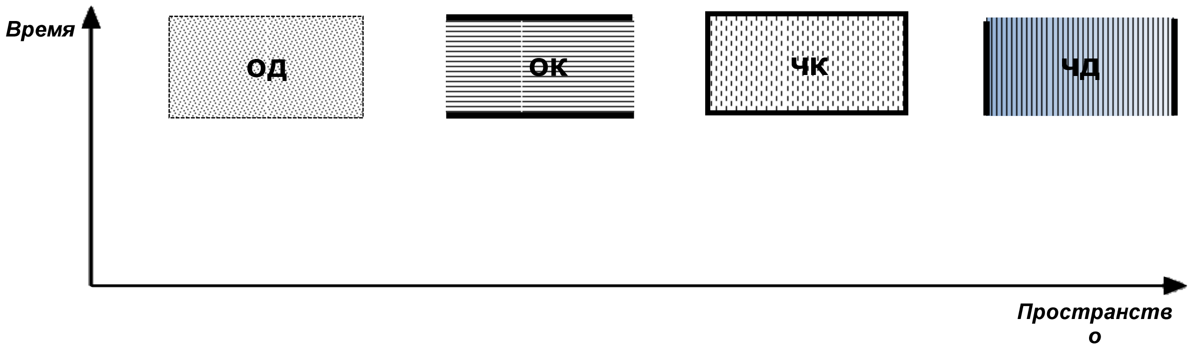

Рис. 2. Условное изображение четырех базовых типов благ в зависимости от ограниченности/неограниченности доступа к ним во времени и в пространстве

2. Взаимосвязь экономических процессов и экономических благ

Экономические блага создаются и потребляются экономическими системами. Есть ли распределение «полномочий» по производству и потреблению тех или иных благ теми или иными видами систем, если под видом благ и видом систем понимать приведенные выше группы (блага: общественные долгосрочны; общественные краткосрочные; частные долгосрочные; частные краткосрочные; системы: средового типа, процессного типа; объектного типа; проектного типа)? Поскольку экономические функции систем определяются составом реализуемых ими общеэкономических процессов (производство, потребление, распределение, обмен), для ответа на этот вопрос естественно обратиться к функциям этих четырех процессов.

Начнем с процесса *потребления*, реализуемого в рамках средовой и объектной систем (по сути дела, именно этот процесс представляет собой то общее, что характерно для систем этого вида с функциональной точки зрения). Роль этого процесса сводится к поддержанию во времени функционирования и развития этих систем. В общем случае это следует рассматривать как благо, причем если учесть, что, как правило, работа таких объектных систем, как предприятие или государство, и таких средовых систем, как институты или инфраструктура, приносит пользу обществу и рассчитана на неопределенный срок, то это благо следует отнести к классу общественных долгосрочных (ОД).

Процесс *распределения* характерен для средовых и процессных систем. Результатом этого процесса является, как мы видели, поддержка распространения функционирования систем средового и процессного типа в пространстве. Это, несомненно, общественное благо, но оно носит кратковременный характер (поскольку к числу кратковременных относятся использующие это благо экономические системы) и относится, следовательно, к типу ОК.

Результат *обмена* как общей функции для процессных и проектных систем относится к числу локальных и по времени, и по пространству благ (ЧК).

Обратим внимание, что в перечисленных процессах создавались блага, обретающие форму услуг или создания условий для функционирования экономики. Создание материальных ценностей, имеющих предметную форму, не фигурировало. Эту роль играет процесс *производства*, характерный для объектных и проектных систем. Его непосредственным результатом служат, в основном, «изделия», т.е. блага с ограниченным пространством допуска и неопределенным сроком функционирования (ЧД).

Таким образом, мы описали результаты протекания общеэкономических процессов, т.е. их *выходы*. Перейдем теперь к описанию источников этих результатов, т.е. *входов* каждого процесса. Заметим, что результат процесса производства в рамках объектной системы потребляется средовой системой. Процесс потребления, реализуемый средовой системой наряду с распределением, использует для своей деятельности этот результат. Таким образом, потребление осуществляет преобразование частных долговременных благ в общественные долговременные блага. Далее, результат процесса потребления (ОД), состоящий в подготовке пространства для реализации процесса распределения, может рассматриваться как вход для этого процесса, необходимый для получения соответствующих благ (ОК). Общая картина входов и выходов четырех общеэкономических процессов показана на рис. 3.

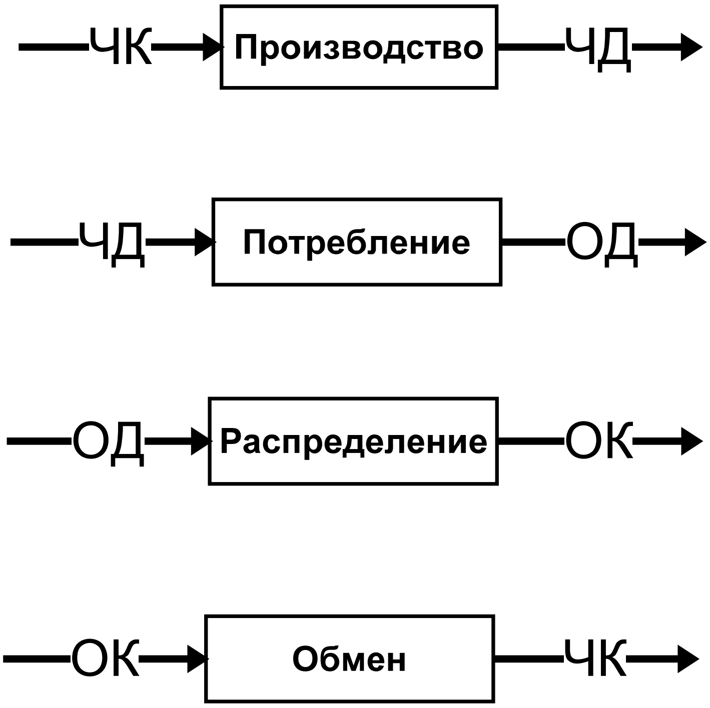

Рис. 3. Взаимосвязь базовых экономических процессов и базовых благ

3. Паттерн-модель функционирования экономики как взаимодействия экономических систем в ходе обращения благ

Основными компонентами модели являются: а) четырехэлементное множество типов экономических систем $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, являющееся образом множества всех экономических систем *SYS* при отображении классификации систем τ: $SYS \to \Sigma$; б) четырехэлементное множество экономических процессов $\Pi = \{P, C, D, E\}$; в) четырехэлементное множества экономических благ (продуктов) GOODS = {ОД, ОК, ЧД, ЧК}. Задача состоит в определении совокупности отношений, связывающих эти компоненты и отражающих: а) распределение типовых экономических процессов по типовым экономическим систем, б) роль процессов и систем в создании и обращении типов благ (в дальнейшем слово «тип» и его производные мы будем опускать, имея в виду, что рассмотрение ведется на уровне фактор-множеств совокупности экономических систем, процессов и благ по отношениям эквивалентности, возникающим благодаря классификации систем, процессов и благ). Кроме того, в задачу входит исследование возможностей количественного измерения объемов циркулирующих в экономике благ, интенсивности реализующихся в ней экономических процессов, размеров (масштабов) функционирующих в ней систем и связей между этими показателями.

Создаваемый системой объем благ можно считать показателем ее результативности. Факторную модель этого показателя можно назвать валовой производственной функцией (ВПФ) системы. Она отличается от традиционной производственной функции (ПФ) тем, что значения ПФ отражают объемы продукции, созданной системой и реализуемой вне пределов системы (т.е. вне занимаемого системой пространства или вне периода ее жизненного цикла), в то время как значения ВПФ выражают общее количество произведенных (созданных) благ, включая как блага, использованные внутри системы, так и блага, направляемые во внешнюю среду.

Перечислим основные предпосылки модели.

1. Экономика представляется в виде совокупности трех групп компонентов: экономических систем, процессов и благ. Каждая группа состоит из четырех видов четырех репрезентативных элементов:

α, β, γ, δ – систем, соответственно, средового, процессного, проектного и объектного типов;

P, C, D, E – процессов производства, потребления, распределения и обмена;

ОД, ОК, ЧД, ЧК – общественных долгосрочных, общественных краткосрочных, частных долгосрочных и частных краткосрочных благ.

2. Каждая из систем реализует два из четырех экономических процесса, один в качестве основного, другой – в качестве дополнительного (см. табл. 2). Основной процесс реализует основную функцию данной системы, обусловленную ее назначением в экономике; дополнительный процесс содействует поддержанию функционирования системы во времени и в пространстве.

3. Каждый экономический процесс производит один вид благ и потребляет один вид благ. Если данный процесс реализуется в данной система как основной, то производимое (создаваемое) им благо используется другой системой. Если процесс реализуется как дополнительный, то производимое (создаваемое) благо потребляется, главным образом, самой системой и обеспечивает поддержку ее существования во времени и/или в пространстве. Таким образом, каждая система производит (создает) два вида благ, один из которых используется главным образом самой данной системой, другой – главным образом иной системой.

4. Функционирование экономики в целом осуществляется в виде создания и обращения благ. Движение благ в экономике происходит по контуру «объект – среда – процесс – проект – объект». Между объектной и процессной системой, а также между проектной и средовой системами непосредственное взаимодействие в виде обращения благ отсутствует.

5. Основной и дополнительный процессы в рамках одной системы тесно связаны, причем основное назначение дополнительного процесса – поддержка функционирования системы в рамках ее жизненного цикла и пространственного расположения.

6. Объем блага, производимого (создаваемого) каждой системой в качестве основного и используемого другой системой, зависит от «производственной мощности», или продуктивности, системы, а также и от объема поступающих в нее из другой системы благ.

7. «Производственная мощность» системы в каждый момент определяется (траекторно) объемами благ, поступающих (поступавших) на вход дополнительного для данной системы процесса, а также от их выходов.

8. Объем производства (создания) дополнительного блага каждой системой определяется объемами благ, поступавших на вход данного дополнительного процесса, а также интенсивностью данного процесса и мощностью данной системы в целом.

9. Интенсивность основного для данной системы экономического процесса зависит от количества получаемых и используемых им ресурсов (благ) и от характера управления, определяющего разделение получаемых ресурсов на вложения в повышение интенсивности и вложения в создаваемое благо. Кроме того, она зависит от интенсивности дополнительного процесса.

10. Интенсивность дополнительного для данной системы экономического процесса зависит от количества получаемых им ресурсов (благ) и управления, определяющего разделение получаемых ресурсов на вложения в повышение интенсивности и вложения в создаваемое благо.

С учетом этих предпосылок, соединяя данные табл. 2 и рис. 3, получаем структурную паттерн-модель взаимосвязи взаимодействия всех трех составляющих системной экономики: экономических систем, процессов и благ (рис. 4).

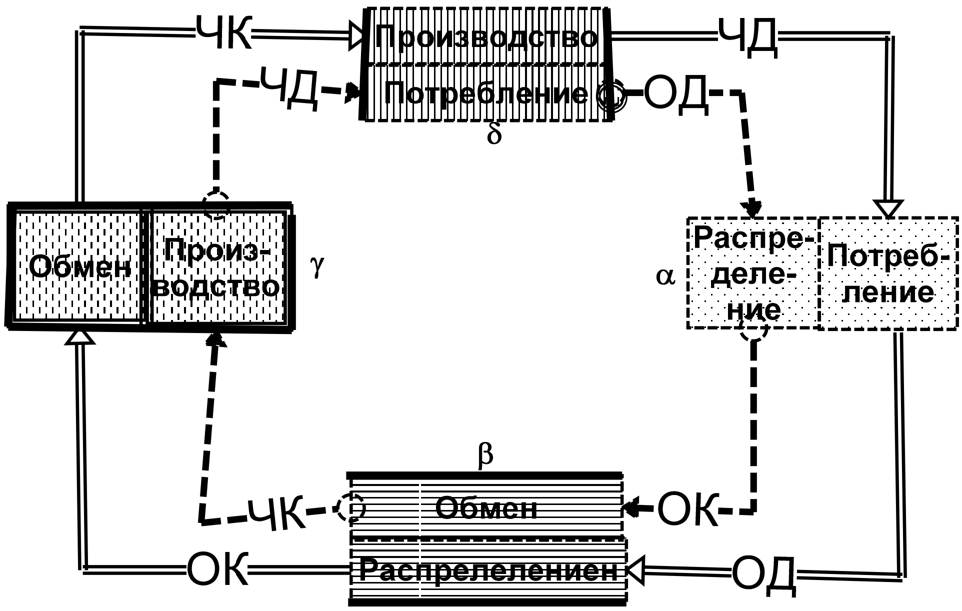

Рис. 4. Принципиальная схема передачи результатов деятельности системами разных типов[3]

На рис. 4 представлены два контура обращения благ – основной контур (двойные стрелки) и дополнительный контур (пунктирные стрелки). Соответствующие блага также могут рассматриваться как основные (во внешнем контуре) и дополнительные (во внутреннем). Внешний контур представлен процессами, реализующими основные функции экономических систем, внутренний – процессами, реализующими дополнительные функции. Двойные стрелки указывают на производство (создание) соответствующих благ для внешнего окружения, за пределами (пространственными или временными) данной системы; пунктирные стрелки – на создание благ в виде поддержания функционирования самой данной системы во времени (объект, среда) или в пространстве (среда, процесс). Пунктирные стрелки на рис. 4 не означают передачу данного блага из системы-производителя в другую систему, систему-потребителя. Речь идет только о возможности для системы (системы-потребителя), в которую упирается конец пунктирной стрелки, пользоваться результатами деятельности системы, из которой направлена стрелка (системы-производителя). Это не всегда соответствует передаче конкретных материальных ценностей. Например, «передача» ОД из средовой в процессную систему означает, что для последней открыт доступ к возможностям, предоставляемым первой системой. Таким образом, речь идет, скорее, о переходе *прав пользования* данным благом. Использование

[3] Данная схема отражает так называемую симметрическую концепцию функционирования систем разных типов в экономике. Симметричность состоит в том, что каждая система производит один из четырех видов благ для внешнего окружения и для совместного пользования, как системой-донором, так и системой-реципиентом.

создаваемого в каждой системе дополнительного блага как для поддержания жизненного цикла во времени и/или жизненного ареала в пространстве самой системы-донора и, одновременно, системы-реципиента символически отражено на рис. 4 с помощью кольцеобразного соединения пунктирной стрелки с прямоугольником, символизирующим систему-донора.

Объем предоставляемых прав (относящихся в данном случае к ОД) определяется «мощностью», или размером системы-донора и объемом поступающих в эту систему благ. Эта мощность, в свою очередь, определяется объемом ресурсов, полученных от соседней системы для функционирования дополнительного процесса.

Для количественного описания паттерн-модели функционирования экономики примем следующие обозначения показателей:

Y_σ^G – объем блага G, передаваемый системой типа σ (σ = α, β, γ или δ) в систему, занимающую следующее место в последовательности α, β, γ, δ, α...;

f_σ^H – функция, выражающая зависимость объема создания благ экономическим процессом H (H = P, C, D или E) в системе типа σ (σ = α, β, γ или δ) от факторов;

g_σ^H – функция, выражающая зависимость интенсивности (мощности) процесса H (H = P, C, D или E) в системе типа σ (σ = α, β, γ или δ) от факторов;

I_σ^H – интенсивность процесса H (H = P, C, D или E) в системе типа σ (σ = α, β, γ или δ);

U_σ – совокупность показателей управления, определяющих пропорции разделении ресурсов в системе σ (σ = α, β, γ или δ) на ресурсы, выделяемые для роста интенсивности основного и дополнительного процессов (в данном варианте паттерн-модели считаются экзогенными; возможности эндогенизации управления могут быть реализованы на основе применения схемы классификации операций управления, приведенной в [1].

Фигурные скобки в приводимых ниже формулах используются для обозначения траектории изменения данного показателя во времени до периода, рассматриваемого в модели.

Принятые предпосылки 1 – 10 приводят к следующей системе уравнений, задающей функциональные паттерн-модели системной экономики в факторизации по принятым отношениям классификации множеств экономических систем, процессов и благ.

$$Y_\alpha^{ОД} = f_\alpha^{C}\,(\{Y_\delta^{ЧД}\},\ I_\alpha^{C}),$$

$$Y_\alpha^{ОК} = f_\alpha^{D}\,(\{Y_\delta^{ОД}\},\ I_\alpha^{D}),$$

$$I_\alpha^C = g_\alpha^C(\{Y_\delta^{ОД}\}, I_\alpha^C),$$

$$I_\alpha^D = g_\alpha^D(\{Y_\delta^{ОД}\}, I_\alpha^C, U_\alpha),$$

$$Y_\beta^{ОК} = f_\beta^D(\{Y_\alpha^{ОД}\}, I_\beta^D),$$

$$Y_\beta^{ЧК} = f_\beta^D(\{Y_\alpha^{ОК}\}, I_\beta^E),$$

$$I_\alpha^D = g_\beta^D(\{Y_\alpha^{ОД}\}, I_\beta^D),$$

$$I_\beta^E = g_\beta^E(\{Y_\alpha^{ОД}\}, I_\beta^E, U_\beta),$$

$$Y_\gamma^{ЧК} = f_\gamma^E \{Y_\gamma^{ОК}\}, I_\gamma^P),$$

$$Y_\gamma^{ЧК} = f_\gamma^E (\{Y_\gamma^{ОК}\}, I_\gamma^E),$$

$$I_\gamma^E = g_\gamma^E(\{Y_\gamma^{ОК}\}, I_\gamma^P),$$

$$I_\gamma^P = g_\gamma^P(\{Y_\gamma^{ЧК}\}, I_\gamma^E, U_\gamma),$$

$$Y_\delta^{ЧД} = f_\delta^P \{Y_\delta^{ЧК}\}, I_\delta^P),$$

$$Y_\gamma^{ОД} = f_\delta^E (\{Y_\delta^{ЧД}\}, I_\delta^C),$$

$$I_\delta^E = g_\delta^E(\{Y_\delta^{ЧК}\}, I_\delta^P),$$

$$I_\delta^P = g_\delta^P(\{Y_\delta^{ЧД}\}, I_\delta^C, U_\delta).$$

Приведенные соотношения в совокупности отражают количественную сторону функционирования схемы на рис. 4. Эта совокупность может рассматриваться как паттерн для параметрической функциональной модели системной экономики. Параметризация и калибровка (спецификация численных значений параметров) представляют собой отдельные задачи и требуют дальнейшего исследования.

Литература

1. Клейнер Г.Б. Системная экономика и системно-ориентированное моделирование // Экономика и математические методы. 2013. № 3. С. 71-93.
2. Клейнер Г. Системный ресурс экономики // Вопросы экономики, 2011. № 1. С. 89-100.
3. Клейнер Г.Б. Развитие теории экономических систем и ее применение в корпоративном и стратегическом управлении. М.: Препринт ЦЭМИ РАН, 2010.
4. Клейнер Г.Б. Системная парадигма и экономическая политика // Общественные науки и современность. № 2. С. 141-149, № 3. С. 99-114.
5. Клейнер Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 3. С. 111-126.
6. Корнаи Я. Системная парадигма // Вопросы экономики. 2002. № 4. С. 4–22.

О.А. Андрюшкевич, И.М. Денисова

Особенности формирования национальных инновационных систем[1]

На рубеже XXI в. начали развиваться процессы, меняющие основной вектор экономического развития и формирующие экономики нового типа, где сектор знаний играет решающую роль, а производство знаний является источником экономического роста. Это означает, что доминантой экономического роста становится система научных знаний, новых технологий, инновационных процессов, продуктов и услуг, а также новых форм организации бизнеса. Инновации становятся стратегическим фактором роста, влияют на структуру общественного производства, видоизменяют экономическую организацию общества, стабилизируют социальную ситуацию в стране. Наиболее интенсивно процесс формирования национальных инновационных систем (НИС) происходит в развитых экономиках. В зависимости от национальных особенностей и экономического потенциала формируются различные типы (или модели) НИС.

В данной работе предлагается анализ НИС как новой формы экономического развития, а также зарубежного опыта формирования как существующих, так и перспективных моделей НИС.

1. Понятие национальной инновационной системы

Основоположниками теории формирования НИС считают К. Фримэна (Институт исследования научной политики Сассекского университета, Великобритания), Б.-А. Лундвалла (университет г. Упсала, Швеция) и Р. Нельсона (Колумбийский университет, США), проанализировавших развитие инновационной деятельности в различных странах и на этой основе давших определение понятия НИС. При этом в основу исследования были положены результаты, ранее полученные Й. Шумпетером (теория экономической динамики), Ф. Хайеком (концепция рассеянного знания), Д. Нортом (институциональная теория), Р. Солоу (роль НТП в экономическом росте), П. Ромером и Р. Лукасом (новая теория роста). Каждый из авторов предлагал свое определение НИС, акцентируя внимание на ее отдельных элементах и взаимосвязях. В то же время все они придерживались общих методологических принципов:

– особую роль в экономическом развитии играет знание;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-06-00109а

– главным фактором экономической динамики является конкуренция между предпринимателями, в основе которой лежат инновации;

– институциональный контекст инновационной деятельности прямо влияет на ее содержание и структуру.

В отечественной литературе также отмечаются основные характеристики НИС:

1) системный характер, то есть рассмотрение ее как совокупности особым образом взаимодействующих элементов;

2) институциональный аспект, то есть влияние существующих в обществе формальных и неформальных институтов на темпы и масштабы развития инноваций;

3) распространение новых знаний и технологий как главная функция НИС.

С начала 90-х годов XX века концепция НИС начинает использоваться в исследованиях, проводимых международными организациями, в т.ч. ОЭСР, а также в рамках политических программ отдельных государств. В настоящее время концепция НИС получила широкое развитие в отечественной и зарубежной науке по следующим основным направлениям: различные подходы к определению и типологии инноваций; исследования в области развития НИС, понятийного аппарата, государственной инновационной политики; исследования динамики инновационных процессов; анализа инноваций на уровне предприятий; разработка моделей научно-технического прогресса и учета факторов, характеризующих интеллектуальную и инновационную деятельность при построении макроэкономических производственных функций; разработка моделей экономического роста с учетом инновационной деятельности; анализ и моделирование диффузии инноваций; моделирование поведения на конкурентных рынках с инновациями; оценка роли регионов в развитии экономики инноваций и формирования инновационной политики [1].

Несмотря на большое разнообразие исследований, посвященных НИС, пока не существует общепризнанного определения этого понятия. Приведем некоторые определения НИС (см. табл. 1).

Таблица 1
(Источник: составлено по [2–5])

Основные определения национальной экономической системы

Автор	Определение НИС
Б.-А.Лундвалл (Lundvall, 1992)	Система инноваций формируется из элементов и отношений, которые взаимодействуют в производстве, распространении и использовании нового и экономически полезного знания, … национальная система включает элементы и отношения, расположенные внутри границ национального государства
К.Фримен (Freeman, 1987)	Сеть институтов в общественном и частном секторах, в результате деятельности и взаимодействия которых создаются, импортируются, модифицируются и распространяются новые технологии
Р.Нельсон (Nelson, 1993)	Комплекс институтов, чьи взаимодействия детерминируют инновационную деятельность национальных фирм
Пател и Павитт (Patel and Pavitt, 1994)	Национальные институты, их системы стимулов и компетенций, которые определяют степень и направления технологического обучения (или деятельности, генерирующей изменения) внутри страны
С.Меткалф (Metcalfe, 1995)	Набор различных институтов, в совокупности и индивидуально вносящих вклад в развитие и распространение новых технологий и создающих рамки, в которых правительства формируют и реализуют политику влияния на инновационные процессы. Как таковая, это система взаимосвязанных институтов для создания, хранения и трансфера знаний, навыков и инструментов, определяющих развитие новых технологий
Н.Иванова (2001)	Совокупность взаимосвязанных организаций (структур), занятых производством и коммерческой реализацией научных знаний и технологий в пределах национальных границ (мелкие и крупные компании, университеты, лаборатории, технопарки и инкубаторы). В то же время НИС – комплекс институтов правового, финансового и социального характера, обеспечивающих инновационные процессы и имеющих прочные национальные корни, традиции, политические и культурные особенности
Основы политики РФ в области развития национальной инновационной системы на период до 2010 года (2004)	Экономическая система, представляющая собой совокупность хозяйствующих субъектов, взаимодействующих в процессе получения, освоения, распространения и использования экономически выгодных знаний и технологий
Концепция долгосрочного социально-экономического развития РФ на период до 2020 года (2008)	Инновационный социально ориентированный тип экономического развития Российской Федерации имеет ряд качественных и количественных характеристик. Во-первых, он опирается на модернизацию традиционных секторов российской экономики (нефтегазового, сырьевого, аграрного и транспортного). Во-вторых, превращение инноваций в ведущий фактор экономического роста во всех секторах экономики, повышение производительности труда в секторах, определяющих национальную конкурентоспособность, и снижение энергоемкости. В-третьих, формирование новой экономики – экономики знаний и высоких технологий, которая становится одним из ведущих секторов национальной экономики. При этом под экономикой знаний и высоких тех-

	нологий понимаются сферы профессионального образования, высокотехнологичной медицинской помощи, науки и опытно-конструкторских разработок, связи и телекоммуникаций, наукоемкие подотрасли химии и машиностроения (для статистических оценок используется группировка образования и здравоохранения в целом, науки и информации, секторов связи и машиностроения).
Постановление Правительства РФ от 24 июля 1998 г. N 832 «О Концепции инновационной политики РФ на 1998 – 2000 годы»	Инновация (нововведение) – конечный результат инновационной деятельности, получивший реализацию в виде нового или усовершенствованного продукта, реализуемого на рынке, нового или усовершенствованного технологического процесса, используемого в практической деятельности. Инновационная деятельность – процесс, направленный на реализацию результатов законченных научных исследований и разработок либо иных научно-технических достижений в новый или усовершенствованный продукт, реализуемый на рынке, в новый или усовершенствованный технологический процесс, используемый в практической деятельности, а также связанные с этим дополнительные научные исследования и разработки. Государственная инновационная политика – определение органами государственной власти Российской Федерации и органами государственной власти субъектов Российской Федерации целей инновационной стратегии и механизмов поддержки приоритетных инновационных программ и проектов. Инновационный потенциал (государства, региона, отрасли, организации) – совокупность различных видов ресурсов, включая материальные, финансовые, интеллектуальные, научно-технические и иные ресурсы, необходимые для осуществления инновационной деятельности. Инновационная сфера – область деятельности производителей и потребителей инновационной продукции (работ, услуг), включающая создание и распространение инноваций. Инновационная инфраструктура – организации, способствующие осуществлению инновационной деятельности (инновационно-технологические центры, технологические инкубаторы, технопарки, учебно-деловые центры и другие специализированные организации). Инновационная программа (федеральная, межгосударственная, региональная, межрегиональная, отраслевая) – комплекс инновационных проектов и мероприятий, согласованный по ресурсам, исполнителям и срокам их осуществления и обеспечивающий эффективное решение задач по освоению и распространению принципиально новых видов продукции (технологий).
Голиченко О.Г. 2006	Совокупность национальных государственных, частных и общественных организаций и механизмов их взаимодействия, в рамках которых осуществляется деятельность по созданию, хранению и распространению новых знаний и технологий.

Наличие различных определений НИС говорит о том, что до сих пор не выработана единая точка зрения на сущность, структуру и функции НИС, которые во многом определяются национальными особенностями. Так, например, в США понимают инновационную систему в узком смысле как научно-технологическую систему, включающую, прежде всего институты, генерирующие новое знание (университеты, исследовательские лаборатории, высокотехнологичные корпорации, инновационный бизнес). Европейская школа понимает термин «инновационная система» в широком смысле не только как производство, но и как распространение, усвоение и использование знания через процессы обучения, протекающие между экономическими субъектами, эксперименты и усовершенствование технологий и продуктов в процессе их использования. В настоящее время Б.-А.Лундваллом делается попытка объединить два описанных выше подхода как две взаимодополняющие подсистемы НИС в рамках проекта BRICS – сравнительного изучения НИС пяти крупных развивающихся экономик – Бразилии, России, Индии, Китая, Южноафриканской республики. Кроме того, в последнее время широко используются понятия региональной инновационной системы и секторальной инновационной системы, а также наднациональной инновационной системы и глобальной инновационной системы. Инновационная система может быть наднациональной в нескольких смыслах – как действительно глобальная, охватывающая большинство стран мира, или как включающая в себя часть мирового пространства (например, Европейский Союз) [2]. Кроме того, предлагается новое направление анализа НИС – исследование НИС в динамике, как процесс постепенной трансформации одного комплекса институтов в другой или как процесс радикальных институциональных изменений.

В России при разработке концепций НИС долгое время доминировал подход, при котором основное внимание уделялось высокотехнологичным отраслям промышленности и науке, в первую очередь сосредоточенной в рамках РАН. Однако целесообразнее опираться на расширенное толкование НИС и формировать систему гибких горизонтальных взаимодействий между всеми экономическими субъектами, позволяющую им быстро генерировать, осваивать и распространять новые знания. Представляется наиболее приемлемым определение НИС как совокупность взаимосвязанных организаций (структур), занятых производством и коммерческой реализацией научных знаний и технологий в пределах национальных границ (мелкие и крупные компании, университеты, лаборатории, технопарки и инкубаторы). В то же время НИС – комплекс институтов правового, финансового и социального характера, обеспечивающих инновационные процессы и имеющих прочные национальные корни, традиции, политические и культурные особенности [6].

2. Структура НИС

Хотя национальные инновационные системы довольно сильно отличаются друг от друга в деталях, у них имеются общие черты и базовая структура, необходимая для их функционирования, которая включает в себя совокупность взаимодействующих между собой блоков. Как правило, выделяют пять таких блоков:

I. Креативный блок, или блок порождения знания (университеты, научные институты, сложные социальные сети, обеспечивающие неформальное взаимодействие исследователей из разных институтов и университетов).

II. Блок трансфера технологий (различного рода посредники, в том числе некоммерческие фонды профессиональной экспертизы, формирующие особую среду с широкими сетевыми связями, способными обеспечить контакты авторов креативных идей с потенциальными покупателями).

III. Блок финансирования. Для трансформации идеи в опытный образец (фазы инженерной разработки, изготовления макета, создания опытного производственного образца) и последующего запуска его в массовое производство необходимо внешнее финансирование. Существуют три потенциальных источника такого финансирования.

1. Банковский кредит. Автор идеи или поддерживающее его учреждение создает компанию по производству нового продукта и берет банковский кредит.

2. Продажа инновации. Автор идеи продает ее одной из крупных фирм, производящих сходный продукт. Данный способ финансирования, избавляя инноватора от риска, одновременно лишает его и прибыли, связанной с внедрением созданной им инновации в производство.

3. Венчурное финансирование. На основе изучения предлагаемой инновации и составленного инноватором бизнес-плана, венчурная компания создает предприятие, руководителем которого обычно становится инноватор. В то же время венчурная компания сохраняет за собой полный контроль над деятельностью этого предприятия и в случае его недостаточной прибыльности может продать его.

IV. Блок производства. Возможны два альтернативных варианта организации инновационного производства. Первый – включение такого производства в производственные структуры одной из крупных фирм, что позволяет использовать преимущества вертикальной интеграции и уменьшить трансакционные издержки за счет отказа от самостоятельного менеджериального комплекса (бухгалтерии, системы учета кадров и т.д.). Второй – создание нового предприятия, где производственные трансакционные издержки минимизируются благодаря его небольшим размерам.

V. Блок подготовки кадров, включая инновационных менеджеров (университеты, а также учреждения, ориентированные на формирование научных кадров, национальные инженерные школы) [7].

По мнению ряда специалистов, основные элементы инновационной системы можно объединить в шесть основных блоков: 1) бизнес-сектор (компании, производящие инновационные продукты); 2) государство (правительственные организации, определяющие инновационную политику, министерства, ведомства и другие регулирующие и финансирующие агентства);

3) научно-исследовательский сектор (вузы и НИИ); 4) организации по трансферту технологий и другие элементы инновационной инфраструктуры (технопарки, бизнес-инкубаторы, центры по коммерциализации и трансферту инноваций); 5) организованное гражданское общество (общественные организации, влияющие на инновационное развитие); 6) зарубежные партнеры по инновационной деятельности [8]. Обобщая результаты отечественных и зарубежных исследований, некоторые экономисты представляют структуру НИС как систему из десяти блоков: 1) стратегия и приоритеты инновационной политики, 2) нормативно-правовая база в области развития и стимулирования инновационной деятельности, 3) инновационная инфраструктура, 4) система генерации и распространения знаний, 5) инновационные предприятия, включая крупные научно-промышленные корпорации, высокотехнологичное промышленное производство, 6) учреждения в сфере образования и профессионального обучения, готовящие кадры по организации и управлению в инновационной сфере, 7) рыночные условия, способствующие внедрению инноваций, 8) маркетинговая и финансовая составляющие системы создания и продвижения инноваций, 9) система взаимодействия с международной инновационной средой, 10) механизм инновационного развития, отражающий систему взаимоотношений между перечисленными элементами [9].

Таким образом, базовая структура НИС содержит блоки, генерирующие знания и занимающиеся подготовкой инновационных кадров; создающие инновационную инфраструктуру; производящие инновационный продукт и проводящие государственную политику. Как правило, взаимодействие между блоками осуществляется по схеме: «государство-наука», «наука-производство», «государство-производство». Простейшая модель взаимодействия элементов НИС сводится к тому, что роль частного сектора заключается в разработке технологий на основе собственных исследований и в рыночном освоении инноваций. Роль государства – в содействии производству фундаментального знания и комплекса технологий стратегического характера, а также в создании инфраструктуры и благоприятных институциональных условий для инновационной деятельности. Различные варианты реализации этой условной модели формируют национальные инновационные системы.

3. Модели инновационного развития

Анализ существующих в мире национальных инновационных систем позволяет выделить четыре вида НИС. Первый из них условно называют «евроатлантической» моделью, второй – «восточноазиатской», третий – «альтернативной», четвертый – модель «тройной спирали».

Евроатлантическая модель является моделью полного инновационного цикла – от возникновения инновационной идеи до массового производства готового продукта. В использующих эту модель странах, как правило, представлены все компоненты структуры инновационной системы: фундаментальная и прикладная наука, исследования и разработки, создание опытных образцов и запуск их в массовое производство. Эту модель используют развитые страны, лидирующие в рейтингах мировой конкурентоспособности национальных экономик (Великобритания, Германия, Франция и др.).

Восточноазиатская модель – это модель инновационного развития, в инновационном цикле которой отсутствует стадия формирования фундаментальных идей. Основанные на этой модели инновационные системы практически полностью лишены компонента фундаментальной науки (а отчасти и прикладной). Данная модель используется странами восточно-азиатского региона (Япония, Южная Корея, Гонконг, Тайвань). Будучи ориентированы на экспорт высокотехнологической продукции, государства Восточной Азии, как правило, заимствуют технологии у стран, следующих «традиционной» модели. Классическим образцом данной модели инновационного развития считается инновационная система Японии.

Альтернативная модель инновационного развития используется преимущественно в сельскохозяйственных странах, не обладающих значительным потенциалом в области фундаментальной и прикладной науки и не имеющих богатых запасов сырья, технологии переработки, продажа которого могли бы стать основой национальной конкурентоспособности. Вследствие этого в таких инновационных системах слабо представлен или вообще отсутствует не только блок фундаментальной и прикладной науки, но и высокотехнологический компонент как таковой. Не будучи в состоянии добиться заметных результатов в создании новых технологий, эти страны в своей инновационной политике делают упор на подготовку кадров в сферах экономики, финансов, менеджмента, социологии и психологии труда, а также на развитие отдельных отраслей легкой промышленности, креативной индустрии и рекреации. Большое внимание уделяется подготовке менеджмента для местных представительств транснациональных корпораций, международных банков, международных политических структур. К этой модели относят национальные инновационные системы Таиланда, Чили, Турции, Португалии и т.д. [10].

И наконец, *модель «тройной спирали»,* получившая практическую реализацию только в последнее десятилетие в США, имеет принципиальное отличие от перечисленных выше не только структурой НИС, но и механизмом взаимодействия ее отдельных элементов. Сегодня процесс формирования отдельных элементов этой модели начинает развиваться и в некоторых странах Западной Европы и Японии.

Рассмотрим четыре вида модели НИС более подробно на примере отдельных стран.

3.1.Евроатлантическая модель НИС получила широкое распространение в странах Западной Европы, имеющих многолетние научные традиции, сложившиеся, в том числе благодаря многочисленным военным конфликтам. Так, после второй мировой войны, оказавшись в блоке НАТО и под защитой американского ядерного оружия, эти страны кардинальным образом изменили свои исследовательские приоритеты, сделав упор на относительно дешевые способы получения научно-технической информации. Например, *Великобритания*, отказавшаяся в конце 1940-х годов от дорогостоящих исследований в области ядерной физики (за исключением непосредственно связанных с производством ядерного оружия) и сфокусировавшая внимание на радиоастрономии и изучении биологических свойств высокомолекулярных веществ, добилась немалых успехов, положив начало созданию двух фундаментальных научных дисциплин – астрофизики и молекулярной биологии. Сегодня британская инновационная система сосредоточена вокруг небольшого числа университетов мирового уровня (Оксфорд, Кембридж, Лондонский университет). Ее инновационная инфраструктура стала интенсивно развиваться с начала 2000-х гг., когда был создан Совет по технологическим стратегиям и принята инновационная стратегия долгосрочного развития страны. Совет осуществляет инвестиции в создание новых технологий, поддерживает их развитие и коммерциализацию. Кроме того, в стране создаются многочисленные инновационные центры двух типов. Первые ориентированы на разработку специфической технологии и продвижение ее использования в соответствии с потребностями или возможностями бизнеса; вторые – фокусируются на определенном секторе экономики или рынке для объединения взаимодополняющих дисциплин науки и технологии [11].

Идея концентрации НИС вокруг крупнейших университетов реализована в Италии и ФРГ. Напротив, во *Франции* подавляющая часть фундаментальных исследований (за исключением математических) осуществляется в рамках Национального центра научных исследований, отчасти напоминающего Российскую академию наук. Математические исследования в основном сконцентрированы в Эколь Нормаль, а также в нескольких крупных университетах (Университет Нанси и Сорбонна).

В НИС *малых европейских стран* (Швеция, Нидерланды, Дания, Швейцария, Финляндия) сделан акцент на развитии университетской фундаментальной науки, финансируемой преимущественно государством. Например, в Швеции – это математика и классические исследования (Уппсальский и Лундский университеты), экономика (Уппсальский университет и Стокгольмская школа экономики), компьютерные исследования (Университет Линчёпинга), биология и медицина (Каролингский институт), новые технологии и проблемы городского планирования (Королевский технологический институт в Стокгольме); в Нидерландах – физика, право, экономика, классические исследования и востоковедение (Лейденский университет), экономика и проблемы энергетики (Гронингенский университет), административное управление и история науки (Амстердамский университет). Важное место в инновационных системах рассматриваемых стран занимают национальные академии наук. В Швеции и Нидерландах действуют Институты высших исследований (в Уппсале и Вассенаре соответственно). Эти институты обеспечивают не только подготовку высококвалифицированных кадров в области фундаментальной науки, но и постоянное взаимодействие наиболее талантливой молодежи с международной научной элитой. Прикладные исследования в малых европейских странах финансируются, прежде всего, за счет грантов и совместных проектов с крупными транснациональными корпорациями («Шелл» и «Филипс» – в Нидерландах; «Вольво» и «Эрикссон» – в Швеции). Вместе с тем активное участие в финансировании исследований и разработок принимает средний и малый бизнес. Большое значение имеют также региональные проекты в области высоких технологий, использующие в качестве образца Силиконовую долину США. Весьма показательны в этом плане «энергетическая долина» в Гронингене (Нидерланды), ставшая центром энергосберегающих технологий и альтернативного углеводородам топлива, а также «компьютерная долина» в Линчёпинге (Швеция), где сосредоточены исследовательские учреждения, технопарки и венчурные предприятия в сфере компьютерных технологий и телекоммуникаций. Сходные принципы построения (мощная университетская наука по ограниченному числу направлений, финансируемая государством; поддержка бизнесом прикладных исследований и разработок; региональная концентрация усилий в области науки и технологий) используются и в национальных инновационных системах Дании, Финляндии и Швейцарии, что обеспечивает им лидерство в рейтингах мировой конкурентоспособности национальных экономик [7]. В то же время в каждой из перечисленных выше стран имеются национальные особенности в построении НИС. Так, в *Дании* помимо университетов важной частью инновационной системы являются отраслевые научно-исследовательские институты. Они прикреплены к различным министерствам и проводят научные исследования согласно потребностям соответствующего министерства. Кроме того, существует система GTS-институтов, выступающая связующим элементом между государственными и частными структурами. Это независимые консалтинговые компании, которые разрабатывают и продают прикладные знания и технологические услуги частным предприятиям и государственным учреждениям. Они являются некоммерческой организацией, созданной Министерством науки, технологии и инноваций и осуществляют три основных вида деятельности: самостоятельное развитие ноу-хау, участие в совместных проектах наряду с государственными научно-исследовательскими учреждениями и частными компаниями, а также коммерческая деятельность. Важным элементом датской НИС являются научные парки, соучредители инновационных инкубаторов [11].

В настоящее время в странах Западной Европы развиваются процессы объединения НИС в единое научно-техническое и инновационное пространство. С этой целью разработаны специальные механизмы (различные программы, технологические платформы, дорожные карты и проч.), способствующие реализации новой инновационной стратегии ЕС. Эта стратегия направлена на решение задачи ликвидации горизонтальной и вертикальной фрагментации научно-технической и инновационной политики и построение единого европейского рынка инноваций в целях повышения конкурентоспособности относительно США и других стран. Координационные инструменты панъевропейских программ (инновационные сети, технологические платформы, совместные технологические инициативы, «дорожная карта» ESFRI), а также новые виды партнерств, служат в качестве главных механизмов синхронизации национальных политик стран-членов и наднациональной политики ЕС. Единое европейское инновационное пространство представляет собой сложную взаимозависимость и взаимодополняемость уровней формирования (региональный, панъевропейский, внутриевропейский, национальный, региональный), составных элементов (инновационные разработки, технологии, инновации, рынки, общество) и инструментов (создание институтов, национальная и панъевропейская политика и программы, прямое и «мягкое» регулирование). Конвергенция научно-технического и инновационного развития европейского региона идет, прежде всего, в направлениях, связанных с задачей решения ключевых европейских социально-общественных проблем – изменение климата, построение низкоуглеродной экономики, здравоохранение и т.д. В результате инновационные системы в Европе перестают быть исключительно национальными, региональными или панъевропейскими. Идет процесс реконфигурации и образования многоуровневой или многослойной инновационной системы. Национальная инновационная система продолжает оставаться ядром, однако ее границы размываются, сферы ответственности перемещаются на другие уровни, образуются новые формы сотрудничества. Транснациональная кооперация усиливает и расширяет единую европейскую инновационную систему [12].

3.2. Восточноазиатская модель НИС, получившая развитие в восточно-азиатском регионе, отличается от прочих моделей, прежде всего, своей структурой, в которой университеты как центр фундаментальных разработок играют гораздо меньшую роль, нежели исследовательские лаборатории при корпорациях. Типичным примером такого рода НИС считается *Япония*, где инновационная система ориентирована в основном на технические инновации и новейшие технологии, а не на производство фундаментальных знаний.

НИС Японии складывалась постепенно, в ее развитии можно выделить три этапа: первый – 50-е – 80-е гг. XX в.; второй – 80-е – 2000-е гг.; третий – начало XXI в. по настоящее время. Каждый из этих этапов имеет свои особенности, которые определялись экономическим положением, проводимой научной, технической, образовательной и социальной политикой. В послевоенные годы, вплоть до 70-х гг. XX в., научно-техническая и инновационная политика Японии строилась на использовании двух подходов: во-первых, на заимствовании зарубежных научно-технических достижений (покупка лицензий, создание совместных предприятий, участие в многонациональных исследовательских проектах) и, во-вторых, поощрении развития собственных исследований, прежде всего, на корпоративной основе (на базе крупнейших корпораций). Вплоть до конца 80-х гг. XX в. преобладал первый подход, хотя его значимость в общей стратегии постепенно сокращалась. В 80-е гг. стал последовательно формироваться курс на максимальную научно-техническую самодостаточность, с упором на национальные инновации. Был разработан и внедрен ряд исследовательских программ, из которых наиболее значимыми стали разработанная Министерством внешней торговли и промышленности «Программа развития базовых технологий для новых отраслей» и программа «Гибкие исследовательские системы для развития созидательной науки и технологий», разработанная Управлением по науке и технике Японии [13].

Целью последней было обнаружение ростков революционной технологии, попытка стимулировать открытия и изобретения, которые положили бы начало новым направлениям НТП. Была применена уникальная для Японии организация исследований, которая характеризовалась как система «проектных лидеров» или государственных венчуров. В 1985 г. совет по науке и технике опубликовал программный документ «Основы научно-технической политики», который в своем переработанном издании (1992 г.) определил 7 главных направлений развития японской науки до конца XX в.:

1) обеспечение гармонии в системе «наука и техника – человек и общество»;
2) поддержка занятых в сфере науки и техники;
3) увеличение расходов на НИОКР;
4) развитие научно-исследовательской инфраструктуры;
5) стимулирование оригинального мышления и творчества исследователей;
6) интенсификация международной научно-технической деятельности;
7) содействие научно-техническому развитию периферийных районов страны.

Третий этап формирования НИС Японии можно отнести к началу 2000-х гг., когда Совет по научно-технической политике на основе анализа глобальных тенденций развития мировой экономики и актуальных проблем, стоящих перед японским обществом, выработал план национальной стратегии в области научно-технического развития. В основе стратегии – выдвижение в качестве основного национального приоритета по фундаментальным исследованиям и выделение двух крупномасштабных приоритетных областей. Первая из них включает четыре раздела: науки о жизни, информатику и телекоммуникационные нанотехнологии и материалы, а также экологию. Вторая область охватывает преимущественно прикладные исследования и технологии, включая энергетику и ресурсы, промышленные технологии, производственную и социальную инфраструктуру, проблемы Земли и Космоса. Все названные разделы являются приоритетами инновационного развития и на исходе первого десятилетия XXI в.

В целом можно констатировать, что формирование НИС Японии осуществлялось посредством последовательного перехода от преимущественного импортирования передовых зарубежных технологий и ноу-хау к опоре на собственные оригинальные разработки и научно-технические достижения на основе отечественных фундаментальных исследований. Подавляющая часть фундаментальных исследований в Японии ведется в университетах и государственных лабораториях. Однако степень их внедрения остается недостаточной. Большая часть научно-технических разработок прикладного характера по-прежнему выполняется (и остается) в лабораториях крупных промышленных корпораций, без передачи потенциальным пользователям в пределах соответствующей отрасли. Между государственными фундаментальными исследованиями и прикладными разработками в частном секторе не всегда соблюдается необходимая координация. Основную долю расходов на НИОКР в Японии несет частный сектор. Такой подход обеспечил Японии наибольшие успехи именно на тех направлениях технического прогресса, которые связаны с производством потребительских товаров массового спроса. В области фундаментальных исследований и немассового производства заметно отставание Японии от других развитых стран [13].

Попытки решения проблемы взаимодействия деятельности университетов и исследовательских институтов с промышленностью были предприняты еще в 80-х гг. с принятием концепции, направленной на развитие технополюсов при активной государственной поддержке на различных уровнях власти. Для развития национальных технопарков правительством страны были разработаны специальные программы. Сначала было создано более 100 технопарков, обеспечивших образование исследовательских комплексов, которые способствовали быстрому развитию деловых и научно-технических связей. Около 70% японских технопарков создавались для поддержки предприятий малого и среднего бизнеса в регионах, при этом 58% от их общего числа ориентировано на производство высокотехнологичной продукции [14].

Важной отличительной чертой японской системы построения инновационной деятельности в частных компаниях является ее нацеленность на обеспечение максимально эффективного взаимодействия всех основных этапов инновационного процесса – НИОКР, производство, сбыт, маркетинг. Все эти составные части организованы таким образом, чтобы на протяжении всех стадий процесса разработки новой продукции (от начала разработки концепции до организации серийного производства) обеспечить активную генерацию, отбор и быстрое распространение инновационных идей, и их успешную реализацию в продукции. Это достигается за счет используемого японскими компаниями принципа создания организационного знания. Его суть состоит в способности компании как единого целого (а не отдельных его сотрудников) создавать новое знание, распространять его по всей организации и воплощать в продукции и услугах. Японские менеджеры считают, что «знание», выражаемое словами и цифрами, это лишь верхушка айсберга, а знание в основном не формализовано, т. е. не является чем-то легко видимым и объяснимым. Неформализованное знание существует на уровне индивидуума, тесно связано с действиями и опытом конкретного человека, что обусловливает специфику методов передачи и распространения знания.

Основным средством обеспечения эффективного взаимодействия всех этапов инновационного процесса в крупных японских компаниях является формирование команд разработчиков из сотрудников различных подразделений компании. В японских компаниях нет монополии какого-либо отдела или исследовательской группы на создание знания. Поэтому разработка инновационной продукции в японской компании – это результат активного взаимодействия всех групп, входящих в команду разработчиков.

Характеризуя в целом НИС Японии, отметим, что прежняя модель, основанная на заимствованиях и дальнейшем совершенствовании зарубежных инноваций и технологий, себя исчерпала к началу 90-х гг. В настоящее время Япония находится на стадии перехода к принципиально новой модели инновационного развития, которая призвана обеспечить экономическое и научно – техническое лидерство за счет коммерческой реализации национальными компаниями научных достижений и разработок, не применявшихся ранее конкурентами. Важнейшей особенностью новой НИС является реализация разработанной в стране концепции интеллектуального созидания [13].

3.3. Альтернативная модель инновационного развития формируется в странах, не обладающих значительным научным потенциалом, вследствие чего в НИС практически отсутствует блок фундаментальной и прикладной науки. Примером такого рода НИС могут служить инновационные системы Таиланда, Чили, Турции, Иордании, Португалии. Так, *Таиланд и Чили*, развивая сельскохозяйственную сферу экономики и являясь крупнейшими экспортерами сельскохозяйственной продукции, при формировании НИС делают упор на развитие инновационного менеджмента этих отраслей, а также на заимствование новых технологий, а не их разработку. При этом постепенно формируется необходимая инновационная инфраструктура. Так, в Таиланде в 2003г. было создано Национальное инновационное агентство, задачей которого является разработка стратегии инновационного развития и повышение конкурентоспособности национальной экономики. Кроме того, начато создание сети высокотехнологичных парков, включающих местные университеты, государственные и частные НИИ, в том числе с привлечением зарубежных ученых. Основная сфера деятельности – создание новых наноматериалов, развитие нанобиотехнологий и наноэлектроники. Развитие биотехнологий связано с созданием Национального центра генной инженерии и биотехнологий [11]. В Чили в 2006 г. был сформирован Национальный совет по инновациям. Развитие фундаментальной науки происходит преимущественно в университетах. Наибольшей поддержкой со стороны чилийского правительства пользуются ведущие национальные университеты (Университет Чили и Университет Сантьяго де Чили, католические университеты в Вальпараисо и Консепсьоне и Технический университет Федерико Санта Мария в Вальпараисо). Научно-исследовательские центры этих учебных заведений реализуют половину всех программ, осуществляемых в масштабах страны. Постепенно приоритетом инновационной политики Чили становятся отрасли сельского хозяйства, туризм, инновационный менеджмент, а также телекоммуникации и технологии связи.

Начиная с 60-х гг. *Турция* активно работает над формированием НИС, делая акцент на создание инновационной инфраструктуры. Так, в 1963 г. в стране был учрежден Совет по науке и технологиям (TUBITAK), который является центральной организацией, отвечающей за научные исследования и технологическое развитие. Совет наделен большими полномочиями в инновационной сфере – от определения основных направлений научно-технологической и инновационной политики до поиска и поддержки молодых талантов (организация стажировок, обменов, олимпиад и т.д.) и выпуска научных журналов и монографий. Внутри Совета действуют восемь грантовых комитетов, куда входят ведущие специалисты страны в соответствующих областях науки, что позволяет этим комитетам не только распределять грантовое финансирование, но и выполнять функции инновационной экспертизы. Кроме того, в рамках TUBITAK созданы национальная академическая сеть, документационный центр, а также ряд лабораторий. В 1991 г. при Совете был образован неправительственный некоммерческий Фонд технологического развития (TTGV), призванный осуществлять финансирование научных исследований (R&D) в частном секторе. TTGV обеспечивает около 50%

бюджета на R&D в индустриальном секторе. Большая часть проектов, получающих поддержку со стороны Фонда, относится к сферам телекоммуникаций и электроники, определяющим конкурентоспособность национальной экономики; а 73% проектов являются инициативами малого и среднего бизнеса. За последние годы в Турции было сформировано 12 технопарков и зон технологического развития, способствующих усилению кооперации между университетами и производством. Внутри таких технопарков и технологических зон создаются особые условия труда, обеспечивается законодательная и финансовая поддержка исследователей и предпринимателей. Сокращение разрыва между университетской наукой и бизнесом – главная цель и других структур: Центров развития технологий (их в стране уже 11, включая частные), а также специальных центров экспертизы при университетах и Факультета открытого образования. Их специализация – дистанционное обучение, научное взаимодействие и развитые технологий в области телекоммуникаций и информатики. Приоритетными областями являются также биотехнологии и технологии коммуникации, в том числе цифровые (в этих сферах Турции уже удалось добиться значительных успехов), и рекреация. Особое внимание в программах обучения уделяется менеджменту. Соответствующие курсы введены в 52 из 77 университетов страны, причем многие университеты предлагают и программы инновационного менеджмента. Приоритетное развитие образования по сравнению с развитием научных исследований – особенность формирования НИС Турции [7].

Таким образом, альтернативная модель инновационного развития, которая исключает усилия по созданию фундаментальной науки и полного производственного цикла высоких технологий, становится приоритетной и менее затратной для стран, не способных выдержать высокие финансовые и организационные издержки.

3.4. Модель тройной спирали является новейшей моделью формирования НИС, получившей развитие на базе евроатлантической модели. В своем законченном виде она пока не существует ни в одной стране. Наибольшее развитие она получила в США, а ее отдельные элементы – в некоторых развитых странах Западной Европы, Бразилии и Японии.

Теория тройной спирали как развитие модели инновационного развития создана в Англии и Голландии в начале XXI в. профессором университета Ньюкасла Г. Ицковицем и профессором амстердамского университета Л. Лейдесдорфом. Основанием идеи тройной спирали считается синтез ряда социологических теорий, использование аналогий из биологических наук, а также подобие задачи относительного движения трех тел, которая не имеет общего решения, но возможны частные решения для некоторых конкретных начальных условий. Она адекватна в отношении нелинейных, поливариантных процессов. Ее основные свойства: 1) наличие внутренней неопределенности описываемого процесса, учитывая наложение влияния относительной независимости каждой из выделенных спиралей и эффектов их взаимодействия; 2) наличие многих возможных решений, исходя из конкретности отношений между ними; 3) зависимость этих решений от внешних, начальных условий. Функционирование модели происходит по следующему принципу: каждые две из трех спиралей образуют по отношению к третьей пограничные условия интервальной ситуации, а третья – средовое образование «между», причем эти рамочные функции могут исполнять попарно каждая из выделенных переменных [15, 16].

Применительно к инновационному развитию модель тройной спирали описывает взаимодействие трех институтов (наука-государство-бизнес) на каждом этапе создания инновационного продукта. Это динамическая модель межорганизационных взаимодействий, возникающая в ходе эволюции экономики и общества. Если ранее, в индустриальную эпоху взаимодействие между тремя институтами было линейным, то в современной экономике оно напоминает сцепление спиральных структур ДНК, позволяющее институтам перенимать и удерживать некоторые характеристики друг друга. Ее основными элементами являются: 1) в обществе, основанном на научном знании характерно усиление роли университетов во взаимодействии с промышленностью и правительством; 2) три института (университет-государство-бизнес) стремятся к сотрудничеству, при этом инновационная составляющая генерируется из данного взаимодействия, а не по инициативе государства; 3) в дополнение к традиционным функциям, каждый из трех институтов частично берет на себя функции других институциональных сфер, а способность выполнять нетрадиционные функции является источником инноваций. На практике это выражается в том, что университеты, занимаясь образованием и научными исследованиями, вносят также свой вклад в развитие экономики через создание новых компаний в университетских инкубаторах, бизнес частично оказывает образовательные услуги, а государство выступает как общественный предприниматель и венчурный инвестор в дополнении к своей традиционной законодательной и регулирующей роли. В данной модели ведущее значение отводится университетам, которые превращаются в предпринимательские университеты или университеты промышленного типа, применяя знания на практике и вкладывая результаты в новые образовательные дисциплины [17, 18].

Классическим примером инновационного развития по принципу тройной спирали стало создание Силиконовой долины в *США*. История развития Силиконовой долины связана с желанием властей штата Массачусетс преодолеть влияние великой депрессии 30-х гг. XX в. при помощи совместного диалога бизнеса и науки в лице Массачусетского технологического института. Первоначально это было двойное взаимодействие «университет-предприятие» и «государство-университет». В университете акцент был сделан на развитие не только фундаментальных наук (физика и химия), но и прикладных, ориентированных на практическое применение результатов в производственной деятельности. Основой успеха стали многолетние усилия по созданию фирм, государственной поддержке НИОКР и выработке политики поддержки бизнеса. Постепенно двойные взаимоотношения переросли в отношения тройной спирали. Особую роль в ее становлении сыграли поправки к закону о патентах и торговых знаках 1980 г. Согласно этому документу, университетам и другим исследовательским учреждениям стали принадлежать права интеллектуальной собственности на те разработки, которые были проведены при финансовой поддержке государства [19].

Сегодня основой НИС США является примерно 150 университетов, значительная часть из которых занимает первые места в мировых рейтингах (Гарвардский университет, Йельский университет, Колумбийский университет, университет Беркли, Стэндфордский университет, Массачусетский технологический институт, университет Миннесоты, Висконсинский университет и др.). Именно в университетах сосредоточены основные исследования в области фундаментальной науки и значительная часть прикладных исследований. Университеты имеют большие финансовые ресурсы, обладая земельными владениями и значительными финансовыми фондами, постоянно пополняемыми богатыми выпускниками. В США регулярно проводятся рейтинги университетов, а также рейтинги среди однопрофильных факультетов различных университетов. Такое рейтингование чрезвычайно важно для привлечения студентов и лучших профессоров, а также использования новейших методов обучения [7].

Помимо университетов, в США фундаментальной исследовательской деятельностью занимаются Институты высших исследований (институты в Принстоне, в Лос-Анджелесе, Санта-Фе). Их основной задачей является подготовка кадров высшей квалификации и сотрудничество с представителями мировой науки, работающими в этих институтах на постоянной или временной основе. Так, Эйнштейн и фон Нейман были сотрудниками Принстонского института высших исследований, Мюррей Гелл-Манн (автор теории кварков) – постоянный сотрудник института в Санта-Фе.

Следующей структурой НИС США являются Национальные лаборатории (крупнейшие институты), развивающие какое-либо направление прикладной науки. Так, Лос-Аламосская лаборатория была местом создания атомной бомбы. Помимо этого, в США существует огромное количество частных исследовательских корпораций, из которых наиболее известной является Рэнд-Корпорэйшн. Эти структуры обслуживают интересы американских государственных ведомств, а также частных компаний, занимаясь как фундаментальными, так и прикладными исследованиями на коммерческой основе.

Трансфер технологий в США осуществляется в основном либо из университетов в промышленность с помощью венчурных компаний, либо путём создания внутри самих компаний крупнейших исследовательских подразделений. В настоящее время такими подразделениями обладают практически все наиболее известные компании. Классический пример – лаборатория Белл Телефон Компания по созданию и развитию новейших средств связи.

Однако характеризуя в целом национальную инновационную систему США, следует подчеркнуть решающую роль университетов. А развитая система привлечения лучших профессоров со всего мира и способных студентов позволяет США стать лидером в большинстве областей знания и сконцентрировать специалистов, добивающихся самых высоких научных, технических и технологических достижений [7].

Большое значение в развитии современной НИС США имеет государство, выполняя не только свои традиционные функции в законодательной, финансовой и управленческой сферах, но и определяя перспективы развития экономики путем создания и реализации стратегических программ. Примером такого рода программ может служить Программа передовых технологий, инициированная еще в 1988г. и реализуемая Департаментом торговли США. Цель Программы состоит в поддержке разработки технологий на ранних стадиях, которая осуществляется компаниями или консорциумами, состоящими из фирм, университетов и/или неправительственных лабораторий. Программа является промышленно ориентированной, поэтому университеты и государственные лаборатории участвуют в ней в качестве младших партнеров. Программа сфокусирована на ограниченном числе приоритетных направлений, одним из которых являются биотехнологии. Конкретные исследовательские задачи при этом формулируются компаниями, а не государством. Финансирование является совместным: консорциумы, объединяющие две или более компании, должны оплачивать не менее половины стоимости проекта, а крупные компании – не менее 60%. В случае участия малого предприятия в качестве единственного партнера, оно оплачивает минимум косвенных издержек. Отбор проектов осуществляется на основе двух базовых критериев: выгодность проекта для страны в целом (т.е. возможность появления технологий, которые будут обладать потенциалом для широких межотраслевых приложений, либо открывать новые рынки) и принадлежность проекта к ранней стадии развития технологии. Оценка Программы показала, что ее реализация повлияла на поведение фирм в отношении реализуемых ими НИОКР: 61% фирм увеличил финансирование НИОКР, 67% увеличили объемы инвестиций в долгосрочные наукоемкие проекты, 71% проявил больший, чем раньше, интерес к сотрудничеству и 73% фирм стали более склонны к рисковым вложениям [20]. С точки зрения поощрения сотрудничества между частным сектором, университетами и государственными лабораториями, результаты Программы показали, что значение сотрудничества возрастало.

Наконец, отдельным направлением государственной поддержки является стимулирование технологического развития и коммерциализации результатов НИОКР, полученных в государственном секторе науки и в университетах. В основе последнего лежат такие широко известные законодательные акты, как закон Бэя-Доула, Акт о трансферте технологий и другое законодательство, призванное стимулировать частный сектор коммерциализировать результаты работ, выполненных в рамках государственных научных программ. В частности, появилась возможность передачи прав на интеллектуальную собственность, созданную за счет бюджетных средств, организациям-разработчикам, которые затем могут передавать их на основе лицензирования компаниям, занимающимся коммерциализацией. Государством созданы условия для быстрого трансферта знаний, полученных в университетах и государственных лабораториях, в том числе благодаря программам поддержки старт-апов и введения либеральных правил их создания. Таким образом, перечисленные выше меры государства, а также программы поддержки малого бизнеса, нормы регулирования прав на интеллектуальную собственность, инструменты поощрения взаимодействия науки и бизнеса в области НИОКР способствовали процессу формирования новой модели НИС.

В настоящее время за рубежом разрабатывается усложненный тип модели тройной спирали – модель четвертой спирали, описанная в 2009 г. Ю. Караяннисом и Д. Кэмпбэлл. Эта модель касается интерактивных сетевых взаимодействий на уровне всего национального сообщества, а не только между тремя ведущими институциональными секторами. Поскольку на инновационный процесс стали влиять и другие институты в лице различных социальных слоев, то это обстоятельство нашло теоретическое воплощение в добавлении четвертого элемента к тройной спирали, охватывающего представителей гражданского общества. Считается, что четвертая спираль лучше характеризует современную постиндустриальную экономику, чем тройная, так как в XXI в. гражданское общество приобретает критически важную роль в создании и распространении новых благ и ценностей [18].

Процесс становления модели инновационного развития по принципу тройной спирали наблюдается сегодня и в некоторых развитых странах Европы (на базе полюсов конкурентоспособности, как во Франции), скандинавских странах, Бразилии, Японии (на базе технополисов).

В *России* существуют пока единичные примеры практического опыта использования модели тройной спирали, несмотря на то, что с 1999г. начался интенсивный процесс формирования инновационной инфраструктуры при университетах (студенческие и технологические бизнес-инкубаторы, центры трансфера технологий, офисы коммерциализации разработок, инвестиционные фонды, программы подготовки специалистов в области управления инновациями, агентства по защите интеллектуальной собственности и т.п.). Наибольших успехов в этом направлении добился Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), открывший еще в 2004г. первый студенческий бизнес-инкубатор в России и создавший вокруг себя кольцо наукоемких компаний, в которое входит более 120 предприятий. Кольцо наукоемких компаний – учебно-научно-инновационный комплекс (УНИК) ТУСУРа создан для развития партнерства университета и бизнеса и формирования инициатив по изменению законодательства по инновационной деятельности [21]. Комплекс УНИК составляет ядро инновационного территориального кластера «Информационные технологии и электроника в Томской области», который объединяет 5 университетов, 3 научно-исследовательских института, более 100 малых предприятий Томской области [19].

Кроме того, в структуру университета входит специальная инновационная инфраструктура, включающая:

- Институт инноватики, который занимается подготовкой специалистов в области управления инновационным бизнесом;
- Студенческий бизнес-инкубатор, в котором студенты имеют возможность организовать группу под определенный проект, пройти ряд тренингов и семинаров для организации наукоемкой компании;
- Инвестиционный фонд, который поддерживает студенческие проекты грантами на конкурсной основе;
- Офис коммерциализации разработок, который осуществляет поиск рынков продажи результатов исследований и разработок;
- Технологический бизнес-инкубатор для проведения исследований и разработок, а также организации мелкосерийного производства высокотехнологической продукции;
- Центр международной IT-подготовки, который предоставляет краткосрочные курсы по соответствующему профилю с международной сертификацией;
- Агентство по защите интеллектуальной собственности, которое помогает провести патентование и лицензирование инновационных разработок;
- УНИК (Кольцо наукоемких компаний), которые заказывают научные исследования, создают кафедры и исследовательские лаборатории в университете, а специалисты компаний читают лекции и руководят студенческими проектами [22].

В Институте инноватики развивается приоритетное направление «Инноватика» по целевой подготовке кадров и проведению совместных научных исследований с 18 отечественными и зарубежными вузами и НИИ. Для выполнения работ привлекаются средства федерального бюджета, РГНФ, бюджетов Томской области, г. Томска и Ханты-Мансийского автономного округа, фондов CRDF, DAAD, «Новая Евразия», программы «Фулбрайт», TEMPUS.

Выпускники ТУСУРа непосредственно участвуют в организации инновационных компаний, специализирующихся в наноэлектронике, программном обеспечении, автоматизированных системах управления, интеллектуальной силовой электронике и т.п. Если в 2006 г. было создано 135 компаний, то в 2009г. – уже 198; 15 компаний входят в состав особой экономической зоны Томска. Доходы университета от научной деятельности выросли с 148 млн. руб. в 2006 г. до 459 млн. руб. в 2010 г. [19].

В настоящее время опыт ТУСУРа перенимается и развивается другими крупнейшими университетами страны. Однако, по мнению ряда специалистов, в России пока не созданы необходимые условия для успешного инновационного развития. Так, по мнению Г. Ицковица, к их числу можно отнести: осознание обществом необходимости инновационного развития, консенсус в приоритетах, высокое качество всех ступеней образования, высокий уровень финансирования науки (3-5% ВВП), отсутствие административных барьеров для ведения бизнеса и трансфера технологий, обеспеченность экономики финансами, дружественность к инновациям правовой, финансовой и налоговой систем [23]. Отсутствие необходимых условий отягощается национальными особенностями современного экономического развития – ресурсной направленностью и зависимостью экономики, узким культурным горизонтом руководителей, неспособностью вузов перестроиться на предпринимательский лад и проч. Однако главной причиной является по-прежнему существующий вертикальный (а не горизонтальный, как в тройной спирали) принцип управленческих и хозяйственных взаимосвязей с главенствующей ролью государства. По мнению некоторых экономистов, пока существуют и развиваются двойные, а не тройные отношения в системе «государство-наука-бизнес». При этом прослеживается четыре вида таких парных связей:

- Государство – государственный сектор науки, где несоответствие между спросом и предложением научной продукции и неэффективность использования имеющихся ресурсов приводят к моральному старению человеческого капитала.
- Государство – сырьевые отрасли промышленности, где часть высоких отраслевых доходов расходуется на исследования и разработки, связанные с инновационным развитием, а также на установление доверительных отношений с государством. Бизнес сырьевых отраслей заинтересован в консервации существующего положения.

- Государство – остальной бизнес, где инновационный спрос предприятий концентрируется лишь на приобретении импортного оборудования.
- Наука – бизнес, где взаимодействие остается недостаточно развитым [20].

Доминирование государства практически во всех парных взаимосвязях по принципу вертикали существенно затрудняет становление тройной модели инновационного развития в России.

Заключение

Таким образом, зарубежный опыт формирования различных типов НИС говорит о том, что сегодня большинство стран переориентируют свое экономическое развитие в сторону экономики инноваций, выбирая наиболее адекватную национальным особенностям модель НИС. При этом выбор модели во многом определяется существующим уровнем экономического развития, системой образования и науки. Развитие той или иной модели НИС для конкретной экономики – длительный процесс, в котором взаимодействуют бизнес и государство, выполняя свои традиционные функции и приобретая новые. Лидерами становятся страны с высоким научным и образовательным потенциалом, способные быстро внедрить в производство инновационные разработки. Этой задаче во многом способствуют налаженные деловые связи науки и бизнеса, а также активная протекционистская политика государства.

Итак, будущее – за инновационной экономикой. Поэтому представляется закономерной точка зрения американских экономистов о том, что формирование национальной инновационной системы в США является самым выдающимся событием XX в., поскольку именно НИС служит основой достижений в любой сфере, механизмом, который позволяет удовлетворить любую потребность общества [9].

В то время, когда в развитых странах успешно развивается новая модель инновационной системы и формируются новые подходы к объяснению процессов возникновения и распространения инноваций, в России этот процесс пока находится на первоначальной стадии становления.

Литература

1. Щепина И.Н. Инновационная деятельность на региональном уровне: типы поведения регионов и их устойчивость. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университет, 2012.
2. Кузнецов В.В., Крайнюков А.Н. Концепции инновационного развития на базе системного подхода.//Инновационная деятельность. №1 (4). 2007. http://gendocs.ru/7654.
3. Голиченко О.Г. Национальная инновационная система России: состояние и пути развития. М.: Наука, 2006.
4. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020г. http://www.ifap.ru/ofdocs/rus/rus006.pdf
5. Постановление Правительства РФ от 24 июля 1998 г. N 832 «О Концепции инновационной политики Российской Федерации на 1998 – 2000 годы» http://base.garant.ru/179112/
6. Инновационная экономика/Ред. А.А. Дынкин, Н.И. Иванова; 2-е изд., испр. и доп., М.: Наука, 2004.
7. Сергеев В.М., Алексеенкова Е.С., Нечаев В.Д. Типология моделей инновационного развития// Полития. № 4 (51). 2008
8. Национальные инновационные системы в России и ЕС. Под редакцией: Иванова В.В. (Россия), Ивановой Н.И. (Россия), Розебума Й (Нидерланды), Хайсберса Х. (Нидерланды). М.: ЦИПРАН РАН, 2006.
9. Зверев А.В. Формирование национальной инновационной системы: мировой опыт и российские перспективы. Автореферат диссертации д.э.н., М., 2009. http://dissers.ru/avtoreferati-dissertatsii-ekonomika/a840.php.
10. Козлова Ж.М. Проблемы становления национальной инновационной системы в России.//Вестник Алтайской академии экономики и права. №2 (20). 2011. http://journal-aael.intelbi.ru
11. Обзор международного опыта инновационного развития. // Наука и технологии России. www.strf.ru/material.aspx?d_no=39679
12. Глобальная трансформация инновационных систем. Под ред. Н.И.Ивановой, М., ИМЭМО РАН, 2010
13. Авдокушин Е.Ф. Национальная инновационная система Японии.// Вопросы новой экономики. № 4 (16). 2010.
14. Зарубежный опыт государственной поддержки инновационных малых и средних предприятий. Кировский областной фонд поддержки малого и среднего предпринимательства. http://www.kfpp.ru/analytics/material/innovation.php.

15. Киященко Л.П. Тройная спираль трансдисциплинарности: университет-правительство-бизнес. www.courier-edu.ru/cour1067/7100.htm
16. Дробот П.Н., Дробот Д.А. Тетеркина Н.Г Проблема количественного анализа в модели тройной спирали. Томский государственный университет, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. www.tusur.ru
17. Ицковиц Г. Модель тройной спирали// Инновационная Россия. №4. 2011
18. Катуков Д.Д., Малыгин В.Е., Смородинская Н.В. Институциональная среда глобализированной экономики: развитие сетевых взаимодействий. М., Институт экономики, 2012
19. Ицковиц Г. ДНК инновационного развития. ОПЕК.ru. Экспертный портал Высшей школы экономики.//www.opec.ru/1335337.html
20. Институт экономики переходного периода. Научные труды № 115Р. Дежина И.Г., Киселева В.В. Государство, наука и бизнес в инновационной системе России. М.: ИЭПП, 2008. http://www.iep.ru/files/text/working_papers/115.pdf
21. Кобзева Л.В. Предпринимательский университет: как университету встроиться в экономику в новом десятилетии.//innclub.info/wp-content/uploads/2011
22. ТУСУР.// www.tusur.ru
23. Предисловие к книге Г.Ицковица. Тройная спираль. Университеты-предприятия-государство. Инновации в действии. Томск, 2010

Н.А. Трофимова, Т.А. Крапивина

Моделирование влияния факторов на динамику социального капитала[1]

1. Постановка задачи

На экономическое положение страны и ее отдельных регионов, помимо чисто экономических факторов: наличие материальных ресурсов производства, обеспеченность трудовыми ресурсами, научно-технический прогресс и т.д., также оказывают влияние социально-экономические факторы, такие как институциональная среда, нормы морали, традиции, отражающие специфику взаимоотношений людей в определенных социально-экономических условиях. В этой связи понятие «капитал» в экономической науке стало трактоваться более широко, выделяя его различные формы. Это касается и социального капитала, накопление и функционирование которого может приводить к улучшению экономических результатов не только отдельной фирмы, но страны в целом, а также ее отдельных регионов.

Для большинства исследователей термин «социальный капитал» не является по своей сути абсолютно новым. Упоминание о социальном капитале можно встретить в работах А. Смита, К. Маркса, Э. Дюркгейма, К. Менгера, русских экономистов – П.И. Георгиевского, Г.П. Федотова и др. Впервые выражение «социальный капитал» появилось в работе Л.Д. Хэнифэн в 1916 г. Дальнейшие исследования социального капитала были продолжены в работах исследователей-социологов Д.Р. Сила, А.Р. Сима, Э.В. Лузли, Дж.С. Хомансом, Дж. Джейкобс и Г. Лоури. Значительный вклад в развитие теории социального капитала внесли П. Бурдье (1983 г.) в отношении социальной теории, Дж. Коулман (1988 г.), который ввел эту идею в академическое обсуждение в контексте образования, а так же Р. Патнэм (2000г.), который сделал социальный капитал популярной темой для политических дискуссий. В настоящее время можно выделить три основных подхода к исследованию сущности социального капитала: сетевой подход (М.Н. Астон, К. Насансон, М. Грановеттер, Р. Бёрт, А. Портес), институциональный подход (Т. Скокпол, С. Нэк, П. Колиэ, В. Истели) и синергетический подход (П. Эванс, Дж. Ишам, Д. Нараян, М. Вулкоком). Все эти подходы обладают существенным недостатком: они исследуют социальный капитал только как социальное явление, не выявляя его экономического аспекта, что приводит к отсутствию

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-06-00-151.

четкого определения понятия «социальный капитал», его количественной оценки, возможности генерации и накопления.

В последнее время среди прочих достоинств социального капитала стали выделять его положительное влияние на доходы общества. Основным автором, внесшим большой вклад в развитие теории социального капитала с этих позиций, был Пьер Бурдье [1], который не только дал формальное определение социального капитала, но и акцентировал внимание на то, что экономическое благополучие индивидуума напрямую зависит от интенсивности его связей с другими индивидуумами. Чем активнее человек вовлечен в общество, чем в большем количестве связей формальных и неформальных он участвует, тем, как правило, более он благополучен. П. Бурдье считал, что социальный капитал представляет собой совокупность реальных или потенциальных ресурсов, связанных с обладанием *устойчивой сетью* (*durable networks*) более или менее институционализированных отношений, т.е. с членством в группе, которая дает опору в виде *коллективного капитала* (*collectively-owned capital*) и «*репутации*» (*credential*). Эти отношения могут существовать только в реальном состоянии, в форме материального и/или символического обмена, который способствует их поддержанию. Таким образом, социальный капитал является продуктом общественного производства, средством достижения групповой солидарности. В таком понимании социальный капитал является групповым ресурсом и не может быть измерен на индивидуальном уровне. Размер социального капитала зависит от объема экономического, культурного и других уровней участников сети, в которую входит индивидуум, т.е. размер социального капитала человека зависит не только от количества, но и от качества связей. Более того, формирование сети изначально происходит таким образом, что создает некую однородную группу по всем социально-экономическим показателям индивидуумов.

Идеи П. Бурдье получили дальнейшее развитие в работах М. Грановеттера [2]. Анализируя рынок труда в США, он пришел к выводу, что подавляющее большинство вакансий в фирмах заполняется на основе социальных связей, т.е. «по блату». В результате, чем больше количество социальных связей, чем лучше их качество, тем проще получить работу с большим окладом, тем самым повышается доход индивидуума.

Еще одним исследователем, о котором следует упомянуть, является Р. Патнэм [3]. На примере Италии Р. Патнем вывел прямую зависимость между численностью гражданских организаций и качеством развития регионов. Так, на севере Италии уровень гражданской активности на порядок выше, чем на юге, и социально-экономическое положение этих регионов лучше. Другой причиной для такого разбиения послужило сильное отличие регионов по процентному соотношению городского населения.

До сих пор ученые не пришли к единому мнению относительно социального капитала, как однозначного блага для общества. Высокий уровень доверия в группе, может вылиться в создание преступной группировки. Одним из самых ярких примеров тому могут послужить мафиозные группировки в Америке. Каждая страна имеет свои социально-экономические показатели, и увеличение социального капитала может иметь абсолютно разные эффекты в каждой из них. Например большая дифференциация общества по экономическим показателям может отрицательно влиять на эффект от роста социального капитала.

Анализируя основные концепции социального капитала, можно выделить следующие проблемы. Первая проблема – это проблема измерения социального капитала. Изначально социальный капитал измеряли только посредством различных опросов. Сейчас помимо этого стали пробовать измерять капитал по количественным параметрам. Вторая проблема – это исследование отдачи от уровня социального капитала. В России для анализа отдачи от уровня социального капитала использовались данные, полученные в рамках проекта по оценке результатов работы товариществ собственников жилья [4]. Данное исследование показало, что социальный капитал в России слаб, и это сильно сказывается на эффективности работы ТСЖ. За рубежом проблема анализа отдачи от уровня социального капитала рассматривается по следующим направлениям. Первое – это исследование влияния социальных сетей на создание и динамику социального капитала. В результате оказалось, что социальные сети являются не только самостоятельным фактором в накоплении социального капитала, но еще и значительно увеличивают отдачу от других факторов. Второе направление – анализ влияния социально-экономических факторов на накопления социального капитала. Так в работах University of Essex на основе факторного и регрессионного анализа были сделаны выводы о существенном влиянии на накопление социального капитала таких факторов как возраст респондента, его политическая активность, доход, образование и имущество. Третье направление – связь социального капитала с уровнем преступности. Примером этого направления может служить исследование влияния уровня социального капитала на уровень преступности в Нидерландах. В этом исследовании к довольно распространенной регрессионной модели для преступности[2] был добавлен показатель уровень социального капитала. Результаты показали, что города с высоким уровнем социального капитала обладают более низким уровнем преступности.

[2] Обычно такие модели в качестве факторов включают плотность населения, процент населения со средним и высшим образованием, уровень безработицы, процент населения находящийся в возрасте от 15 до 24 лет.

Подводя итог можно сделать следующие выводы.

1. Экономическое благополучие страны, региона, человека напрямую зависит от величины социального капитала, который может измеряться величиной, характеризующей увеличение дохода.
2. Анализ факторов, влияющих на динамику социального капитала, лучше всего проводить на уровне региона, т.к. именно в этом случае можно исключить случайные влияния на изучаемый процесс и воздействие неоднородности объектов исследования.
3. В качестве факторов, от которых зависит динамика социального капитала, необходимо выделить следующие: уровень доступности Интернета (доступность социальных сетей), уровень качества здравоохранения, уровень доступности спортивных организаций, уровень образования, уровень преступности, уровень социальной политики, уровень доверия власти, уровень доступности культурного развития, демографический фактор, уровень качества жизни и экологический фактор.

2. Факторы, влияющие на динамику социального капитала

В предыдущем разделе были определены факторы, влияющие на динамику социального капитала. Рассмотрим их более подробно, сформулируем гипотезы о характере влияния данных факторов на зависимую переменную и выберем количественные показатели для их интерпретации.

1. <u>Уровень доступности Интернета (доступность социальных сетей)</u>

Проведенный анализ показал, что этот фактор оказывает сильное положительное влияние на динамику социального капитала. Социальный капитал связан с понятием «социальные сети», которые усиливаются с увеличением доступности Интернета. В качестве показателя для оценки уровня доступности Интернета используется число организаций, имеющих доступ к Интернету. Этот показатель характеризует с некоторой степенью приближенности уровень доступности Интернета в целом.

2. <u>Уровень качества здравоохранения</u>

Для характеристики уровня качества здравоохранения был выбран показатель – численность населения на одного врача. Влияние этого показателя на динамику социального капитала будем предполагать положительным, т.к. удачное лечение повышает не только доверие к системе здравоохранения и врачам, но и способствует увеличению доверия в обществе, тем самым увеличивая социальный капитал.

3. <u>Уровень доступности спортивных организаций</u>

Роль данного фактора в динамике социального капитала была выявлена совсем недавно. Проведенный анализ показал, что он оказывает положительное влияние на социальный капитал. Это связано с тем, что спортивные организации объединяют людей по интересам, взглядам и убеждениям, путем соревнований, совместных тренировок, передачи спортивного опыта и т.д., делают своих участников сплоченными, уверенными в помощи и поддержки друг друга, тем самым наращивая социальный капитал. Для характеристики уровня доступности спортивных организаций был использован показатель количества муниципальных учреждений спорта. Этот показатель, наиболее четко отражает доступность занятий спортом и возможность людей развиваться в спортивной области.

4. Уровень образования

Для характеристики этого показателя было выбрано количество студентов государственных (муниципальных) высших учебных заведений без учета видов образования. Будем предполагать, что влияние уровня образования на динамику социального капитала положительно. Это связано с тем, что человек, имеющий высшее образование, легче адаптируется к жизни в обществе. Тем более связи, полученные во время учебы, далее могут помочь в бизнесе, работе или общественных делах [5].

5. Уровень преступности

Этот показатель имеет дуалистическую сущность. С одной стороны преступность способствует сплачиванию людей, т.е. увеличению социального капитала. С другой стороны это увеличение социального капитала негативно влияет на положение в обществе. Поэтому будем предполагать, что в результате этот показатель (уровень преступности) оказывает отрицательно воздействие на динамику социального капитала. Проведенный факторный анализ показал, что показатель уровня преступности тесно связан с показателем уровня безработицы. Поэтому вместо показателя преступности будем использовать показатель уровня безработицы.

6. Уровень социальной политики.

Данный показатель положительно влияет на динамику социального капитала, т.к. посредством стимулирующих выплат и проведения различных социальных мероприятий, включая благотворительную деятельность, повышается уровень социального капитала. Для интерпретации уровня социальной политики был выбран показатель – среднемесячные затраты организаций на рабочую силу. Этот показатель включает заработную плату, расходы на жилье, стимулирующие выплаты и т.д., т.е. компоненты, способствующие динамике социальной политике.

7.Уровень доверия власти

При исследовании динамики социального капитала данный показатель присутствует у многих исследователей, в неявном виде. Гипотеза о его влияние на социальный капитал не совсем очевидна. С одной стороны, доверяя властям, люди более уверенно и комфортно чувствуют себя в обществе, они знают, что их проблемы не безразличны властям и им будет оказана необходимая помощь, то есть идет процесс наращивания социального капитала. Но с другой стороны, граждане, увеличивая свое доверия власти, могут освободить ее в какой – либо степени от отчетности перед ними. Тем самым «прозрачность» деятельности властей пропадает. А это может привести в долгосрочной перспективе к уменьшению уровня доверия в обществе, а затем и к снижению уровня социального капитала. В данном исследовании предполагается, что этот показатель положительно влияет на динамику социального капитала. В качестве характеристики данного показателя, будем использовать средний размер назначенных денежных выплат на человека. Данный параметр показывает отношение государства к гражданам, находящимся в сложных жизненных ситуаций, а, следовательно, с помощью него можно оценить, на сколько люди могут доверять властям.

8. Уровень доступности культурного развития

Появление этого фактора, в модели динамики социального капитала, неожиданно, но довольно логично. Ведь через систему культурного обогащения и развития (посещение театров, библиотек, выставок, лекций и семинаров, кружков и т.д.) люди начинают чаще общаться, у них находится больше общих интересов. В частности, через призму культурного развития можно понять, насколько дорого и важно доверие между членами общества, как необходимы общие интересы и досуг. Поэтому будем предполагать, что этот фактор положительно влияет на динамику социального капитала. В качестве показателя, отражающего уровень доступности культурного развития, используется число муниципальных учреждений культурно – досугового типа.

9. Демографический фактор

На динамику социального капитала демографический фактор может влиять как положительно, так и отрицательно. Если в качестве показателя рассматривается число родившихся (без мертворожденных), то можно говорить о положительном влиянии демографического фактора на динамику социального капитала. Это объясняется тем, что увеличение рождаемости в обществе свидетельствует об уверенности людей в своем будущем и о высоком уровне доверия и поддержки. В случае, если в качестве демографического фактора используется показатель числа умерших, то естественно говорить об отрицательном влиянии анализируемого показателя на динамику социального капитала. В нашем исследовании выдвигается гипотеза о положительном влиянии демографического фактора на динамику социального капитала.

10. Миграционная активность

Этот фактор, как и предыдущий, может оказывать двойственное влияние на динамику социального капитала. Формулируя гипотезу, остановимся на том, что явление миграции негативно влияет на социальный капитал. Это связано с тем, что как показывают проведенные исследования, в России миграция ведет к снижению доверия в обществе, к созданию напряженности в различных слоях населения. В качестве фактора, характеризующего миграционную активность, был взят показатель миграционного прироста населения

11. Ситуация на дорогах

Этот фактор мало исследован, но в последнее время его все чаще стали включать в модели динамики социального капитала. Предполагается, что чем лучше положение дел на дорогах (чем меньше ДТП), тем условия жизни в обществе спокойнее и комфортнее, и тем выше социальный капитал. Особенно это актуально для России. Для характеристики данного фактора был выбран показатель – число зарегистрированных ДТП, т.к. он наиболее полно отражает ситуацию на дорогах, которая может быть в той или иной степени зависеть от устройства дорог, наличия пробок и т.д. Предполагается, что влияние этого фактора на динамику социального капитала отрицательно.

12. Численность населения

Гипотеза о влиянии этого фактора на социальный капитал неоднозначна и труднообъяснима, не смотря на то, что она встречается во многих исследования. С одной стороны, чем больше численность населения региона, тем сложнее установить надежные, тесные связи между людьми, наладить каналы передачи социального капитала, т.к. в регионах могут присутствовать люди разных политических и религиозных взглядов, разного благосостояния и т.д. Но с другой стороны, большая численность населения дает людям возможность надеяться на более обширную и многочисленную помощь, поддержку в решении трудных ситуаций, найти круг людей близких по интересам в каком-либо вопросе. Будем предполагать, что численность населения положительно влияет на динамику социальный капитал. В качестве показателя была выбрана численность постоянного населения. Этот показатель учитывает только постоянно проживающих граждан в данном регионе, именно это население наиболее активно участвует в аккумуляции социального капитала, т.к. за долгое время проживания они обзаводятся сетью общения, налаживают контакты с властями и различного рода организациями.

13. Экологический фактор

Влияние этого фактора довольно сложно обосновать и определить. В данном случае будем предполагать, что он влияет положительно на динамику социального капитала. Это можно объяснить тем, что люди, участвуя в акциях, платя налоги, осуществляя благотворительные сборы в фонды защиты природы, видят результаты своей деятельности и хотят в дальнейшем объединять свои силы, помогать друг другу для защиты экологии окружающей среды. В качестве показателя для характеристики экологического фактор был взят показатель текущих затрат на охрану окружающей среды.

14. Уровень качества жизни

Влияние этого фактора на динамику социального капитала неоднозначно. С одной стороны, чем выше уровень качества жизни, тем больше люди уделяют внимание налаживанию социальных каналов связи между собой с целью поддержания и увеличения качества своей жизни. С другой стороны, повышение уровня жизни может способствовать отчуждению людей от общества и нарушению социальных связей. В качестве показателя характеристики уровня жизни использована величина прожиточного минимума, которая показывает уровень дохода, который считается необходимым для обеспечения жизнедеятельности человека.

Теперь необходимо определить параметр, характеризующий зависимую переменную (уровень социального капитала). Как отмечалось, с экономической точки зрения для изучения социального капитала наиболее подходит определение социального капитала, предложенное П. Бурдье. П. Бурдье предполагал, что накопленный социальный капитал аккумулируется в денежный капитал, поэтому для интерпретации уровня социального капитала был выбран показатель среднедушевых денежных доходов населения. Этот показатель включает все виды заработной платы, социальные выплаты (пенсии, пособия, стипендии, страховые возмещения и прочие выплаты), доходы от собственности в виде процентов по вкладам, ценным бумагам, дивидендов и другие доходы («скрытые» доходы, доходы от продажи иностранной валюты, денежные переводы, а также доходы, не имеющие широкого распространения). Таким образом, при моделировании будут учтены все группы населения.

3. Методология исследования

Наше исследование необходимо начать с разбиения регионов на группы. Это нужны для того, чтобы добиться наибольшей однородности выборки. Разбиение логично проводить по уровню среднедушевого денежного дохода населения и по процентному соотношению сельского и городского населения. Такая классификация регионов связана с тем, что социальный капитал сельского населения играет специфическую роль. Сельское население сильно ограничено в количестве связей, а так же в способах реализации своего социального капитала; тем не менее, как раз в сельской местности уровень доверия между гражданами особенно высок. Не учитывая этой ситуации, можно получить некорректные результаты анализа.

Классификация проводилась с помощью кластерного анализа методом K-средних. Этот метод позволяет отнести каждое обучающее наблюдение к одному из K кластеров (K -число радиальных элементов) таким образом, чтобы каждый кластер был представлен центроидом соответствующих наблюдений, а каждое наблюдение отстояло бы от центроида своего кластера меньше, чем от центроидов всех других кластеров. Цель состоит в том, чтобы найти набор центров, наилучшим образом представляющий распределение обучающих наблюдений. Алгоритм K-средних действует итерациями. Сначала кластеры формируются произвольным образом с помощью первых K наблюдений, а каждое из последующих наблюдений приписывается к ближайшему из этих K кластеров. После этого вычисляются центроиды всех кластеров. Затем каждое наблюдение рассматривается на предмет того, нет ли среди центров других кластеров такого, который был бы расположен ближе к этому наблюдению, чем центр его собственного кластера, если такой находится, то наблюдение переносится в другой кластер. После переноса наблюдений центроиды вычисляются заново и все действия повторяются. Процедура кластерного анализа повторяется до тех пор, пока не будет получен приемлемый вариант классификации.

До начала проверки гипотез о влиянии полученных факторов на динамику социального капитала необходимо снизить размерность задачи, т.е. перейти от вектора наблюдений $X_i = (x_i^{(1)}, \dots \dots x_i^{(\mathrm{p})})^T, i = \overline{1,n},$ к вектору меньшей размерности $p^*; p^* << p\colon Z_i = ({z_i}^{(1)}, \dots \dots z_i^{(p^*)}), i = \overline{1,n},$ при сохранении «максимальной информативности». Возможность перехода от большого числа признаков р к меньшему числу наиболее информативных признаков p^* обуславливается следующими предпосылками: 1) дублирование информации, обусловленное сильно связанными признаками; 2) мало меняющаяся информативность признаков при переходе от одного объекта к другому; 3) возможность простого или взвешенного суммирования признаков.

Для снижения размерности задачи использовался метод главных компонент. Сложность, которая может возникнуть при использовании этого метода – содержательная интерпретация получаемых главных компонент.

Использование метода главных компонент наиболее плодотворно в тех случаях, когда все показатели имеют общую физическую природу и измерены в одних и тех же единицах. Если же измерение проводится в разных единицах и показатели неоднородны по физическому смыслу, то осуществляют переход к вспомогательным безразмерным признакам. Для этого прибегают к центрированию и нормированию. Именно это и было использовано при проведении исследования.

После проведения классификации регионов и снижения размерности была решена главной задачи: моделирование влияния установленных факторов на динамику социального капитала. Для этого использовался эконометрический анализ.

За основу была выбрана модель Минцера, которая применяется для моделирования динамики человеческого капитала и имеет следующий вид: $\ln Y(s,x) = \alpha + p_s s + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$, где $Y(s,x)$ – заработная плата, трудовой доход; s – уровень образования; x – уровень образования; p_s – норма отдачи от образования (одинаковая для всех уровней образования). Эта модель может быть использована в связи с тем, что по своей сути социальный капитала тесно связан с человеческим капиталом. Однако особенности социального капитала предполагают модификацию модели Минцера. В качестве $Y(s,x)$ был выбран уровень социального капитала (средние доходы населения в регионе). В качестве параметров модели использовались факторы, полученные в результате применения метода главных компонент. Разработанная эконометрическая модель строилась для каждого из полученных кластеров регионов.

4. Экспериментальные расчеты и анализ результатов

Приводимые ниже расчеты выполнены на основе данных Росстата. Для проведения кластерного анализа использовался пакет Statgraphics 5.1, а для эконометрического анализа пакеты Statistica 6.0 и EViews 7.

4.1. Кластеризация

Как отмечалось, для кластеризации использовались два параметра: уровень среднедушевого дохода населения и процентное соотношение сельского и городского населения. Кластеризация проводилась с помощью двухшагового метода и метода к – средних. Подробнее эта процедура описана в [5].

В результате применения кластерного анализа было установлено, что все субъекты РФ могут быть разбиты на 2 класса. В первый класс вошли субъекты РФ с низкой долей городского населения и относительно низким среднедушевым доходом, а во второй класс, соответственно, субъекты РФ с высокой долей городского населения и высокими среднедушевыми доходами. Кроме того, наблюдается следующая тенденция: чем больше доля городского населения, тем больше среднедушевые доходы в субъектах РФ.

Результаты кластеризации следующие. В первом кластере – 51 наблюдение, во втором кластере – 29 наблюдений. Назовем первый кластер – «бедные» регионы, второй – «богатые» регионы.

4.2. Снижение размерности

Проведенный анализ факторов показал, что сами факторы имеют неоднородную физическую природу, поэтому прежде, чем применить компонентный анализ, была проведена стандартизация данных, т.е. нормирование и центрирование.

В ходе реализации метода главных компонент был осуществлен переход от 14 исходных факторов к 4. На основе рассчитанной матрицы факторных нагрузок были получены следующие 4 главные компоненты, которые в совокупности объясняют 71,6% суммарной дисперсии исходных признаков. Первая главная компонента находится в тесной связи с показателями: число родившихся, миграционный прирост населения, численность постоянного населения, количество студентов государственных (муниципальных) высших учебных заведений, текущие затраты на охрану окружающей среды, количество муниципальных учреждений спорта. Вторая главная компонента тесно связана с показателями численность населения на одного врача, среднемесячные затраты организаций на рабочую силу, величина прожиточного минимума, число муниципальных учреждений культурно – досугового типа. Третья главная компонента тесно связана в свою очередь с показателями уровень безработицы и число зарегистрированных ДТП. Четвертая главная компонента включает размер назначенных денежных выплат на человека и число организаций, использовавших Интернет.

Содержательная интерпретация этих четырех главных компонент следующая. Первая главная компонента $z^{(1)}$ (34,5% суммарной дисперсии) включает показатели демографического характера (миграционный прирост, число родившихся, численность постоянного населения) и социального характера (текущие затраты на окружающую среду, количество студентов государственных высших учебных заведений и количество муниципальных учреждений спорта). Поэтому $z^{(1)}$ в дальнейшем будем интерпретировать как компоненту, характеризующую социально-демографический характер региона.

Вторая главная компонента $z^{(2)}$ (16,6% суммарной дисперсии) тесно связана с такими факторами, как численность населения на одного врача, среднемесячные затраты организаций на рабочую силу, число муниципальных учреждений культурно – досугового типа, величина прожиточного минимума. Все они в той или иной степени отражают различные стороны жизни региона. Поэтому $z^{(2)}$ будем интерпретировать как уровень социально – экономического развития региона.

Содержательный смысл третьей главной компоненты $z^{(3)}$ (11,0% суммарной дисперсии) дать сложнее, так как она связывает факторы довольно разные по смыслу: уровень безработицы и число зарегистрированных ДТП. Но, исходя из характера этих факторов и их влияния на динамику социального капитала, можно интерпретировать компоненту $z^{(3)}$ как уровень «напряженности» в регионе.

Четвертая главная компонента $z^{(4)}$ (9,5% суммарной дисперсии) связана с такими факторами как, число организаций, использовавших Интернет и размер назначенных выплат на человека. Как показал проведенный анализ, наибольшее влияние среди этих факторов оказывает фактор, характеризующий использование Интернета. Поэтому содержательный смысл $z^{(4)}$ можно обозначить как уровень доступности информации в регионе.

4.3. Построение модели

После проведения классификации субъектов РФ и снижения размерности была построена эконометрическая модель, позволяющая провести анализ факторов, влияющих на динамику социального капитала и выделить наиболее существенные из них.

Для этого была выбрана модель вида:

$$\ln(\mathrm{income}) = a_0 + a_1 z^{(1)} + a_2 z^{(2)} + a_3 z^{(3)} + a_4 z^{(4)}, \quad (1)$$

где $z^{(1)}$ – уровень социально-демографического развития региона,

$z^{(2)}$ – уровень социально – экономического развития региона,

$z^{(3)}$ – уровень «напряженности» в регионе,

$z^{(4)}$ – уровень доступности информации в регионе,

income – среднедушевые денежные доходы в регионе.

Проведенный корреляционный анализ показал, что зависимость переменной income от объясняющих ее переменных довольно сильная. Парный коэффициент корреляции R колеблется на интервале $0{,}5 < |R| < 0{,}7$. Независимые переменные почти не коррелируют между собой ($|R| < 0{,}3$). Однако для «бедных» регионов присутствует сильная связь между $z^{(4)}$ и $z^{(2)}$ ($R < 0{,}7$). Это может быть объяснено тем, что уровень социально – экономического развития субъектов РФ в современных условиях существенно зависит от уровня доступности информации. В тоже время, чем выше уровень социально–экономического развития региона, тем информация более доступна и в значительной степени обладает более высокой достоверностью. Таким образом, в модель (1), разрабатываемую для «бедных» регионов, переменные $z^{(2)}$ и $z^{(4)}$ не могут быть включены одновременно, а сама модель(1) может быть представлена моделями (2) и (3).

$$\ln(\mathrm{income}) = a_0 + a_1 z^{(1)} + a_2 z^{(2)} + a_3 z^{(3)}, \quad (2)$$

$$\ln(\mathrm{income}) = a_0 + a_1 z^{(1)} + a_2 z^{(3)} + a_4 z^{(4)}, \quad (3)$$

Для «богатых» регионов сильная связь наблюдалась между переменными $z^{(3)}$ и $z^{(4)}$ ($R < 0,7$). Данная связь объясняется тем, что доступность и «прозрачность» информации ведет к уменьшению негативных настроений в обществе, в результате снижается преступность, сокращается безработица, повышается уровень доверия и надежности социальных связей. В результате для анализа влияния факторов на динамику социального капитала для «богатых» регионов будем использовать модель (2) и модель (4).

$$\ln(\text{income}) = a_0 + a_1 z^{(1)} + a_2 z^{(2)} + a_3 z^{(4)}, (4)$$

Окончательные результаты регрессионного анализа представлены в табл.1. В табл. 1 представлены 2 модели, разработанные для «бедных» регионов (модель 1) и для «богатых» регионов (модель 2). В этих моделях все параметры значимы (p-уровень меньше 0,05). Для модели 1 коэффициент детерминации (R-squared) ниже, чем для модели 2 и равен 0,51. Это говорит о том, что не все факторы, влияющие на динамику социального капитала, учтены в модели 1. Однако основная цель данного эконометрического анализа не в том, чтобы объяснить процесс формирования социального капитала, а в том, чтобы определить характер влияния определенных факторов на его динамику. Для «богатых» регионов коэффициент детерминации равен 0,8, т.е. динамика социального капитала на 80% определяется динамикой выбранных факторов.

Таблица 1

Регрессионная таблица

Модель 1			
Переменная	**Коэффициенты регрессии**	**t-статистика**	**p-уровень**
C	**9,55**	**41,68**	**0,000**
$\mathbf{z^{(1)}}$	**-0,16**	**-5,03**	**0,000**
$\mathbf{z^{(2)}}$	**0,06**	**2,12**	**0,009**
$\mathbf{z^{(3)}}$	**0,04**	**2,05**	**0,004**
R-squared=0,51 F-statistic=13,86 Prob(F-statistic)= 0,000			
Модель 2			
Переменная	**Коэффициенты регрессии**	**t-статистика**	**p-уровень**
C	**9,73**	**30,50**	**0,0000**
$\mathbf{z^{(1)}}$	**-0,15**	**-7,61**	**0,0000**
$\mathbf{z^{(2)}}$	**0,20**	**8,64**	**0,0000**
R-squared=0,80 F-statistic=51,64 Prob(F-statistic)= 0,000000			

В модели 1 наиболее существенным фактором является фактор, определяющий социально-демографическую ситуацию в регионе ($z^{(1)}$).

Ухудшение этой ситуации способствует усилению социального капитала, т.к. для выживания необходимо налаживать социальные связи.

На втором месте стоит фактор, характеризующий социально-экономическое развитие региона ($z^{(2)}$). Влияние этого фактора на динамику социального капитала очевидно: повышение социально-экономического положения в регионе способствует увеличению социального капитала.

В модели 1 значимым также оказался фактор, характеризующий уровень напряженности в регионе ($z^{(3)}$). Это объясняется тем, что социально-экономическая неустроенность и бедность способствуют повышению уровня напряженности в регионе, что приводит к сплоченности людей, проявлению помощи и поддержки, созданию новых и укреплению старых каналов передачи социального капитал, тем самым увеличивая уровень социального капитала.

В модели 2 на первом месте по влиянию стоит фактор, характеризующий социально-экономическое положение в регионе. На втором месте находится фактор, отражающий социально-демографическую ситуацию в регионе. Влияние фактора, характеризующего уровень напряженности в регионе, оказалось не существенным. Это вполне закономерно, т.к. в регионах, имеющих более высокий уровень социально-экономического развития, наблюдется меньшая напряженность, чем в регионах с более низким уровнем социально-экономического развития.

Таким образом, для анализа влияния факторов на динамику социального капитала получены две регрессионные модели.

Для «бедных» регионов модель имеет вид:

$$\ln(\text{income}) = \underset{(41.68)}{9.55} - \underset{(-5.03)}{0.16}z^{(1)} + \underset{(2.12)}{0.06}z^{(2)} + \underset{(2.05)}{0.04}z^{(3)}$$

Для «богатых» регионов может использоваться модель вида:

$$\text{income} = \underset{(30.50)}{9.73} - \underset{(-7.61)}{0.15}z^{(1)} + \underset{(8.64)}{0.20}z^{(2)}$$

Заключение

В данной работе было проведено исследование факторов, которые непосредственно влияют на уровень социального капитала, способствуют его накоплению, а так же реализации. Регионы РФ были разделены на два класса, условно названные «богатыми» и «бедными». Из-за большого числа факторов, которые были определены в результате проведенного содержательного экономического анализа, была решена задача снижения размерности. Для этого использовался метод главных компонент, который позволил перейти от 14 факторов к 4. Этими новыми факторами являются уровень социально-экономического развития региона, уровень социально-демографического развития региона, уровень «напряженности» в регионе и уровень доступности информации (социальные сети) в регионе.

Для оценки влияния этих факторов на динамику социального капитала была построена эконометрическая модель, анализ которой позволил сделать следующие выводы.

Как для «бедных», так и для «богатых» регионов РФ существенную роль в динамике социального капитала играют факторы социально-экономического и социально-демографического развития региона.

Ухудшение социально-демографического положения в регионе способствует увеличению роли социального капитала, что вполне естественно, т.к. адаптация к изменившимся социально-демографическим условиям возможна лишь при наличии хорошо налаженных социальных контактах. Улучшение социально-демографической ситуации в регионе приводит к снижению роли социального капитала из-за возникающей конкуренции между агентами социального капитала.

Между социально-экономическим развитием региона и динамикой социального капитала наблюдается прямая связь: улучшение социально-экономического климата в регионе способствует усилению роли социального капитала, и наоборот, ухудшение социально-экономической ситуации в регионе способствуют снижению роли социального капитала.

Неожиданным оказался вывод о несущественном влиянии фактора, характеризующего уровень доступности информации как в «бедных» регионах, так и в «богатых» регионах. Возможно, это связано с широкой доступность Интернета и снижением его уникальной роли при общении в социальных сетях.

Фактор, характеризующий уровень «напряженности», оказался существенным только для «бедных» регионов. Неуверенность в своем социальном статусе, сложные экономические условия приводят к тому, что население региона начинает налаживать социальные контакты, тем самым способствуя увеличению роли социального капитал в регионе.

В заключении необходимо отметить, что рост социального капитала в обществе – явление медленное, внимание к этой проблемы может дать результаты через многие годы. Однако проведенное исследование показало, что динамика социального капитала тесно связана с социально-экономическим развитием региона и демографической ситуацией в нем. Поэтому нужно проводить политику по увеличению инвестиций в социальный капитал, который может быть непривлекательным в краткосрочной перспективе, и вести работы по стимулированию эффективности его накопления и использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourdieu, Pierre. Ökonomisches Kapital, kulturelles Kapital,soziales Kaputal, in: Kreckel, Reinhard (ed.) Soziale Ungeichheiten (Soziale Welt, Sonderheft 2).Goettingen: Otto Schwartz & Co., 1983. P. 183-198.
2. Granovetter M. Getting a Job: A Study of Contacts and Careers, 2nd Edition (with a new Preface and a new chapter updating research and theory since the 1974 edition). University of Chicago Press (paperback), 1995.
3. Putnam, R. D. Bowling Alone. New York: Simon & Schuster, 2000.
4. Полищук Е.А. Социальный капитал и его роль в экономическом развитии // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2005. Вып. 1. С. 10-16.
5. Трофимова Н.А. Социальный капитал: анализ определяющих его факторов // Анализ и моделирование экономических процессов. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. С. 31-46.

С.А. Смоляк

Оценка износа машин, подвергающихся случайным отказам

1. Постановка задачи

В [4,5,6,7] были построены модели для оценки рыночной стоимости машин. В настоящей статье эти модели уточняются и обобщаются применительно “к машинам, подвергающимся случайным отказам. Как и в указанных работах, под “машинами” мы понимаем отдельно оцениваемые установки, машины, оборудование и транспортные средства и делим их на *виды*, а каждый вид – на *марки*. Считается, что разные марки машин одного вида используются для одних и тех же целей: они способны производить ту же продукцию[1] (в противном случае будем относить их к другому виду машин), а потому конкурируют друг с другом на рынке. Поэтому машина – это типичный представитель *массового* имущества, которое серийно производится и обращается на рынке в достаточно большом количестве. Рынок машин делится на первичный и вторичный. На *первичном* рынке продаются машины *в новом состоянии* (только что произведенные[2]), на *вторичном* – подержанные (бывшие в эксплуатации).

Владельцами машин обычно выступают предприятия. Производимая машиной продукция может быть или *конечной*, обращающейся на рынке, либо *промежуточной*, необходимой для производства другой, конечной продукции предприятия. Однако в любом случае она имеет определенную рыночную стоимость. В первом случае эту стоимость можно подтвердить данными рынка, во втором – ее можно представить как “вклад” промежуточной продукции в стоимость конечной продукции предприятия. Производство продукции требует и определенных операционных затрат. Как это обычно и делается, в их состав мы не будем включать ни амортизацию, ни проценты по займам.

Использование машины приносит владельцу определенные (чистые) *выгоды*. Будем определять их как рыночную стоимость произведенной продукции за вычетом операционных затрат[3].

Если рассматривать процесс использования машины в непрерывном времени, то основной экономической характеристикой этого процесса становится *интенсивность* выгод – размер чистых выгод, приносимых

[1] К продукции мы относим также работы и услуги.

[2] Термин “новые” лучше относить к машинам новых марок.

[3] Такой показатель близок по содержанию к так называемой “прибыли до начисления амортизации и уплаты процентов и налогов” (*Earnings before Interests, Taxes, Depreciation and Amortization*), если в составе затрат не учитываются налоги, и с так называемым чистым операционным доходом, если их учитывать.

использованием машины за малую единицу времени. В процессе старения машина подвергается *физическому износу*. В конечном счете, он проявляется в том, что интенсивность выгод от ее использования с течением времени имеет общую тенденцию к снижению (разумеется, после ремонта показатели машины улучшаются, однако указанная тенденция все равно сохраняется).

Рыночная стоимость имущества всегда оценивается на определенную дату – *дату оценки*. При этом предполагается [2], что после даты оценки имущество будет использоваться экономически рационально (в оценке имущества это трактуется как принцип *наиболее эффективного использования* – НЭИ).

Требование наиболее эффективного использования имущества теоретически правомерно. Однако, по нашему мнению, оно должно рассматриваться как некий идеал, к которому оценщики должны стремиться, а не как руководство к действию. Это связано с тем, что получение максимального эффекта предполагает оптимизацию процесса использования имущества, т.е. оптимальный выбор большого количества характеристик этого процесса (скажем, сменности работы машины, порядка переключения ее с одних видов работ на другие, организации взаимодействия с другими машинами той же технологической цепи). На практике же обычно стараются оптимально выбрать лишь некоторые характеристики указанного процесса. Такое (частично оптимизированное) использование машины мы и называем “рациональным” [6,7].

Однако когда-нибудь наступит момент, когда ее дальнейшее использование становится неэффективным, невыгодным. Этот момент определяет *срок службы объекта*, когда он должен быть *утилизирован* – передан в сферу вторичного использования. При утилизации машины ее владелец получает определенные доходы и несет некоторые расходы. В данной статье мы ими пренебрегаем.

Для оценки основных средств по рыночным данным часто используется следующий подход. Вначале, опираясь на данные о ценах *первичного* рынка, оценивают стоимость машины данной марки в новом состоянии – *восстановительную стоимость*, а затем корректируют ее, умножая на *коэффициент годности*[4]. Значения этих коэффициентов устанавливают, используя соответствующие таблицы или формулы (критический обзор подобных таблиц и формул приведен в [1,4,5]. Подобные таблицы или формулы в течение ряда лет обычно остаются неизменными или незначительно корректируются. Это значит, что изложенный способ, по существу, опирается на **принцип стабильности**:

---

[4] Российские оценщики используют эквивалентный прием: стоимость машины в новом состоянии уменьшается на величину износа, который, в свою очередь, находится путем умножения стоимости машины в новом состоянии на коэффициент износа.

Зависимости стоимости имущества от влияющих на нее факторов, справедливые на дату оценки и в некоторый предшествующий ей период, остаются справедливыми и течение некоторого периода после этой даты.

Однако указанный способ не учитывает технического состояния машины. Чтобы учесть техническое состояние машины, оценщик может привлечь технических специалистов. Тогда появляется возможность мысленно сопоставить ее с “нормально эксплуатировавшимися” машинами разного возраста и определить, в каком возрасте “нормально эксплуатирующаяся” машина окажется в том же состоянии, что и оцениваемая. Этот возраст оценщики именуют “эффективным” и при оценке машины с помощью указанных формул или таблиц используют его вместо хронологического возраста.

Техническое состояние и эффективный возраст машины при ее нормальной эксплуатации меняются непрерывно, однако иногда могут происходить случайные изменения, назовем их *отказами*, для устранения последствий отказа проводится *специальный* ремонт. Отказы могут быть разных типов, и тип возникающего отказа будем считать случайным. Соответственно будут случайными и затраты на ремонт и изменение состояния машины после его проведения. Будем считать, что проводимый ремонт требует не очень больших затрат и не полностью устраняет последствия отказа (остается так называемый неустранимый износ), так что состояние машины после ремонта *ухудшается*[5].

Если размеры выгод от использования машины можно подтвердить рыночными данными, для оценки используется *доходный* подход. Учесть при этом физический износ можно методом дисконтирования денежных потоков (ДДП), оценивая стоимость машины суммой дисконтированных чистых выгод от ее предстоящего рационального использования.

Срок службы машины, даже при рациональном ее использовании, в рассматриваемой ситуации будет случайным. По окончании срока службы возникает необходимость утилизации машины. Связанными с этим доходами и расходами мы пренебрежем. Поэтому рыночная стоимость машины в конце срока ее службы будет считаться нулевой.

В этой статье мы предложим метод определения стоимости подержанных машин. При этом коэффициенты износа, отражающие зависимость стоимости машины от ее эффективного возраста, мы устанавливаем, используя предложенную нами нетрадиционную версию метода ДДП. Для этого в следующем разделе мы построим экономико-

[5] Ремонт, требующий больших затрат, по существу, является *капитальным*, и после его проведения состояние машины несколько улучшается. Влияние капитальных ремонтов на стоимость машин исследовано нами в [8].

математическую модель износа машины, рассматривая процесс износа машины как случайный процесс в непрерывном времени.

2. Модель износа машины

Рассматриваются машины определенной марки, различающиеся по своему состоянию, в один и тот же момент времени 0, являющийся датой оценки. Состояние машины будем понимать как ее эффективный возраст (определение “эффективный” далее во многих случаях будет опускаться). Предельный эффективный возраст машины (ее состояние) обозначим через T. Это значит, что использовать машину, находящуюся в состоянии t, целесообразно только при $t < T$, тогда как машины в состоянии $t \geq T$ подлежат утилизации. В соответствии с общими принципами стоимостной оценки мы принимаем, что после даты оценки машина будут использоваться наиболее эффективно.

При описании процесса использования машины нам понадобится *временно* принять два допущения.

Во-первых, мы будем предполагать, что чистые выгоды от рационального использования машины любого возраста могут быть оценены по рыночным данным. Это предполагает возможность оценки стоимости производимой машинами продукции, так и измерения затрат, необходимых для этого производства (операционных). От этого допущения мы освободимся в разделе 4.

Казалось бы, теперь для оценки машины достаточно задать динамику чистых выгод от ее рационального использования и затем просуммировать их с учетом дисконтирования. Однако такой путь оказывается невозможным. Дело в том, что, даже зная, какие выгоды приносит использование машины сегодня, нельзя установить, какие выгоды она принесет в последующие годы. Такая неопределенность связана, прежде всего, с инфляцией, которую невозможно прогнозировать на длительный период. Но есть и другая причина. В состав затрат, связанных с использованием машины, входят расходы, величина которых зависит от стоимости машины (например, налог на имущество и расходы на страхование) – *адвалорные*. Тем самым от стоимости машины оказывается зависящей и прибыль, а, значит, и налог на прибыль. Но стоимость машины неизвестна, и как раз ее оценщик и должен оценить. Из-за этого он не сможет определить в полном объеме те чистые выгоды, которые получит покупатель, приобретающий машину по рыночной стоимости. Частично обойти обе указанные трудности можно, предположив, что *инфляция и налог на прибыль в стране отсутствуют*. От этого допущения мы освободимся в конце данного раздела.

Тем не менее, даже при указанных допущениях, в состав операционных затрат войдут адвалорные расходы, зависящие от стоимости машины, а также затраты на специальный ремонт, которые мы будем учитывать отдельно. На этом основании для характеристики использования машины мы будем использовать показатель *скорректированных выгод* (СВ), при исчислении которого в составе затрат не будут учитываться ни адвалорные расходы, ни налог на прибыль, ни затраты на специальный ремонт.

Стоимость машины возраста t обозначим через $K(t)$. При этом в силу сделанных предположений $K(t)=0$ при $t \geq T$. Поскольку инфляция отсутствует, стоимость машины возраста t будет равна $K(t)$ не только на дату оценки, но и в более поздние моменты времени. Интенсивность СВ от рационального использования рассматриваемой машины обозначим через $B(t)$. Будем считать функцию $B(t)$ известной и убывающей, а неизвестную функцию $K(t)$ – гладкой. Предприятие, владеющее машиной, осуществляет и адвалорные расходы. Их интенсивность для машины возраста t составит $mK(t)$, где m – ставка адвалорных расходов в единицу времени. Поскольку налога на прибыль нет, чистые выгоды будут равны СВ за вычетом адвалорных расходов, так что их интенсивность составит $B(t) - mK(t)$.

Выясним, что произойдет с машиной возраста t за малое время ε. Прежде всего, она принесет чистые выгоды в размере $[B(t) - mK(t)]\varepsilon$, после чего ее состояние изменится в зависимости от того, произошел или не произошел за это время отказ. Интенсивность отказов будем считать не зависящей от состояния машины и обозначим через λ. Если отказа не произошло (вероятность этого примерно[6] $1-\lambda\varepsilon$), машина “постареет” на ε и перейдет в состояние $t+\varepsilon$, где ее стоимость, в соответствии со сказанным выше, составит $K(t+\varepsilon)$. Если же отказ произошел (вероятность этого примерно $1-\lambda\varepsilon$), то машина потребует специального ремонта. При этом владелец может либо отказаться от проведения ремонта и утилизировать машину, либо провести ремонт. Очевидно, что эффект владельца в первом случае будет нулевым. Рассмотрим второй случай, предполагая, что:

1) продолжительностью ремонта можно пренебречь;

2) до завершения ремонта неизвестно, в каком состоянии окажется машина после ремонта. Будем считать, что эффективный возраст машины после ремонта увеличивается на случайную величину τ, имеющую показательное распределение с плотностью $\omega e^{-\omega\tau}$;

3) средние затраты на ремонт P не зависят от состояния машины.

В таком случае средний прирост эффективного возраста составит $1/\omega$, а средняя стоимость отремонтированной машины окажется равной

[6] Здесь и далее словом “примерно” и знаком “≈” мы обозначаем равенства, справедливые с точностью до малых более высокого порядка.

$V(t)=\int\limits_0^\infty K(t+\tau)\omega e^{-\omega\tau}d\tau=\int\limits_t^\infty K(x)\omega e^{\omega(t-x)}dx$. При этом верхним пределом интеграла здесь можно взять *T*, поскольку стоимость машин большего возраста равна нулю. Легко видеть, что функция $V(t)$ непрерывна.

Если владелец решит ремонтировать машину после ее отказа, то ожидаемый эффект от такого решения будет равен средней стоимости машины после проведенного ремонта за вычетом средних затрат на ремонт, т.е. $V(t)-P$. Поскольку при отказе от ремонта владелец получает нулевой эффект, наиболее эффективному его решению будет отвечать ожидаемый эффект max $[0;\,V(t)-P]$. При этом проведение ремонта будет целесообразно лишь при $t\ \geq\ L$, где

$$L=\min\left\{t\geq 0\left|\int\limits_t^T K(x)\omega e^{\omega(t-x)}dx\geq P\right.\right\}. \qquad (1)$$

Для построения искомой модели, как и в [4,5,6], используем лежащий в основе методов *доходного подхода* к оценке имущества **принцип дисконтирования**, который в данном случае можно сформулировать так:

Стоимость имущества на дату оценки =
= дисконтированные чистые доходы от рационального использования имущества в течение некоторого периода +
+ дисконтированное математическое ожидание стоимости имущества в конце периода.

В данном случае мы будем применять этот принцип к малому периоду времени длительностью ε, начинающемуся с даты оценки (момента 0).

Поскольку при формировании денежных потоков мы не будем учитывать ни налог на прибыль, ни инфляцию, согласно стандартам оценки [2], для дисконтирования должна использоваться непрерывная реальная доналоговая ставка, которую мы обозначим через ρ.

С учетом сделанных допущений принцип дисконтирования может быть представлен следующим приближенным равенством:

$$K(t)\approx\left[B(t)-mK(t)\right]\varepsilon+(1-\rho\varepsilon)\left\{(1-\lambda\varepsilon)K(t+\varepsilon)+\lambda\varepsilon\max\left[0;V(t)-P\right]\right\}.$$

Отсюда легко выводится основное уравнение для $K(t)$:

$$K'(t)-(\rho+\lambda+m)K(t)+\lambda\max\left[0;V(t)-P\right]+B(t)=0.$$

Входящую сюда величину $\rho+m$ обозначим через r и будем трактовать ее как ставку дисконтирования, скорректированную с учетом адвалорных расходов. При этом полученное уравнение примет вид:

$$K'(t)-(r+\lambda)K(t)+\lambda\max\left[0;\int\limits_t^T K(x)\omega e^{\omega(t-x)}dx-P\right]+B(t)=0. \qquad (2)$$

Краевым условием для этого уравнения будет, очевидно, $K(T)=0$.

Обратим внимание, что уравнение (2) связывает стоимость машины не с выгодами от ее предстоящего использования, а с текущими (на дату оценки) выгодами от использования других, более старых машин той же марки. Подобные модели названы в [7] *эргодическими*.

Обратим особое внимание на то, входящее в (2) выражение $\max\left[0;\int_t^T K(x)\omega e^{\omega(t-x)}dx-P\right]$ является непрерывной функцией от t, поэтому непрерывной функцией от t будет и производная $K'(t)$.

При построении модели мы, по существу, приняли, что налог на прибыль и инфляция отсутствуют. Разумеется, это было сделано только для упрощения изложения. Освободиться от такого нереального допущения можно, используя прием, описанный в [1,4,6]. Не повторяя соответствующих рассуждений, укажем лишь, что учет налога на прибыль и инфляции практически не изменяет основных уравнений модели. Изменяется только ставка дисконтирования – теперь она должна определяться по немного более сложной формуле:

$$r=\frac{\rho_a}{1-n}+i-m,$$

где ρ_a – непрерывная номинальная посленалоговая ставка дисконтирования, n – ставка налога на прибыль, i – непрерывный темп роста цен на машины данной марки.

Учитывая указанное обстоятельство, мы продолжим исследование модели, не конкретизируя способ установления ставки дисконтирования r.

3. Исследование модели

В этом разделе мы выясним, как устроена зависимость $K(t)$ стоимости машины от ее эффективного возраста. Одновременно мы будем определять средний предстоящий срок службы машин разного возраста. При этом мы рассмотрим две ситуации.

1. L=0, т.е. ремонт машины после отказа неэффективен при любом ее возрасте. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$K'(t)-(r+\lambda)K(t)+B(t)=0.$$

Решением этого уравнения при условии $K(T)$=0 будет:

$$K(t)=\int_t^T B(s)e^{(r+\lambda)(t-s)}ds\,. \tag{3}$$

При этом

$$V(t)=\int_t^T K(x)\omega e^{\omega(t-x)}dx=\int_t^T\left[\int_x^T B(s)e^{(r+\lambda)(x-s)}ds\right]\omega e^{\omega(t-x)}dx=$$
$$=\frac{\omega}{r+\lambda-\omega}\int_t^T B(s)\left[e^{\omega(t-s)}-e^{(r+\lambda)(t-s)}\right]ds. \tag{4}$$

Поскольку функция $B(t)$ убывающая, то с ростом t будут убывать и $K(t)$ и $V(t)$, что, впрочем, легко проверить. Но тогда, чтобы было $V(t) \le P$ при всех t, достаточно, чтобы было $V(0) \le P$. Таким образом, данный случай имеет место только при

$$\frac{\omega}{r+\lambda-\omega}\int_0^T B(s)\left[e^{-\omega s}-e^{-(r+\lambda)s}\right]ds \le P. \tag{5}$$

Возьмем машину возраста t лет на дату оценки. Средний оставшийся срок ее службы обозначим через $\Psi(t)$. Если за малое время ε произойдет отказ, срок службы машины закончится. В противном случае (т.е. с вероятностью $1-\lambda\varepsilon$) возраст машины увеличится на ε, а средний оставшийся срок ее службы станет равным $\Psi(t+\varepsilon)\approx \Psi(t)+\varepsilon\,\Psi'(t)$. Поэтому

$$\Psi(t)\approx\varepsilon+(1-\lambda\varepsilon)\left[\Psi(t)+\varepsilon\Psi'(t)\right]\approx\Psi(t)+\varepsilon\left[\Psi'(t)-\lambda\Psi(t)+1\right].$$

Такое равенство возможно только если

$$\Psi'(t)-\lambda\Psi(t)+1=0. \tag{6}$$

У машин предельного возраста T средний оставшийся срок службы нулевой, поэтому $\Psi(T) = 0$. Решением (6) с этим краевым условием будет:

$$\Psi(t)=\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}. \tag{7}$$

При $t = 0$ эта формула дает средний срок службы машины, введенной в эксплуатацию на дату оценки – ожидаемый (полный) срок службы машин рассматриваемой марки, обозначим его через T_e:

$$T_e=\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}. \tag{8}$$

2. $L>0$. В этой ситуации неравенство (5) не выполняется, а решение уравнения (2) состоит из двух кусков.

При $L\le t\le T$ функция $K(t)$ по-прежнему будем выражаться формулой (3). В частности, в точке L в силу (4) и (3) будем иметь:

$$V(L)=\int_L^T \omega B(s)\frac{e^{\omega(L-s)}-e^{(r+\lambda)(L-s)}}{r+\lambda-\omega}ds=P;\ \ K(L)=\int_L^T B(s)e^{(r+\lambda)(L-s)}ds. \tag{9}$$

При $t\le L$ функция $K(t)$ будет удовлетворять уже другому уравнению:

$$K'(t)-(r+\lambda)K(t)+\lambda\left[V(t)-P\right]+B(t)=0. \tag{10}$$

Поскольку $K(t)$ и $V(t)$ непрерывны по t, равенства (9) будут краевыми условиями для (10).

Легко видеть, что, если $t \le L$, то $V'(t) = \omega V(t) - \omega K(t)$, так что

$$K(t) = V(t) - \omega^{-1} V'(t), \quad K'(t) = V'(t) - \omega^{-1} V''(t). \tag{11}$$

Подставляя это в (10), после простых преобразований получим:

$$V''(t) - (r + \lambda + \omega) V'(t) + r\omega V(t) = \omega \left[B(t) - \lambda P \right]. \tag{12}$$

Корнями соответствующего характеристического уравнения будут:

$$\theta = \frac{r + \lambda + \omega + \sqrt{(r + \lambda + \omega)^2 - 4r\omega}}{2}, \eta = \frac{r + \lambda + \omega - \sqrt{(r + \lambda + \omega)^2 - 4r\omega}}{2}. \tag{13}$$

Краевые условия для уравнения (12) вытекают из (9) и (11):

$$V(L) = P; \quad V'(L) = \omega \left[V(L) - K(L) \right] = \omega P - \omega \int_L^T B(s) e^{(r+\lambda)(L-s)} ds.$$

Решив уравнение (12) при этих условиях, для $t \le L$ получим:

$$(\theta - \eta) V(t) = P \left[\left(\omega - \eta - \frac{\lambda \eta}{r} \right) e^{\theta(t-L)} + \left(\theta - \omega + \frac{\lambda \theta}{r} \right) e^{\eta(t-L)} - \frac{\lambda(\theta - \eta)}{r} \right] +$$

$$+ \omega \left[e^{\eta(t-L)} - e^{\theta(t-L)} \right] \int_L^T B(x) e^{(r+\lambda)(L-x)} dx + \omega \int_t^L B(x) \left[e^{\eta(t-x)} - e^{\theta(t-x)} \right] dx.$$

Отсюда и из (11) и (13) после ряда преобразований найдем:

$$(\theta - \eta) K(t) = \int_t^L B(x) \left[(\omega - \eta) e^{\eta(t-x)} - (\omega - \theta) e^{\theta(t-x)} \right] dx +$$

$$+ \left[(\omega - \eta) e^{\eta(t-L)} - (\omega - \theta) e^{\theta(t-L)} \right] \int_L^T B(x) e^{(r+\lambda)(L-x)} dx + \tag{14}$$

$$+ \frac{\lambda P}{r} \left[\theta e^{\eta(t-L)} - \eta e^{\theta(t-L)} - \theta + \eta \right].$$

Значение L при этом определяется первым из условий (9).

Найдем теперь средний оставшийся срок службы машины возраста $t \le L$. Для этого заметим, что через малое время ε возраст машины увеличится либо на ε (если отказа не будет, т.е. с вероятностью $1\text{-}\lambda\varepsilon$), либо на случайную величину τ, имеющую плотность распределения $\omega e^{-\omega\tau}$. При этом, если окажется, что $\tau > T\text{-}t$, машину придется утилизировать. Поэтому

$$\Psi(t) \approx \varepsilon + (1 - \lambda\varepsilon) \Psi(t + \varepsilon) + \lambda\varepsilon \int_0^{T-t} \Psi(t + \tau) \omega e^{-\omega\tau} d\tau.$$

Отсюда легко выводится, что

$$\Psi'(t)-\lambda\Psi(t)+\lambda\int_t^T \Psi(x)\omega e^{-\omega(x-t)}dx+1=0. \qquad (15)$$

Поскольку функция Ψ непрерывна на [0, *T*], ее значение в граничной точке *L* дается формулой (7): $\Psi(L)=\frac{1-e^{-\lambda(T-L)}}{\lambda}$. Пусть $\varphi(t)=\int_t^T \Psi(x)e^{-\omega(x-t)}dx$. Тогда $\varphi'(t)=\omega\varphi(t)-\Psi(t)$ и $\Psi(t)=\omega\varphi(t)-\varphi'(t)$.

Подставив это в (15), найдем:

$$\varphi''(t)-(\lambda+\omega)\varphi'(t)-1=0. \qquad (16)$$

Краевыми условия для этого уравнения, вытекающими из (7), являются:

$$\varphi(L)=\int_L^T \frac{1-e^{-\lambda(T-x)}}{\lambda}e^{-\omega(x-L)}dx=\frac{1-e^{-\omega(T-L)}}{\lambda\omega}-\frac{e^{-\lambda(T-L)}-e^{-\omega(T-L)}}{\lambda(\omega-\lambda)}.$$

$$\varphi'(L)=\omega\varphi(L)-\Psi(L)=\omega\left[\frac{1-e^{-\omega(T-L)}}{\lambda\omega}-\frac{e^{-\lambda(T-L)}-e^{-\omega(T-L)}}{\lambda(\omega-\lambda)}\right]-\frac{1-e^{-\lambda(T-L)}}{\lambda}=$$
$$=\frac{e^{-\omega(T-L)}-e^{-\lambda(T-L)}}{\omega-\lambda}.$$

Решением уравнения (16) с этими граничными условиями будет:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\lambda\omega}-\frac{1}{(\omega+\lambda)^2}-\frac{\omega^2e^{-\lambda(T-L)}-\lambda^2e^{-\omega(T-L)}}{\lambda\omega\left(\omega^2-\lambda^2\right)}+\frac{L-t}{\omega+\lambda}+$$
$$+\left[\frac{1}{(\omega+\lambda)^2}+\frac{e^{-\omega(T-L)}-e^{-\lambda(T-L)}}{\omega^2-\lambda^2}\right]e^{-(\omega+\lambda)(L-t)}.$$

Отсюда, учитывая, что $\Psi(t)=\omega\varphi(t)-\varphi'(t)$, находим:

$$\Psi(t)=\frac{\omega(L-t)}{\omega+\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda}{(\omega+\lambda)^2}-\frac{\omega^2e^{-\lambda(T-L)}-\lambda^2e^{-\omega(T-L)}}{\lambda\left(\omega^2-\lambda^2\right)}-$$
$$-\frac{\lambda}{\omega+\lambda}\left[\frac{1}{\omega+\lambda}-\frac{e^{-\lambda(T-L)}-e^{-\omega(T-L)}}{\omega-\lambda}\right]e^{-(\omega+\lambda)(L-t)}. \qquad (17)$$

При *t*=0 отсюда получим средний срок службы машины, введенной в эксплуатацию на дату оценки:

$$T_e = \frac{\omega L}{\omega+\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{(\omega+\lambda)^2} - \frac{\omega^2 e^{-\lambda(T-L)} - \lambda^2 e^{-\omega(T-L)}}{\lambda(\omega^2-\lambda^2)} -$$
$$- \frac{\lambda}{\omega+\lambda}\left[\frac{1}{\omega+\lambda} - \frac{e^{-\lambda(T-L)} - e^{-\omega(T-L)}}{\omega-\lambda}\right] e^{-(\omega+\lambda)L}. \quad (18)$$

4. Применение к установлению коэффициентов годности

Оценивать рыночную стоимость машин по формулам (3) и (14) нецелесообразно. Дело в том, что во многих случаях непосредственное измерение выгод от использования машин либо вообще невозможно, либо возможно с весьма низкой точностью. В последнем случае возникает следующая проблема. Формула (14) должна быть справедлива и при $t=0$, и тогда она даст стоимость машины в новом состоянии. Однако такой расчет будет менее точен, чем оценка этой же стоимости по данным первичного рынка. В связи с этим гораздо удобнее оценивать подержанную машину путем умножения стоимости машины той же марки в новом состоянии на коэффициент годности, как это обычно и делается. Значения коэффициентов годности $k(t)=K(t)/K(0)$ при этом можно установить, используя формулы (3) и (14).

Чтобы реализовать эту идею, необходимо задать не абсолютные значения интенсивностей выгод от использования машин разного возраста, а их относительные значения – индексы. Введем поэтому в рассмотрение относительные показатели (первые два из них должны задаваться экзогенно, последний должен определяться в ходе расчетов):

$J(t)=B(t)/B(0)$ – индекс изменения интенсивности выгод с возрастом ($J(0)=1$);

$p=P/K(0)$ – относительная стоимость ремонта;

$b=B(0)/K(0)$ – относительная интенсивность выгод от использования машины в новом состоянии.

Теперь, если разделить равенства (3) и (14) на стоимость машины в новом состоянии $K(0)$, мы получаем следующий метод определения коэффициентов годности. Он включает два этапа.

На **первом** этапе рассчитываются значения $k(t)$ в предположении, что ремонт после отказа не производится. Здесь, в соответствии с (3), имеем:

$$k(t) = b\int_t^T J(x)e^{(r+\lambda)(t-x)}dx. \quad (19)$$

Неизвестное значение b при этом должно определяться из условия $k(0)=1$. Отсюда находим:

$$b=\left[\int_0^T J(x)e^{-(r+\lambda)x}dx\right]^{-1}. \tag{20}$$

Далее проверяется, действительно ли проведение ремонта после отказа нецелесообразно, т.е. выполняется ли неравенство (5), которое в относительных показателях с учетом (20) можно представить в таком виде:

$$\int_0^T J(s)\left\{\omega e^{-\omega s}-\left[\omega+p(r+\lambda-\omega)\right]e^{-(r+\lambda)s}\right\}ds\le 0. \tag{21}$$

Если это неравенство выполняется, расчет на этом заканчивается. В противном случае надо перейти ко **второму** этапу.

Здесь при $L\le t\le T$ динамика $k(t)$ определяется формулой (19), при $t\le L$ – формулой (14), которая в относительных показателях имеет вид:

$$\begin{aligned}k(t)={}&b\int_t^L J(x)\frac{(\omega-\eta)e^{\eta(t-x)}-(\omega-\theta)e^{\theta(t-x)}}{\theta-\eta}dx+\\&+b\frac{(\omega-\eta)e^{\eta(t-L)}-(\omega-\theta)e^{\theta(t-L)}}{\theta-\eta}\int_L^T J(x)e^{(r+\lambda)(L-x)}dx+\\&+\frac{\lambda p}{r(\theta-\eta)}\left[\theta e^{\eta(t-L)}-\eta e^{\theta(t-L)}-\theta+\eta\right].\end{aligned} \tag{22}$$

Значения θ и η при этом определяются формулами (13). Неизвестные L и h можно найти из равенств (9) и $k(0)=1$, представив их в виде:

$$\frac{\omega b}{\rho+\lambda+\omega}\int_L^T J(x)\left[e^{(\rho+\lambda)(x-L)}-e^{\omega(L-x)}\right]dx=P, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&b\int_0^L J(x)\frac{(\omega-\eta)e^{-\eta x}-(\omega-\theta)e^{-\theta x}}{\theta-\eta}dx+\frac{\lambda p}{r(\theta-\eta)}\left[\theta e^{-\eta L}-\eta e^{-\theta L}-\theta+\eta\right]+\\&+b\frac{(\omega-\eta)e^{-\eta L}-(\omega-\theta)e^{-\theta L}}{\theta-\eta}\int_L^T J(x)e^{(r+\lambda)(L-x)}dx=1.\end{aligned} \tag{24}$$

Для практического применения предложенного метода необходимо задать индексы $J(t)$, отражающие влияние возраста на интенсивность выгод от рационального использования машины. Функция $J(t)$ при этом должна быть убывающей и обращаться в нуль в конце предельного срока службы машины T. Характер убывания этой функции может быть различным. Для одних видов машин темпы снижения $B(t)$ малы в первые годы эксплуатации и велики в конце срока службы. Для других видов машин ситуация обратная: эти темпы велики в начале эксплуатации, а к концу срока службы снижаются. Обе ситуации можно описать простой моделью, по существу, предложенной в [3,5]:

$$J(t)=\frac{e^{\mu T}-e^{\mu t}}{e^{\mu T}-1}. \tag{25}$$

"Физический" смысл калибровочного параметра μ можно прояснить, учитывая, что выгоды от использования машины – это стоимость произведенной ею продукции за вычетом операционных затрат. Допустим, что производительность машины и часть операционных затрат не меняются с возрастом, а другая часть этих затрат с возрастом растет экспоненциально с постоянным темпом μ. Такая ситуация описывается моделью (25) при $\mu>0$. График зависимости $B(t)$ будет выпуклым *вверх*. Ситуация с $\mu<0$ обратная: здесь с возрастом производительность машины и часть операционных затрат уменьшаются с постоянным темпом $\mu<0$, а другая часть этих затрат остается постоянной. График зависимости $B(t)$ здесь выпуклый *вниз*. В иных ситуациях модель (25) может рассматриваться как приближенная.

При использовании индексов (25) входящие в (19) – (24) интегралы вычисляются аналитически. Мы не будем приводить соответствующих выражений.

Как видим, для установления зависимости коэффициентов годности от возраста необходимо знать параметры r, T, p, λ, ω и μ. При этом ставка дисконтированная, скорректированная с учетом адвалорных расходов, является общерыночной характеристикой и может быть оценена известными методами. Относительные затраты на ремонт машин p можно оценить по данным владельцев машин или ремонтных предприятий. Остальные же параметры, по нашему мнению, можно рассматривать как технические или технологические характеристики машин данной марки или вида. В таком случае их значения не должны зависеть от того, в каком году и в каком регионе производится оценка. Поэтому оценку этих параметров достаточно произвести однократно и это будет не слишком трудоемкая работа, хотя и требующая сравнительно большого объема исходной информации о машинах одной марки разного возраста.

Предельный срок службы машин T можно установить, анализируя данные о возрастном составе машинного парка. Для оценки интенсивности отказов λ можно использовать информацию о надежности машин или ее отдельных узлов и элементов. Значение ω влияет на коэффициенты годности, только если неравенство (21) не выполняется. Для ее оценки можно использовать данные предприятий и технических специалистов о среднем сроке службы машин T_e при их рациональном использовании. Тогда значение ω надо подобрать так, чтобы значение T_e совпало с рассчитанным по формуле (18).

Что же касается параметра μ, то оценить его можно только, анализируя цены сделок с машинами разного возраста (включая и машины в новом состоянии). Такой анализ позволит оценить фактические коэффициенты годности машин отдельных возрастов, и μ надо подобрать так, чтобы эти значения совпали с рассчитанными изложенным методом.

При реализации указанных процедур полезно представлять, как влияет изменение отдельных параметров на коэффициенты годности. Такое влияние проиллюстрируем следующими графиками. Точки излома на графиках с четными номерами отвечают возрастам, начиная с которых ремонтировать машину становится неэффективным.

Рис. 1-2 отражают зависимости коэффициентов годности (k) и среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста при r=0.08, T=16, p=0.2, ω=0.5, μ=0.3 при разных значениях λ. На рис. 3-4 представлены аналогичные зависимости при r=0.08, T=16, p=0.2, λ=0.6, μ=0.3 при разных значениях ω. Как видим, рост λ и снижение ω слабо влияют на динамику износа, но сильно сокращают средний оставшийся срок службы машины.

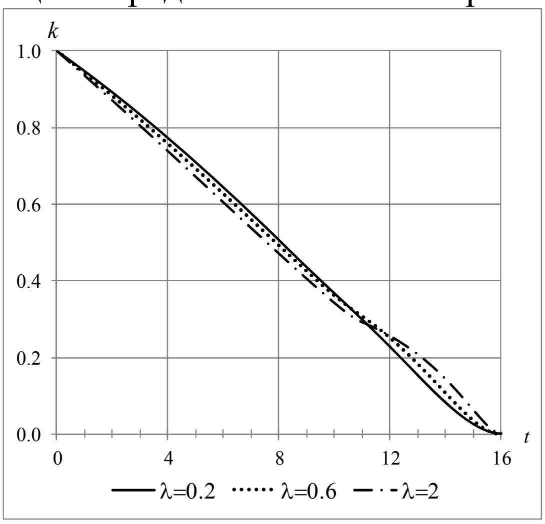

Рис. 1. Зависимость коэффициента годности (k) от возраста машины при разных значениях λ.

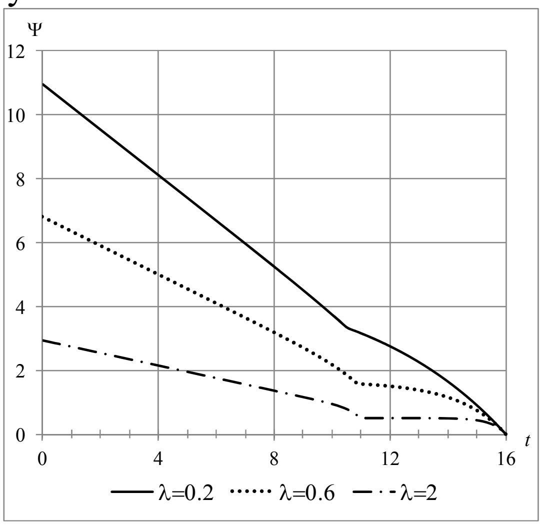

Рис. 2. Зависимость коэффициента среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста машины при разных значениях λ.

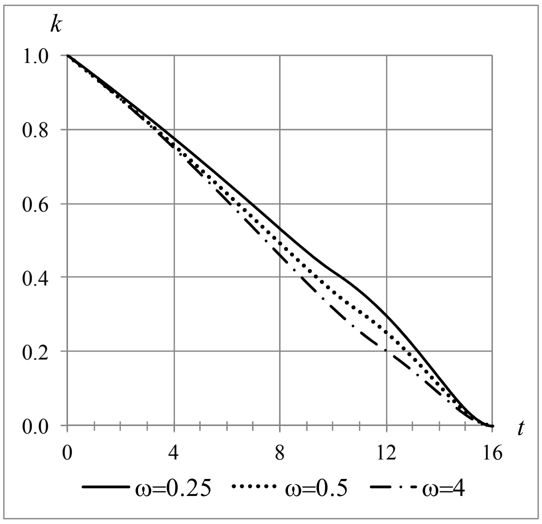

Рис. 3. Зависимость коэффициента годности (k) от возраста машины при разных значениях ω.

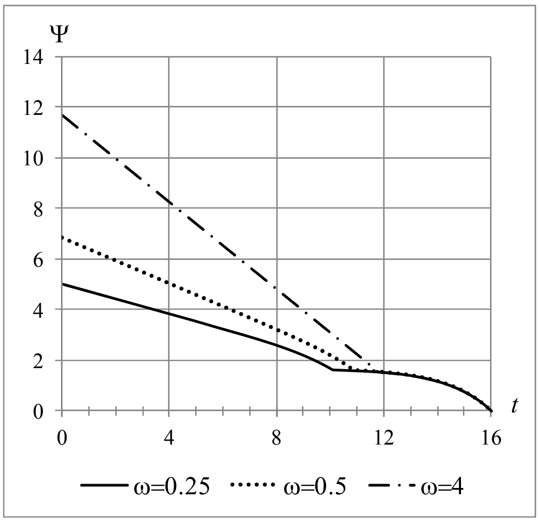

Рис. 4. Зависимость коэффициента среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста машины при разных значениях ω.

Рис. 5-6 представляют зависимости $k(t)$ и $\Psi(t)$ при r=0.08, T=16, p=0.2, λ=0.6, ω=0.5 и разных значениях μ. Как видим, изменение существенно влияет на динамику коэффициентов годности.

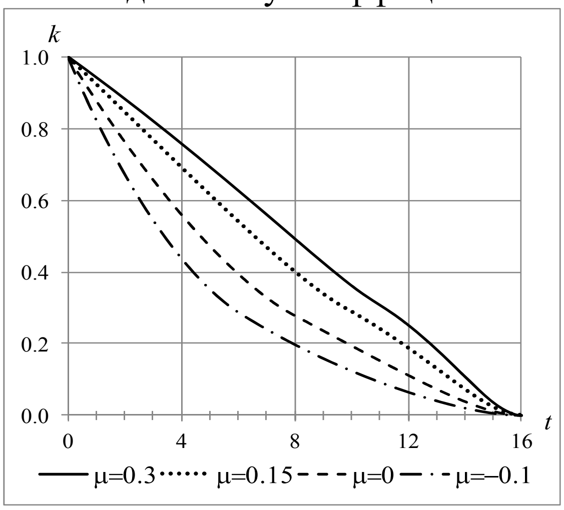

Рис. 5. Зависимость коэффициента годности (k) от возраста машины при разных значениях μ.

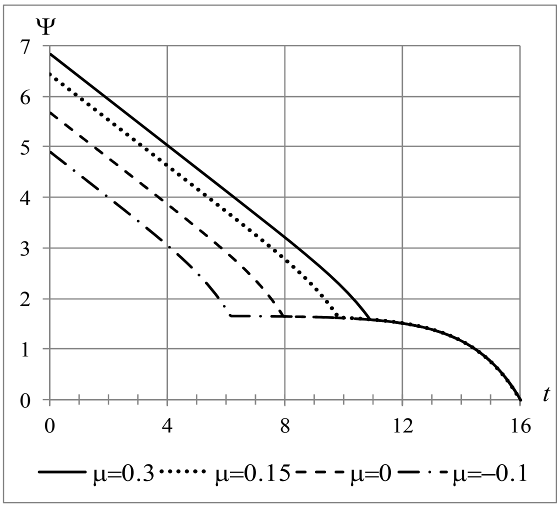

Рис. 6. Зависимость коэффициента среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста машины при разных значениях μ.

Влияние относительных затрат на ремонт (p) на $k(t)$ и $\Psi(t)$ при r=0.08, T=16, λ=0.6, ω=0.5, μ=0.3 представлено на рис. 7-8. Как видим, изменение p слабо сказывается на динамике коэффициентов годности.

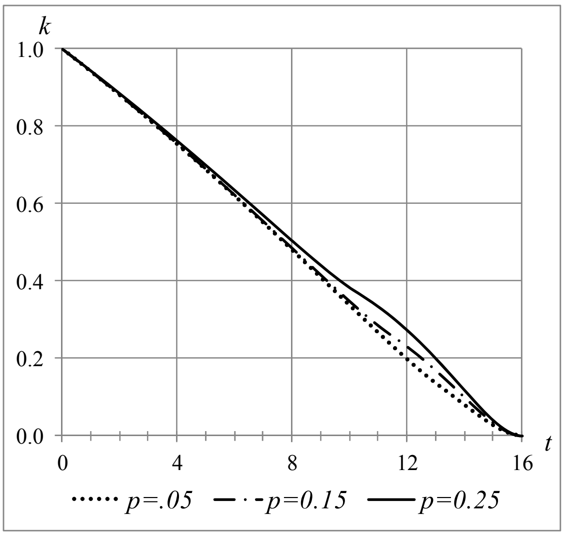

Рис. 7. Зависимость коэффициента годности (k) от возраста машины при разных значениях p .

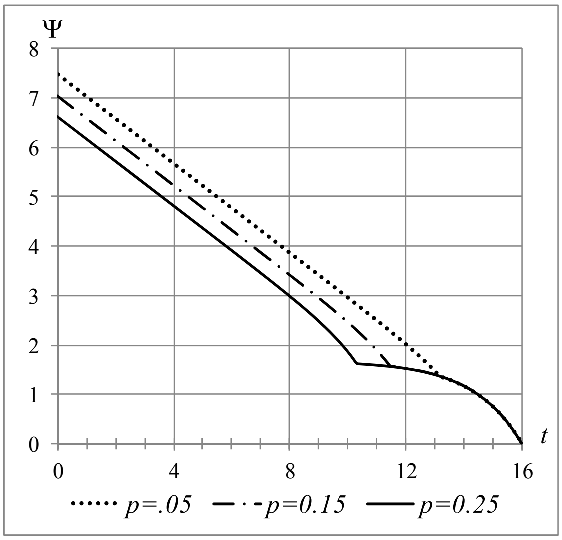

Рис. 8. Зависимость коэффициента среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста машины при разных значениях p .

Как сказывается на динамике $k(t)$ и $\Psi(t)$ изменение предельного срока службы машины (T), видно из рис. 9-10, построенных при r=0.08, p=0.2, λ=0.6, ω=0.5, μ=0.3. Здесь для большей наглядности по оси абсцисс отложен не абсолютный, а относительный эффективный возраст машины (t/T). Как видим, с ростом T коэффициенты годности снижаются (особенно сильно – для машин “среднего” возраста), а средние оставшиеся сроки службы растут (в первые годы службы – примерно пропорционально).

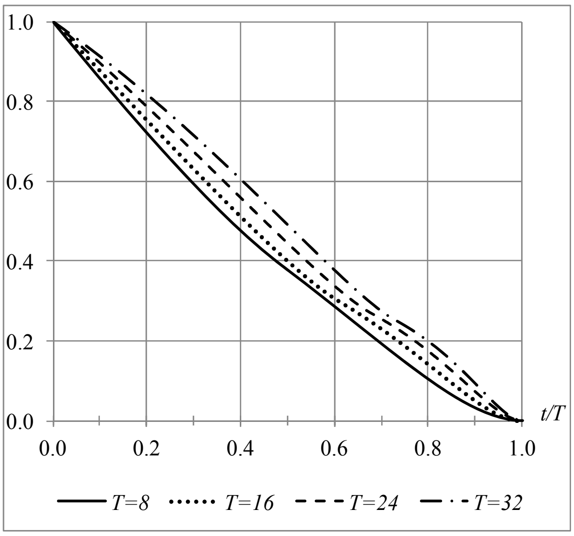

Рис. 9. Зависимость коэффициента годности (k) от возраста машины при разных значениях T.

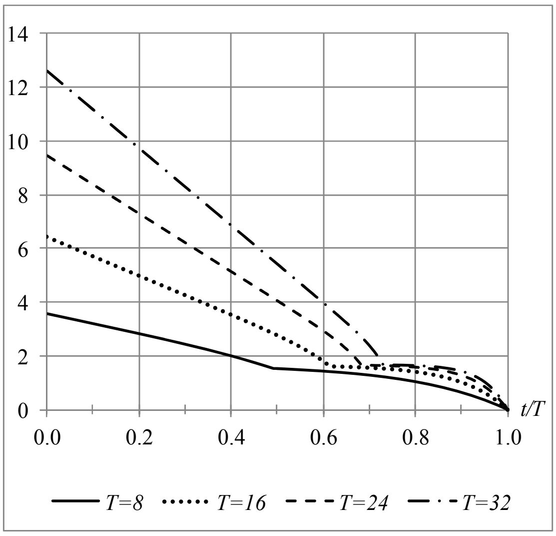

Рис. 10. Зависимость коэффициента среднего оставшегося срока службы машины (Ψ) от возраста машины при разных значениях T.

Автор приносит благодарность оценщикам к.т.н. Л.А. Лейферу, к.э.н. О.В. Тевелевой и к.т.н. А.Н. Фоменко, мнение которых по ряду затронутых в статье вопросов было принято во внимание.

Литература

1. Smolyak S. A. Models for Estimating Depreciation in Plants, Machinery, and Equipment: Analysis and Proposals // Journal of Property Tax Assessment & Administration, 2012, т.9, вып. 3. С. 47–86..

2. Международный комитет по стандартам оценки. Международные стандарты оценки. М.: Российское общество оценщиков, 2007.

3. Смоляк, С. А. Дисконтирование денежных потоков в задачах оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости имущества. М.: Наука, 2006.

4. Смоляк, С. А. Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. М.: РИО МАОК, 2008.

5. Смоляк, С. А. Модели оценки износа машин и оборудования // Анализ и моделирование экономических процессов, вып. 5, 2008. С. 23–50.

6. Смоляк, С. А. Стохастическая модель износа машин // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48. № 1. С. 56–66.

7. Смоляк, С. А. Эргодические модели износа машин и оборудования // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48. № 4. С. 66–79.

8. Смоляк, С. А. Оценка рыночной стоимости машин, подвергающихся капитальному ремонту // Экономика и математические методы. 2013. Т. 49. № 1. С. 54–72.

Раздел 2. Модели финансовых и рыночных механизмов

В.А. Булавский, В.В. Калашников, Н.И. Калашникова

Равновесия с согласованными предположениями в смешанной олигополии с разрывной функцией спроса[1]

Введение

Изучение поведения агентов смешанной олигополии, в которой наряду с частными (иностранными) фирмами, максимизирующими чистую прибыль, конкурируют государственные компании с другой функцией полезности, становится все более востребованным в последнее время. Пионерскими в этой области можно назвать работы [1–5], в статьях [6–8] представлены достаточно полные обзоры современных результатов. Смешанные олигополии вызывают повышенный интерес экономистов, в частности, в силу их важности для моделирования экономики, как европейских стран, так и Канады и Японии (например, в [9] приводится анализ согласованного («стадного») поведения частных фирм во многих отраслях японской экономики). Примеры смешанных олигополий можно найти в США в таких отраслях, как экспресс-почта, службы упаковки, и др. Смешанные олигополии также нередко встречаются в переходных экономиках стран Восточной Европы и странах СНГ, в которых конкуренция между частично – государственными и частными компаниями обычна во многих отраслях, особенно в финансовых (банки, ипотеки, страхование), авиатранспорте, телекоммуникациях, газовой промышленности, электроэнергии, автопромышленности, автотранспорте, сталелитейной промышленности, образовании, здравоохранении, теле- и радиовещании, железнодорожном транспорте, экспресс-почте, и пр. Согласно [5, 10, 11], во многих случаях государство обладало или продолжает контролировать существенную долю акций приватизированных компаний, а также встречаются компании со смешанными формами собственности (частной и общественной).

В большинстве вышеупомянутых работ изучение смешанных олигополий проводится в рамках классических моделей Курно, Хотеллинга или Штакельберга (*см*. [10, 12, 13]). Как известно [14], понятие равновесия по Нэшу, включающее равновесие по Курно как частный случай, основано на том, что каждый игрок, оценивая свои перспективы при отклонении от своей «предположительно оптимальной» стратегии, предполагает, что остальные

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта CB-2008-01-106664, выделенного Госкомитетом по науке и технике Мексики (CONACyT), и гранта CB-2009-01-127691 от CONACyT и CE250-09 от PAICyT.

участники игры не меняют свои «предположительно оптимальные» стратегии. Однако, уже достаточно давно (даже ранее Нэша) другое, более общее понятие *равновесия с предположениями* (conjectural variations equilibrium, CVE) было предложено рядом авторов (*см*., например, [15, 16]). Согласно этой концепции, агенты модели ведут себя следующим образом: каждый из них выбирает наилучшую стратегию, принимая во внимание, что другие игроки могут ответить на вариации его стратегии также изменением своих стратегий согласно *фунциям*, которые *предполагает* (приписывает им) первый игрок. В наших предыдущих работах [17–21] мы уже рассматривали модель олигополии с вариационными предположениями, в которых степень влияния каждого агента квалифицируется специальными параметрами (*коэффициентами влияния*). Таким образом, в указанных работах вводится и изучается новый класс равновесий с предположениями (CVE) на рынке однородного продукта (модель Курно), в которых коэффициенты влияния отличны от 1 – значения коэффициентов влияния в классическом равновесии Курно-Нэша. Различные теоремы существования и единственности такого обобщенного равновесия также получены в статьях [17–21].

Как отмечалось в [14, 22], понятие равновесия с предположениями (отличными от предположений Курно–Нэша) подвергалось критике различными исследователями (*см*., например, [23]). Тем не менее, экономисты широко используют различные виды CVE для предсказаний результатов некооперативного поведения участников различных олигополистических рынков. Предыдущие исследователи CVE в основном уделяли внимание играм двух участников [14], и главное место в таких исследованиях занимало понятие *предположения* (conjecture). Обычно *вариационное предположение* r_j описывает предполагаемую игроком i реакцию игрока j на бесконечно малую вариацию стратегии игроком i. Такая конструкция логично приводит к понятию *функции предполагаемой реакции* оппонента. Построив такую функцию реакции соперника, каждый игрок оптимизирует свою (по сути, предполагаемую) функцию полезности, формируя, таким образом, свою *функцию наилучшего ответа* на предположения. Равновесие наступает в том случае, когда ни один из игроков не заинтересован в отклонении от своей стратегии, то есть, от своей функции наилучшего ответа на стратегии другого игрока.

Такое равновесие с предположениями (CVE) часто называют *состоятельным* (consistent), или *«рациональным»* в случае совпадения у каждого игрока его функции наилучшего ответа и функции предполагаемой реакции. Но такое сравнение, осуществимое в игре двух лиц, сталкивается с неопредолимым препятствием в игре трех и более лиц ($n \geq 3$) [14]: количество функций наилучшего ответа n не совпадает с количеством функций предполагаемой реакции $n(n-1)$. Одной из возможных форм преодоления этого препятствия является предложенная В.А. Булавским [24] структура модели, в которой любой игрок делает предположения не об индивидуальных функциях реакции каждого из остальных участников, а об ответных вариациях некоего интегрального показателя (например, рыночной цены товара) как реакции на его бесконечно малые вариации объема производства. Зная аналогичные предположения остальных участников, которые для простоты также называются коэффициентами влияния), каждый агент может применить некоторую *процедуру верификации*, чтобы проверить, является ли его коэффициент влияния согласованным с такими же других игроков. Естественно тогда назвать равновесие с предположениями (CVE) *согласованным* или *состоятельным* (consistent), если *все* коэффициенты влияния успешно проходят процедуру верификации.

Интересно отметить, что точно такие же формулы для процедуры верификации были через 10 лет после выхода статьи В.А. Булавского [24] предложены и обоснованы в работе [25]. В этой работе также доказаны теоремы существования и единственности согласованного равновесия с предположениями для олигополистического рынка электроэнергии, но при более сильных предположениях, чем в [24]; в частности, предполагается линейность обратной функции спроса и квадратичность функций затрат участников. Кроме того, для установления своих результатов, авторы [25] использовали гораздо более сложную технику оптимального управления (*см.* также [26]).

В наших предыдущих работах [30, 31], результаты [24] были распространены на смешанную олигополию. Аналогично [17–21], находилось равновесие с предположениями, однако, в отличие от прежних статей, были реализованы идеи [24, 27] с выбором рыночной цены p, а не общего объема производства G, в качестве наблюдаемой (независимой) переменной. С другой стороны, технические трудности, возникающие из-за присутствия особой компании, максимизирующей, например, внутренний социальный излишек (domestic social surplus) вместо чистой прибыли, требуют в ряде результатов ужесточить предположения о параметрах модели (по сравнению с работой [24]), например, о степени гладкости обратной функции спроса. Именно, в статьях [30, 31] обратная функция спроса предполагается непрерывно дифференцируемой, что конечно, существенно сужает возможные области применения данной теоретической модели смешанной олигополии. Поэтому в предлагаемой работе ослабляется это предположение и заменяется условием, что обратная функция спроса, как и в [24], даже не обязательно непрерывна. Тем не менее, результаты статей [30, 31] перенесены почти полностью на эти более общие условия.

Дальнейший текст статьи имеет следующую структуру. В параграфе 2 модель смешанной олигополии из [30, 31] переформулирована при более общих предположениях об обратной функции спроса. Затем в параграфе 3 введено понятие внешнего равновесия, то есть, равновесия с предположениями (коэффициентами влияния), выбранными и зафиксированными заранее. Теоремы существования и единственности такого равновесия для любого набора допустимых коэффициентов влияния завершают параграф 3. В четвертом параграфе дано определение внутреннего равновесия как внешнего равновесиям с согласованными (состоятельными, consistent) предположениями (коэффициентами влияния). Критерий согласованности, процедура его верификации и теорема существования внутреннего равновесия приведены в том же параграфе 4. Список цитированной литературы завершают работу.

1. Описание модели

Рассматривается рынок по крайней мере с 2 производителями однородного продукта с функциями затрат $f_i\left(q_i\right), i=0,1,\dots,n$, $n \ge 1$, где q_i обозначает объем производства продукта фирмой i. Спрос потребителей на товар описывается обратной функцией спроса $G(p)$, чей аргумент p есть рыночная цена единицы продукта, предложенная производителями. Для облегчения техники изложения некоторых вопросов вводится также неотрицательный параметр D, под которым понимается так называемый активный спрос, величина которого не зависит от цены товара на рынке [24].

Так как обратная функция спроса в этой модели имеет точки разрыва (первого рода), то равновесие между спросом и предложением при заданной рыночной цене p отражено следующими «балансовыми» неравенствами:

$$g(p)+D \le \sum_{i=0}^{n} q_i \le G(p)+D. \tag{1}$$

Здесь и далее мы будем обозначать правый предел функции $G=G(p)$ в точке p с помощью $g(p)=G(p+0)=\lim\limits_{\zeta\to p+0} G(\zeta)$, тогда как предел слева той же функции в любой точке p будет предполагаться равным значению самой функции: $G(p)=G(p-0)=\lim\limits_{\zeta\to p-0} G(\zeta)$.

Другими словами, мы делаем следующее предположение относительно обратной функции спроса в нашей модели.

A1. Обратная функция спроса $G=G(p)$ определена для цен $p\in(0,+\infty)$, принимает неотрицательные значения, не возрастает и непрерывно дифференцируема всюду кроме конечного множества точек $0<p_1<p_2<\dots<p_K$, в которых функция $G=G(p)$ терпит разрыв первого рода справа, оставаясь, тем не менее, непрерывной слева. Таким образом, в точках

непрерывности $g(p)=G(p)$, тогда как $g(p)<G(p)$ в точках разрыва $p_1, p_2, \ldots, p_K$.

Следующее предположение касается функций затрат участников.

A2. Для каждого $i=0,1,\ldots,n$, функция затрат на производство q_i единиц продукта $f_i=f_i(q_i)$ квадратичная и $f_i(0)=0$, то есть

$$f_i(q_i)=\frac{1}{2}a_i q_i^2+b_i q_i, \tag{2}$$

где $a_i>0, b_i>0,\ i=0,1,\ldots,n.$

Вдобавок, предположим, что

$$b_0 \le \max_{1\le i\le n} b_i. \tag{3}$$

Участники игры действуют следующим образом. Каждая частная (иностранная) фирма i, $i=1,\ldots,n$, выбирает свой объем выпуска $q_i \ge 0$ так, чтобы максимизировать свою функцию чистой прибыли $\pi_i(p,q_i)=p\cdot q_i - f_i(q_i)$. В свою очередь, государственная компания $i=0$ своим выбором объема выпуска продукции $q_0\ge 0$ стремится увеличить внутренний социальный излишек (domestic social surplus), определяемый как разность между потребительским излишком (consumer surplus), суммарным доходом частных (иностранных) компаний и затратами общественной компании:

$$S(p;q_0,q_1,\ldots,q_n)=\int\limits_0^{\sum_{i=0}^{n}q_i} p(x)dx - p\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}q_i\right)-c_0-b_0q_0-\frac{1}{2}a_0q_0^2. \tag{4}$$

Мы допускаем, что агенты (как частные фирмы, так и государственные компании) предполагают, что изменения в выборе их объемов выпуска могут привести к изменению рыночной цены *p*. Последнее можно трактовать, как предположение о скорости вариации цены *p*, обусловленной вариациями объемов выпуска q_i. В таком случае условия максимума первого порядка, описывающие равновесие в модели, имеют форму: для государственной компании ($i=0$)

$$\frac{\partial S}{\partial q_0}=p-\left(\sum_{i=1}^{n}q_i\right)\frac{\partial p}{\partial q_0}-f_0{}'(q_0)\begin{cases}=0, & \text{if } q_0>0;\\ \le 0, & \text{if } q_0=0;\end{cases} \tag{5}$$

и для частных производителей

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}=p+q_i\frac{\partial p}{\partial q_i}-f_i{}'(q_i)\begin{cases}=0, & \text{if } q_i>0;\\ \le 0, & \text{if } q_i=0,\end{cases} \quad \text{for } i=1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Таким образом для того, чтобы описать предполагаемое поведение агента, достаточно оценить (предсказать, предположить) значение частной производной $\frac{\partial p}{\partial q_i}=-v_i$, а не саму точную зависимость *p* от q_i. Знак «минус» здесь применен для того, чтобы иметь дело с неотрицательными значениями v_i. Кроме того, желательно, чтобы предположения о первой производной $\partial p / \partial q_i$ и функции затрат каждого агента обеспечивали (локальную) вогнутость его функции полезности, т.е. чистой прибыли частной фирмы, и социального излишка для общественной компании. Так как в **A2** функции затрат $f_i(q_i)$ предполагаются (сильно) выпуклыми, то для вогнутости функций полезности всех участников достаточно потребовать, чтобы величины v_i (которые далее будем называть *коэффициентами влияния* агентов $i = 0,1,\ldots,n$) были фиксированными и неотрицательными. Тогда ожидаемая частной компанией $i = 1,\ldots,n$ (локальная) зависимость ее чистой прибыли от нового значения выпуска η_i, полученного бесконечно малой вариацией текущего объема q_i, имеет вид $\left[p - v_i(\eta_i - q_i)\right]\eta_i - f_i(\eta_i)$. Очевидная вогнутость последнего выражения как функции η_i влечет справедливость утверждения: условие (первого порядка) достижения максимума прибыли агента *i* в точке $\eta_i = q_i$ выглядит так

$$\begin{cases} p = v_i q_i + b_i + a_i q_i, & \text{если } q_i > 0; \\ p \le b_i, & \text{если } q_i = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично, предположение государственной компании о локальной зависимости социального излишка от ее нового значения выпуска η_0, полученного бесконечно малой вариацией текущего объема q_0, сводится к

$$\int_0^{\eta_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i} p(x)\,dx - \left[p - v_0(\eta_0 - q_0)\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) - f_0'(\eta_0), \tag{8}$$

что́ позволяет вывести условие максимума для этой функции полезности в точке $\eta_0 = q_0$ в следующем виде:

$$\begin{cases} p = -v_0 \sum_{i=1}^{n} q_i + b_0 + a_0 q_0, & \text{если } q_0 > 0; \\ p \le -v_0 \sum_{i=1}^{n} q_i + b_0, & \text{если } q_0 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Если бы предположения агентов относительно ситуации на рынке задавались бы извне, как это делалось в предыдущих работах [17,18], [30,[31], мы бы рассматривали значения коэффициентов влияния v_i как функции переменных q_i и p. Однако в этой работе мы будем руководствоваться подходом, предложенным в [24], когда согласованные предположения участников определяются с помощью некой процедуры верификации, и непосредственно при поиске равновесия, одновременно с поиском соответствующих равновесных значений цены p и объемов выпуска продукции q_i. В последнем случае коэффициенты влияния будут называться согласованными, а соответствующее равновесие *внутренним*, и оно будет описываться совместным вектором переменных и параметров $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n, v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

3. Внешнее равновесие

Для того чтобы ввести процедуру верификации, в нашей модели мы должны сначала определить понятие *внешнего* равновесия (см., [24], [30], [31]) с параметрами v_i заданными извне (произвольно).

Определение 1. Набор $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ будем называть внешним равновесием для заданных коэффициентов влияния $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, если рынок в нашей модели сбалансирован, т.е., условие (1) выполнено, и для каждого i, имеют место соотношения максимума функции полезности агента (7), $i = 1, \ldots, n$, и (9) для $i = 0$.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы введем дополнительное предположение о параметрах модели, которое обеспечит неизменность списка реально функционирующих компаний (т.е. исключает разорение фирмы и ее выход из рынка) независимо от допустимых значений коэффициентов влияния v_i:

А3. Для цены $p_0 = \max_{1 \le j \le n} b_j$ выполнено следующее неравенство

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{p_0 - b_i}{a_i} < g(p_0). \tag{10}$$

Последнее предположение вместе с **А1** и **А2** позволяют гарантировать, что для любых неотрицательных значений $v_i, i = 1, \ldots, n,$ и для $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$, где

$$0<\overline{v}_0=\begin{cases} a_0\left[\dfrac{g(p_0)-\dfrac{p_0-b_0}{a_0}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{p_0-b_i}{a_i}}-1\right], & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{p_0-b_i}{a_i}>0; \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{11}$$

условия оптимальности (7) и (9) всегда имеют единственное решение, для которого выполнены также балансовые неравенства (1) и которое, таким образом, является внешним равновесием. Кроме того, условия (1), (7) и (9) могут иметь место одновременно только тогда, когда $p > p_0$, т.е., когда все объемы выпуска строго положительны: $q_i>0$, $i=0,1,\ldots,n.$ Точнее, можно показать справедливость следующих утверждений (в силу того, что доказательства всех теорем работы слишком объемные, они будут опубликованы в отдельной работе):

Теорема 1. *При предположениях **A1, A2** и **A3** для любых* $D\geq 0$*,* $v_0\in\left[0,\overline{v}_0\right)$ *и* $v_i\geq 0$*,* $i=1,\ldots,n$*, существует единственное внешнее равновесие* $(p,q_0,q_1,\ldots,q_n)$*, все компоненты которого непрерывно зависят от параметров* $(D,v_0,v_1,\ldots,v_n)$*. Равновесная цена* $p=p(D,v_0,v_1,\ldots,v_n)$ *всегда выше, чем* p_0*, и к тому же, как функция этих параметров, она непрерывна по их совокупности. Наконец, она имеет односторонние производные по p, выражающиеся формулами*

$$p'(D+0)\equiv\frac{\partial p}{\partial D}(D+0)=\frac{1}{\dfrac{v_0+a_0}{a_0}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{v_i+a_i}-G'(p+0)},\quad \text{если } \sum_{i=0}^{n}q_i=g(p)+D; \tag{12a}$$

$$p'(D-0)\equiv\frac{\partial p}{\partial D}(D-0)=\frac{1}{\dfrac{v_0+a_0}{a_0}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{v_i+a_i}-G'(p-0)},\quad \text{если } \sum_{i=0}^{n}q_i=G(p)+D; \tag{12b}$$

$$p'(D+0)=0,\qquad \text{если } \sum_{i=0}^{n}q_i>g(p)+D; \tag{12c}$$

$$p'(D-0)=0,\qquad \text{если } \sum_{i=0}^{n}q_i<G(p)+D. \tag{12d}$$

■

Замечание 1. Соединив на координатной плоскости (p,G) вертикальными отрезками точки с координатами $(p,g(p))$ и $(p,G(p))$ во всех точках разрыва $p=p_k$, $k=1,2,\ldots,K,$ функции спроса $G=G(p)$ и объединив эти отрезки с графиком $\Gamma = \{(p, G(p))\}_{\substack{p\in(0,+\infty)\\ p\neq p_k}}$ функции G в остальных точках, мы получим кривую L, которую будем называть *кривой спроса*. Все точки последней удовлетворяют неравенствам $g(p) \le G \le G(p),\ p > 0$. Определим теперь (формально) односторонние производные функции спроса $G = G(p)$ в ее точках разрыва так: $G'(p+0) = -\infty$ если $G > g(p)$, и также $G'(p-0) = -\infty$ при $G < G(p)$. Внешнее равновесие $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$ можно ассоциировать с точкой кривой спроса $(p, G) \in L$ такой что $G = \sum_{i=0}^{n} q_i + D$. Имея в виду эти определения и обозначения, мы можем заменить все формулы (12a) – (12d) одной формулой:

$$p'(D \pm 0) \equiv \frac{\partial p}{\partial D}(D \pm 0) = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p \pm 0)}. \tag{13}$$

Из (13) очевидно, что неравенство $p'(D+0) \neq p'(D-0)$ может иметь место *только* в равновесиях, которые ассоциируются с точками излома кривой L. Более того, по аналогии с определениями выпуклых и вогнутых функций, будем называть точку излома *точкой вогнутости*, если $p'(D+0) < p'(D-0)$ и наоборот, *точкой выпуклости*, если напротив, $p'(D+0) > p'(D-0)$. ■

4. Внутреннее равновесие

Теперь определим понятие внутреннего равновесия. Для этого сначала опишем процедуру верификации согласованности коэффициентов влияния v_i аналогичную той, что была предложена в предыдущих работах [24, 30] и [31] применительно к модели с непрерывно дифференцируемой функцией спроса. Рассмотрим внешнее равновесие $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$, которое соответствует некоему произвольному набору допустимых коэффициентов влияния $v_0, v_1, \ldots, v_n$ и активному спросу $D > 0$. Представим, что один из агентов, например, с номером $k,\ 0 \le k \le n$, временно изменяет свое поведение, отказавшись от максимизации своей функции полезности (чистой прибыли, если $k \ge 1$, или социального излишка в случае $k = 0$) и производит бесконечно малые флуктуации вокруг своего равновесного объема выпуска $q_k > 0$. В математических терминах эту процедуру можно описать как сведе́ние исходного равновесия к внешнему равновесию в модели с подмножеством агентов $i \neq k$, с той же функцией спроса $G = G(p)$, и с активным спросом, уменьшенным на величину q_k.

В таком случае вариация $q_k + \delta q_k$ объема производства фирмой k интерпретируется вариацией активного спроса по формуле $D_k = D - q_k - \delta q_k$. Предполагая эти вариации бесконечно малыми, можно считать, что агент k наблюдает соответствующие флуктуации равновесной цены и получает производную этой цены по активному спросу (т.е., $\partial p/\partial D_k = -\partial p/\partial q_k$), которая, таким образом, совпадает с его коэффициентом влияния v_k.

Однако, применяя формулы (12) или (13) из теоремы 1 для определения производной $\partial p/\partial D$, следует помнить, что компания k не участвует в уменьшенной модели, следовательно, члены с номером $i = k$ должны быть исключены из соответствующих сумм в правой части этих формул. Имея это в виду, мы приходим к следующему критерию согласованности коэффициентов влияния агентов.

Критерий согласованности. Во внешнем равновесии $(p, q_0, q_1, \ldots, q_n)$, полученном с помощью набора активного спроса и коэффициентов влияния $(D, v_0, v_1, \ldots, v_n)$, последние называются *согласованными*, если найдутся значения $r_i,\ i = 0,1,\ldots,n$, такие что

$$r_i \in \begin{cases} \left[G'(p+0), G'(p-0)\right], \text{ если } G'(p+0) \le G'(p-0); \\ \left[G'(p-0), G'(p+0)\right], \text{ если } G'(p-0) \le G'(p+0); \end{cases} \tag{14}$$

и выполнены следующие равенства:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - r_0}, \tag{15}$$

и

$$v_i = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{1}{v_j + a_j} - r_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что в случае $n = 1$ (модель смешанной *дуополии*), формулы (15) и (16) становятся значительно проще:

$$v_0 = \frac{1}{\frac{1}{v_1 + a_1} - r_0}, \tag{17}$$

и

$$v_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_0} - r_1}, \tag{18}$$

соответственно. ■

Теперь можно ввести понятия внутреннего равновесия.

Определение 2. Набор $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$, в котором $v_i \geq 0, i = 0,1,\dots,n$, будем называть *внутренним равновесием*, если, во-первых, для коэффициентов влияния $v_0, v_1, \dots, v_n$ набор $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ является внешним равновесием, а во-вторых, условия согласования (15)–(16) выполнены для всех $i = 0,1,\dots,n$. Наконец, если к тому же, все значения параметров r_i из (14) одинаковы для всех $i = 0,1,\dots,n$, т.е., $r_0 = r_1 = \cdots = r_n = r(\leq 0)$, такое внутреннее равновесие называется *сильным* (см. [24]).

Замечание 3. Заметим, что сильное внутреннее равновесие является прямым обобщением внутреннего равновесия для модели смешанной олигополии с дифференцируемой функции спроса (см. [30, 31]). Далее, если для какого-либо $i = 0,1,\dots,n$, параметру r_i выбрано предельное значение $r_i = -\infty$, то соответствующий коэффициент влияния обнуляется: $v_i = 0$. Наконец, в случае классической олигополии, когда ***все*** компании частные и поэтому максимизируют свою чистую прибыль, формулы (15)–(16) сводятся к одной формуле, полученной независимо В.А. Булавским [24] в 1997г. и Liu et al. [25] в 2007 г.:

$$v_i = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{v_j + a_j} - r_i}, \quad i = 0,1,...,n. \tag{19}$$

Однако стоит упомянуть, что авторы [25] рассматривали лишь гладкие функции спроса, поэтому фактически определили только сильное внутреннее равновесие с $r_i = G'(p), i = 0,1,\dots,n$:

$$v_i = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, \quad i = 0,1,...,n. \ \blacksquare$$

Следующий результат является распространением теоремы 2 из [24] на случай смешанной олигополии, или же, расширением теоремы 2 из [30] на случай не обязательно непрерывной функции спроса.

Теорема 2. *При предположениях* ***A1, A2*** *и* ***A3*** *существует сильное внутреннее равновесие.* ■

Для целей дальнейших исследований модели, в которых будет проведен качественный анализ соотношений между спросом и предложением (аналогичный тому, что реализован В.А. Булавским [24] для классической олигополии), нам необходимы результаты относительно монотонности согласованных коэффициентов влияния $v_i = v_i(\tau), i = 0,1,\ldots,n$, как функций параметра $\tau = G'(p)$.

Переписав уравнения (15) – (16) в форме

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - \tau}, \tag{20}$$

и

$$v_i = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{v_j + a_j} - \tau}, i = 1,\ldots,n, \tag{21}$$

где $\tau \in (-\infty, 0]$, сразу легко увидеть, что когда $\tau \to -\infty$, система уравнений (20)–(21) имеет в пределе единственное решение $v_i = 0, i = 0,1,\ldots,n$, соответствующее случаю совершенной конкуренции. Что касается конечного правого предела параметра τ и монотонного поведения коэффициентов влияния внутри их области определения $\tau \in (-\infty, 0]$, можно доказать следующее утверждение, которое переносит теорему 3 из [30] и [31] на случай необязательно гладкой функции спроса $G = G(p)$.

Теорема 3. *При выполнении предположений* ***A1 – A3****, для любого* $\tau \in (-\infty, 0]$ *существует единственное решение уравнений (20)–(21) как набор функций* $v_i = v_i(\tau), i = 0,1,\ldots,n$, *зависящих непрерывно от* τ. *Более того,* $v_i(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to -\infty$, $i = 0,1,\ldots,n$, *а* $v_0(\tau)$ *строго возрастает и стремится к* $v_0(0)$ *когда* τ, *возрастая, стремится к нулю.* ■

Заключение

В этой статье изучается модель смешанной олигополии на рынке однородного продукта с не обязательно гладкой функцией спроса, в которой отыскиваются равновесия с вариационными предположениями (conjectural variations equilibria, CVE). Предположения агентов касаются изменений рыночной цены продукта как следствия увеличения или уменьшения объема их выпуска продукции. Для любого набора допустимых предположений установлено существование единственного равновесия (называемого внешним), основанного на данных предположениях (называемых коэффициентами влияния) агентов модели. Для того чтобы ввести понятие внутреннего равновесия, предложен критерий согласованности коэффициентов влияния между собой и доказано существование такого равновесия (определяемого как CVE с согласованными коэффициентами влияния). Также исследована монотонность изменения согласованных предположений (коэффициентов влияния) как функций параметра, представляющего производную функции спроса по рыночной цене.

В дальнейших работах будет проведено исследование модели смешанной олигополии в рамках качественного анализа соотношений между спросом и предложением (аналогичного тому, что реализован В.А. Булавским [24] для классической олигополии).

Интерес представляет следующий методологический вопрос: может ли смешанная олигополия трактоваться как пример из теории игр с элементом сотрудничества? С формальной точки зрения смешанная олигополия ближе к кооперативной, чем к антагонистической игре, так как интересы публичной компании и частных фирм «не являются ни совершенно противоположными, ни полностью совпадающими» [28]. На первый взгляд, сотрудничество между агентами может рассматриваться как разумное поведение в кооперативной игре. Однако, по словам Zagal et al. [29], «так как в игре, составляющей основу рассматриваемой модели, все-таки должен быть лишь один победитель, то кооперативная игра должна поощрять антагонистическое поведение игроков... Но конкурентное поведение в сценарии игры не совместимо с понятием игры с сотрудничеством».

Литература

1. W. Merrill and N. Schneider. Government firms in oligopoly industries: A short-run analysis // Quarterly J. Econ. 1966. Vol. 80, no. 3. Pp. 400–412.
2. R. J. Ruffin. Cournot oligopoly and competitive behavior // Rev. Econ. Studies. 1971. Vol. 38, no. 3. Pp. 493–502.
3. R. G. Harris and E. G. Wiens. Government enterprise: An instrument for the internal regulation of industry // *Canadian J. Econ*. 1980. Vol. 13, no.1. Pp. 125–132.
4. D. Bös. *Public Enterprise Economics*. Amsterdam: North Holland, 1986.
5. D. Bös. *Privatization: A Theoretical Treatment*. Oxford: Clarendon Press, 1991.
6. J. Vickers and G. Yarrow. *Privatisation – An Economic Analysis*, Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
7. G. De Fraja and F. Delbono. Game theoretic models of mixed oligopoly // *J. Econ. Surveys.* 1990. Vol. 4, no. 1. Pp. 1–17.

8. L. Nett. Mixed oligopoly with homogeneous goods // Ann. Public Coop. Econ. 1993. Vol. 64, no. 3. Pp. 376–393.
9. N. Matsushima and T. Matsumura. Mixed oligopoly and spatial agglomeration // *Canadian J. Econ*. 2003. Vol. 36, no.1. Pp. 62–87.
10. C. Fershtman. The interdependence between ownership status and market structure: The case of privatization // *Economica.* 1990. Vol. 57, no. 3. Pp. 319–328.
11. T. Matsumura and O. Kanda. Mixed oligopoly at free entry markets // *J. Econ*. 2005. Vol. 84, no. 1. Pp. 27–48.
12. T. Matsumura. Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor // *Bull. Econ. Res.* 2003. Vol. 55, no. 2. Pp. 275–287.
13. R. C. Cornes and M. Sepahvand. Cournot vs Stackelberg equilibria with a public enterprise and international competition // Discussion Paper No. 03/12. University of Nottingham, School of Economics, United Kingdom, 2003.
14. C. Figuières, A. Jean-Marie, N. Quérou, and M. Tidball. *Theory of Conjectural Variations*. New Jersey / London / Singapore / Shanghai / Hong Kong / Taipei / Bangalore: World Scientific, 2004.
15. A. L. Bowley *The Mathematical Groundwork of Economics.* Oxford: Oxford University Press, 1924.
16. R. Frisch. Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy // *Int. Econ. Papers.* 1951. Vol. 1, no. 1. Pp. 23–36 [Monopole, polypole – La notion de force en économie // *Nationaløkonomisk Tidsskrift.* 1933. Vol. 71, no. 2. Pp. 241–259].
17. В.А. Булавский, В.В. Калашников. Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия // *Экономика и математические методы.* 1994. Т. 30. №2. С. 129–138.
18. В.А. Булавский, В.В. Калашников. Равновесие в обобщенных моделях Курно и Штакельберга // *Экономика и математические методы.* 1995.Т. 31. №3. С. 164–176.
19. G. Isac, V. A. Bulavsky, and V. V. Kalashnikov. *Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
20. V. V. Kalashnikov, C. Kemfert, and V. V. Kalashnikov-Jr. Conjectural variations equilibrium in a mixed duopoly // *European J. Oper. Res.* 2009. Vol. 192, issue 3, pp. 717–729, Feb.
21. V. V. Kalashnikov, E. Cordero, and V. V. Kalashnikov-Jr. Cournot and Stackelberg equilibrium in mixed duopoly models // *Optimization.* 2010. Vol. 59, no. 5. Pp. 689–706, July.
22. N. Giocoli. The escape from conjectural variations: the consistency condition in duopoly theory from Bowley to Fellner // *Cambridge J. Econ.* 2005. Vol. 29, no. 6. Pp. 601–618.

23. T. Lindh. The inconsistency of consistent conjectures. Coming back to Cournot // *J. Econ. Behaviour Optim*. 1992. Vol. 18, no. 1. Pp. 69–90.
24. В.А. Булавский, “Структура спроса и равновесие в модели олигополии,” *Экономика и Математические Методы*, т. 33, №3, с. 112–134, 1997.
25. Y. F. Liu, Y. X. Ni, F. F. Wu, and B. Cai. Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets // *Int. J. Electrical Power Energy Sys*. 2007. Vol. 29, no. 4. Pp. 455–461.
26. R. Driskill and S. McCafferty. Dynamic duopoly with output adjustment costs in international markets: Taking the conjecture out of conjectural variations, in *Trade Policies for International Competitiveness*, R. E. Feenstra Ed. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1989, pp. 125–144.
27. В.А. Булавский. Один мысленный эксперимент в рамках обобщенной модели Курно // *Экономика и Математические Методы.*1996. Т. 32. №3. С. 128–137.
28. J. Nash. “Two-person cooperative games,” in *The Essential John Nash*, H. W. Kuhn and S. Nasar Eds. Prinston, NJ: Prinston University Press, 2002, pp. 99–114.
29. J. P. Zagal, J. Rick, and I. His. Collaborative games: Lessons learned from board games // *Simulation & Gaming.* 2006. Vol. 37, no. 1. Pp. 24–40.
30. V.V. Kalashnikov, V.A. Bulavsky, N.I. Kalashnykova, and F.J. Castillo Pérez. Mixed oligopoly with consistent conjectures // *European J. Oper. Res.* 2011. Vol. 210, issue 3, pp. 729 – 735.
31. V.V. Kalashnikov, V.A. Bulavsky and N.I. Kalashnykova. How to compute consistent conjectures in a mixed oligopoly. – In: R.C. Clute (ed.), *Proceedings of the 10^{th} Annual International Economics & Business Research Conference* (2010 IBER&TLC), Las Vegas, NV, October 11 – 13, 2010, 11 p.; ISSN 1539 – 8757.

Б.А. Ефимов

О периодических решениях динамических систем, связанных с равновесием по Нэшу бескоалиционных игр

В статье, следуя идеям Смейла [4] и Грота [5], рассматривается связь между динамическими системами и играми двух лиц. Доказано существование локально устойчивого равновесия по Нэшу при наличии периодического решения в таких динамических системах, связанных с играми. При этом роль трения играет “отвращение к риску” игроков, а колебание маятника соответствует колебанию социальной среды. В заключение, рассматривается игра между врачом и пациентом. Предлагается идея измерения когнитивного диссонанса в этой игре с помощью равновесия по Нэшу.

1. Параметрическое равновесие по Нэшу в играх

Обозначим через $(I_d)^n=[-d\leq E\leq d]^n$ – n-мерный куб со стороной $2d > 0$, центр которого совпадает с началом координат фазового пространства $\{E_i, i=1,\ldots,n\}$. Напомним, что для игры $G_n=\{(I_d)^n, U_1,\ldots,U_n\}$, заданной в нормальной форме [2, 3], ситуация $E^*=(E_1^*,\ldots,E_n^*)$ из $(I_d)^n$ называется *равновесием по Нэшу* игры G_n, если для любого индивида i и любой стратегии E_i из I_d имеем

$$U_i(E_i, E_{-i}^*) \leq U_i(E_i^*, E_{-i}^*), i=1,\ldots,n. \quad (1)$$

Через $(I_{-i})^n=\Pi_{j\neq i}(I_d)_j$ обозначается произведение n–1 отрезков I_d (всех кроме i-го). Таким образом, $E_i \subset (I_{-i})^n$. Иначе говоря, E_i^* – наилучший ответ на ситуацию E_{-i}^* для каждого игрока i. Равновесие по Нэшу – это такой набор стратегий, для которого каждому участнику игры не выгодно отклоняться от стратегии E_i, если остальные игроки придерживаются стратегий E_{-i}^*.

Возможно, что каждая функция полезности i-го участника $U_i(q, E_1,\ldots, E_n)$ зависит от набора параметров $q=(q_1,\ldots q_k,\ldots,q_m)$, принадлежащего компактному выпуклому множеству Q, лежащему в положительном октанте m-мерного евклидова пространства, если m – число параметров Предполагается, что у каждого участника i есть еще одна функция полезности $V_i(q)$, определённая на Q, непрерывная и вогнутая. Сначала каждый участник находит самый полезный для него набор параметров q_i^* из

Argmax $V_i(q)$. Далее, участник при фиксированном q_i* подставляет этот набор параметров в свою функцию полезности $U_i(q_i*, E_1,...,E_n)$ и находит равновесие по Нэшу, которое назовём *(двух этапным) параметрическим равновесием по Нэшу.* Из теоремы Нэша следует, что такое равновесие существует, если для всех E_i из I_d функция $U_i(q_i*,E_i,E_{-i})$ непрерывна и вогнута по E_i на $(I_d)_i$, $i = 1,\ldots,n$ при фиксированных остальных переменных E_{-i}. Если функция $U_i(q_i*,E)$ вогнута по E_i, дифференцируема по E_i и решение E^* является внутренней точкой куба $(I_d)^n$, то, как известно, поиск равновесия по Нэшу эквивалентен локальной задаче

$$dU_i(E^*)/dE_i = 0,\ i=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Разумеется, можно определить функцию полезности каждого участника сразу на произведении $Q^n \subset (I_d)^n$ и искать равновесие из этого произведения. Однако, такое *параметрическое равновесие по Нэшу* может, вообще говоря, отличаться от двух этапного параметрического равновесия, рассмотренного выше.

Скажем, что равновесие по Нэшу E* *локально устойчиво,* если для любого ε-возмущения $E_\varepsilon*$ этого равновесия существует окрестность $O_\varepsilon(E^*)$ такая, что фазовая траектория, проходящая через $E_\varepsilon*$, лежит в $O_\varepsilon(E^*)$.

2. Гармонический осциллятор и игры двух лиц

Рассмотрим простейшую автономную колебательную систему, которая описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$d^2E/dt^2 + \omega^2 E = 0, \tag{3}$$

называемая в физике *гармоническим осциллятором* (см. [1], с. 35).

Вводя вспомогательное переменное $H = dE/dt$, перейдём к нормальной системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентной (3)

$$dE/dt= H,\ dH/dt = -(\omega)^2E. \tag{4}$$

Общее решение этой системы представляется в виде

$$E(t)= A\sin(\omega t + \alpha),\ H(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha) \tag{5}$$

и является периодическим решением динамической системы (4). Напомним, что функция $E(t)$ называется *периодической*, если существует такое число β, для которого равенство $E(t + \beta) = E(t)$ выполняется при любых значениях аргумента t. Исключая $sin(\omega t + \alpha)$ и $cos(\omega t + \alpha)$ из (5), получим уравнения траекторий в фазовом пространстве (E, H)

$$E^2/A^2 + H^2/(\omega A)^2 = , \qquad (6)$$

т.е. семейство эллипсов с полуосями A и (ωA), в котором амплитуду A и частоту ω можно считать параметрами.

Далее рассмотрим игру двух лиц на квадрате $I_I^2 = [-1 \le E \le 1]^2$. Первого участника и его функцию полезности будем обозначать соответственно E и U_E. Второго участника и его функцию полезности обозначим через H и, соответственно, U_H. Положим

$$U_E(E,H) = EH,\ U_H(E,H) = -(\omega A)^2 EH. \qquad (7)$$

Так как $U_E + U_H \neq 0$ (*если* $\omega A \neq 1$), то рассмотренная игра не является игрой с нулевой суммой. Обозначим её через $G_0 = \{(I_I)^2, U_E, U_H\}$. Однако, так как порядковые свойства функции полезности не меняются от умножения её на положительный множитель, равновесие в игре G_0 совпадает с равновесием в игре $G_1 = \{I_I^2, \grave{U}_E, U_H\}$, если $\grave{U}_E = (\omega A)^2 EH$. Игра G_1 уже с нулевой суммой, так как $U_E + U_H = 0$, и она эквивалентна игре G_0.

Предложение 1. Для игр G_0 и G_1 начало фазовых координат является единственным локально устойчивым параметрическим равновесием по Нэшу.

Схема доказательства. Так как функция полезности $U_E(E,H) = EH$ не зависит от параметров, то вводить функцию $V_E(q)$ не надо. Без ограничения общности фиксируем $\omega > 1$ и положим $Q = \{A\colon \varepsilon_0 \le \omega A \le \varepsilon\}$ – пространство параметров. Функцию полезности второго участника на Q определим как $V_H(A) = (\omega A)^2$. Эта функция достигает максимума в крайней правой точке отрезка Q. Таким образом, наилучший параметр $A = \varepsilon/\omega$, $A < \varepsilon$, так как $\omega > 1$. Отсюда эллипс (6) лежит внутри диска радиуса ε с центром в начале координат. Можно показать, что свойством: *«для любого* $\varepsilon > 0$ *эллипс (6) лежит внутри диска радиуса* ε *с центром в этой точке»* обладает только начало координат, т.е. состояние (0,0) локально устойчиво. Докажем, что состояние (0,0) является параметрическим равновесием по Нэшу. Подставим в (2) функции (5), получим $E^*=H^*=0$. Далее, при фиксированном $H^*= 0$ и любом возмущении ε стратегии $E^*= 0$ выигрыш игрока E нулевой, т.е. у E нет улучшения. Аналогично, при фиксированном $E^*=0$ и любом возмущении ε стратегии $H^*=0$ выигрыш игрока снова нулевой, т.е. опять нет улучшения. Таким образом, начало (0,0) действительно есть равновесие по Нэшу.

3. Некоторые аспекты теории риска для функций полезности многих переменных, представляющих предпочтения индивидов

В 1965 г. К. Эрроу [8] ввёл понятие меры $R(U(E))$ риска индивида, имеющего свою функцию полезности $U(E)$ одного переменного. В основе ее построения лежат несколько гипотез, в том числе гипотеза *ожидаемой полезности*: $U(E_0) > (1/2)U(E_0 - h) + (1/2)U(E_0 + h)$ для всех E_0 *и* $h > 0$, и гипотеза *инвариантности меры риска относительно положительного мультипликатора* β: $R(\beta U(E)) = R(U(E))$ для любого положительного β. Однако, найденная им мера $R(U(E)) = -(U''(E)/U'(E))$ не линейна и не удовлетворяет важной гипотезе: *инвариантности меры относительно монотонного преобразования функции полезности* $R(U(E)) = R(f(U(E)))$ для любой монотонно возрастающей функции f. В ([8], стр. 32) К. Эрроу предложил использовать в качестве меры риска вторую производную функции полезности индивида со знаком «минус»:

$$R(U(E)) = -U''(E).$$

Эту меру он предложил называть *«отвращением к риску»*. Из гипотезы ожидаемой полезности следует, что $U'(E)$ строго убывает, если E возрастает. Это справедливо для вогнутых функций $U(E)$. Если функция полезности $U_i(E)$ i-го индивида зависит от n переменных $E = (E_1,\ldots,E_n)$, то мерой «отвращение к риску» назовём вторую частную производную $U_i(E)$ по E_i со знаком «минус» $R(U_i(E)) = -\partial^2 U_i(E)/\partial E_i^2$. Наконец, для социальной группы, состоящей из n участников, вектором «*группового отвращения к риску в состоянии E»* назовём вектор

$$R(U) = \{-\partial^2 U_i(E)/\partial E_i^2,\ i = 1,\ldots,n\},\ \text{если}\ U = (U_1,\ldots,U_n).$$

Например, для игры, связанной с гармоническим осциллятором, имеем нулевое групповое отвращение к риску в любом состоянии (E, H). Для игры с квадратичными функциями полезности вида

$$U_1(E, H) = -a_{11}E^2 - a_{12}H^2,\ U_2(E, H) = -a_{21}E^2 - a_{22}H^2$$

получаем групповой вектор отвращения к риску вида $R(U_1,U_2) = \{2a_{11},\ 2a_{22}\}$, снова не зависящий от состояния E.

4. Линейный осциллятор при наличии риска

Рассмотрим классическую модель линейного осциллятора при наличии трения и соответствующую ему игру двух лиц при наличии риска. При этом предположим, что сила отвращения к риску пропорциональна скорости изменения стратегии. В этом случае роль маятника будет играть игра двух лиц, совершающая затухающие колебания вокруг своего равновесия по Нэшу. Уравнение имеет вид

$$d^2E/dt^2 + 2h(dE/dt) + \omega^2 E = 0. \tag{8}$$

Решение этого уравнения, как известно [1] , имеет вид (при условии h << ω)

$$E(t) = e^{-ht} A sin(\omega t + \alpha). \tag{9}$$

Оно не является периодическим, но представляет устойчивый осцилляторный затухающий процесс, сходящийся к началу координат. Далее перейдём к нормальной линейной системе дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы. Положим $dE/dt = H$. Из (8) получаем $dH/dt = -2hH - \omega^2 E$. Таким образом, линейная система уравнений

$$dE/dt = H,\ dH/dt = -2hH - \omega^2 E \tag{10}$$

эквивалентна уравнению (8).

Рассмотрим игру двух лиц $G_2 = \{(I_1)^2, U_E, U_H\}$, определённую на квадрате и имеющую следующие функции полезности участников

$$U_E(E,H) = EH,\ U_H(E,H) = -hH^2 - \omega^2 EH. \tag{11}$$

Заметим, что вектор группового отвращения к риску в этой игре есть $R(G_2) = \{0,\ 2h\}$, т.е. в этой игре рискует только второй игрок. Изменение параметров h и ω при условии h << ω не оказывают никакого влияния на стационарное состояние (0, 0) этой системы.

Предложение 2. Для игры G_2 начало фазовых координат является единственным локально устойчивым параметрическим равновесием по Нэшу.

Схема доказательства. Так как необходимое условие (2) для функций (9) даёт $E^*=0$, $H^*=0$, то проверяем достаточное условие. Для участника E проводим те же рассуждения, что и рассмотренные в Предложении 1. Для участника H, если E фиксировано и равно нулю, то $U_H(0,H) = -hH^2$ является параболой с ветвями, направленными вниз, и с максимумом в нуле. Поэтому при любом отходе от нулевой стратегии его состояние ухудшится. Устойчивость равновесия следует из вида фазовых кривых, которые являются спиралями и при $t \to \infty$ стремятся к (0,0).

5. Игры участников с квадратичными функциями полезности

Рассмотрим игру двух лиц на квадрате $I_d^2 = [-d \le E \le d]^2$ с квадратичными функциями полезности вида

$$U_1(E_1,E_2)=(a_{11}/2)(E_1)^2+a_{12}E_1E_2+b_1E_1,\ U_2(E_1,E_2)=(a_{21}/2)(E_2)^2+a_{22}E_1E_2+b_2E_2. \quad (12)$$

Предполагаемое равновесие по Нэшу находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$\partial U_1/\partial E_1=a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + b_1=0,\ \partial U/\partial E_2=a_{21}E_2 + a_{22}E_1 + b_2=0. \quad (13)$$

Для того чтобы решение этой системы $E^* = (E_1^*, E_2^*)$ было равновесием по Нэшу, необходимо наложить условия на коэффициенты a_{ij} функций (12) и длину $2d$ отрезка. Мы не будем сейчас останавливаться на этом, а предположим, что E^* – равновесие по Нэшу и рассмотрим динамическую систему, соответствующую E^*:

$$dE_1/dt = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + b_1,\ dE_2/dt = a_{21}E_2 + a_{22}E_1 + b_2. \quad (14)$$

Эта система в каждый момент времени t определяет в данной точке фазового пространства (E_1, E_2) компоненты скорости движущейся точки. Так как эти компоненты не зависят от времени, то говорят, что система (14) *определяет стационарное движение среды.* Система (14) является линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющей постоянное частное решение $E_1 = E_1^*$, $E_2 = E_2^*$.

Общим решением системы (14) будет

$$E_i(t) = E_i^* + C_{1i}\, exp(\lambda_1 t) + C_{2i}\, exp(\lambda_2 t),\ i = 1, 2. \quad (15)$$

При этом λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $(a_{11} - \lambda)(a_{21} - \lambda) - a_{22}a_{12} = 0$. Если вещественная часть λ_1 и λ_2 строго отрицательна, то $E_i(t) \to E_i^*$ при $t\to\infty$, где i=1,2. Таким образом, система (15) асимптотически эквивалентна равновесию по Нэшу.

6. Периодическая нагрузка при наличии риска в социальной среде

Рассмотрим уравнение колебаний маятника при наличии сопротивления и периодической нагрузки

$$d^2E/dt^2 + 2h(dE/dt) + (\omega_0)^2E = p\ sin\omega t. \quad (16)$$

Роль маятника в этой работе играет установка индивида, а сопротивления – “отвращение к риску” для специальных функций полезности участников. (Здесь ω_0 внутренняя частота системы, а ω частота нагрузки).

Общее решение этого уравнения есть (см. [1]):

$$E(t) = p[((\omega_0)^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]^{-1/2}\sin(\omega t + \alpha) + e^{-ht} B_1 \sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad (17)$$

Вторая часть формулы (17) является затухающим периодическим колебанием, поэтому при $t \to \infty$ формула (17) приближается к первой части, но (17) не эквивалентна (18), так как (18) не всюду определена на двумерном фазовом пространстве. Фактически (18) описывает цикл или периодическое решение (16). В то время как (17) проходит через каждую точку фазового пространства.

$$E(t) = p[((\omega_0)^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]^{-1/2} sin(\omega t + \alpha). \qquad (18)$$

Обозначим амплитуду и фазу периодической функции (18) как

$$A = p[((\omega_0)^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]^{-1/2}, \ \alpha = arctg\ [(2h)/((\omega_0)^2 - \omega^2)]. \qquad (19)$$

Продифференцируем (18) по t. Получим $H(t) = dE/dt = \omega p[((\omega_0)^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2]^{-1/2} cos(\omega t + \alpha)$. Соединяя это уравнение с уравнением (18) с учётом введённых обозначений, получим динамическую систему

$$E(t) = A sin(\omega t + \alpha),\ H(t) = \omega A cos(\omega t + \alpha). \qquad (20)$$

Освободившись от t , получим фазовую траекторию системы – эллипс с полуосями A и (ωA)

$$E^2/A^2 + H^2/\omega^2 A^2 = 1. \qquad (21)$$

Этот эллипс похож на эллипс (4), хотя в (4) частота – внутренняя, а в (21) – внешняя. Однако, в (4) амплитуда A является параметром, а в (21) A не является параметром. Все параметры, от которых зависит амплитуда A, фиксированы. Поэтому (21) задаёт единственную кривую в фазовом пространстве, которая является *циклом*. Дифференцируя решение (17) по t, получим

$$H(t) = dE(t)/dt = A\omega cos(\omega t + \alpha) - he^{-ht}B_2 sin(\omega t + \alpha) + e^{-ht}B_2\omega cos(\omega t + \alpha). \qquad (22)$$

Система уравнений (17) и (22) позволяет для любой точки E^*, лежащей строго внутри эллипса, определить постоянные B_1, B_2 и α такие, что интегральная кривая системы (17) и (22) проходит через E^* при $t = 0$. При некоторых соотношениях между параметрами показано, что через каждую

точку, лежащую внутри эллипса, проходит единственная фазовая кривая (22) и (17). Эта кривая подобно *спирали* «навивается» на эллипс (21) изнутри.
Если $\omega \to \omega_0$, то $A \to \infty$. Возникает так называемый *резонанс.* Переходим к нормальной системе двух линейных дифференциальных уравнений с двумя переменными, полученной из уравнения (16), предполагая, что нагрузка постоянна и имеет вид $p\sin\omega t$ для некоторого фиксированного момента времени t_0. Получим

$$dE/dt = H,\ dH/dt = -2hH - (\omega_0)^2E + p\sin\omega t_0. \tag{24}$$

Определяем функции полезности назначаемых участников

$$U_E(E,H) = EH,\ U_H(E,H) = -hH^2 - (\omega_0)^2EH + (p\sin\omega t_0)H. \tag{25}$$

Система линейных уравнений для определения равновесия по Нэшу будет

$$H = 0,\ -2hH - (\omega_0)^2E + p\sin\omega t_0 = 0.$$

Отсюда равновесие есть

$$E^* = (p\sin\omega t_0)/(\omega_0)^2,\ H^* = 0. \tag{26}$$

Проверим, что если $p \le (\omega_0)^2A$, то точка E^* лежит внутри эллипса (21). Напомним, что точка (x_0,y_0) лежит внутри эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, если

$$(x_0)^2/a^2 + (y_0)^2/b^2 \le 1.$$

Для точки E^* имеем $(p/(\omega_0)^2)^2/A^2 + 0/\ \omega^2A^2 \le 1.$ Следовательно, $p/(\omega_0)^2 \le A$, что соответствует предположению. Так как E^* лежит внутри эллипса (21), воспользуемся уравнениями (22) и (17) чтобы найти такие постоянные c_1 и c_2, для которых точка E^* лежит на фазовой кривой (22), (17) в момент $t=0$. Выберем α так, чтобы $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$. Тогда для B_1 и B_2 получим систему

$$(p\sin\omega t_0)/(\omega_0)^2 = A\sin\alpha + B_1\sin\alpha,\ 0 = A\omega\cos\alpha - hB_2\sin\alpha + B_2\sin\alpha. \tag{27}$$

Находим: $B_1 = [(p\sin\omega t_0)/(\omega_0)^2 - A\sin\alpha]/\sin\alpha,\ B_2 = A\omega/[h(\mathrm{tg}\alpha) - \omega_0]$.

Таким образом, система (17), (22) при t = 0 и найденных постоянных B_1, B_2 и α стартует с точки (E^*, H^*).

Предложение 3. Если $d > \max\{A, \omega A\}$, то равновесие E^* (26) является единственным равновесием по Нэшу в игре G_2 с постоянной нагрузкой $p\sin t_0$. В игре G_2 с непостоянной (периодической) нагрузкой равновесие $E^*(t)$ исчезает, «*превращаясь*» в устойчивый цикл. Однако при каждом фиксированном моменте времени t_0 оно существует, локально устойчиво и определяется системой дифференциальных уравнений

$$dE/d\tau = H,\ dH/d\tau = -2hH - (\omega_0)^2 E + psin\omega t_0\ , \qquad (27')$$

где τ – быстрое время формирования равновесия по Нэшу, если внешняя сила практически постоянна, а t – медленное время. Например, τ измеряется минутами, а t – годами.

Схема доказательства. Так как E^* – единственная внутренняя точка квадрата $(I_d)^2$, удовлетворяющая необходимому условию экстремума, то проверим достаточность. Проверку пограничных точек квадрата на достаточность мы опускаем. Рассмотрим функции полезности (25) участников. Если $H = 0$, то участнику E не выгодно менять свою стратегию $psin\omega t_0/(\omega_0)^2$, так как при любой стратегии E имеем $U_E(E,0) = 0$ – нулевая прибыль. Если $E_1^* = psin\omega t_0/(\omega_0)^2$ фиксировано, то участнику H не выгодно менять свою нулевую стратегию. Это следует из того, что при фиксированном E_1^* функция полезности участника H имеет вид $U_H(E_1^*,H)= -hH^2$, т.е. параболы «ветвями вниз» с максимумом в нуле.

Мы показали, что при условии $psint_0 \le (\omega_0)^2 A$ равновесие E^* лежит внутри эллипса (цикла) (21). Были подобраны положительные постоянные B_1 и B_2 (см. (27)) такие, что фазовая кривая (22), (17) проходит через точку E^* при t = 0. Так как при t→∞ функции (17) и (22) приближаются к циклу (21), точка E*(t) также приближается к циклу изнутри, и равновесие исчезает. Остаётся потребовать условие: $d > max\{A, \omega A\}$, при котором цикл (21) лежит в квадрате $(I_d)^2$.

7. **Взаимодействие двух фирм, имеющих бизнес-циклы**

Т. Пу в [14] рассмотрел модель фирмы, имеющей бизнес-цикл. Она описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$dI/dt = a(F(dY/dt) - I),\ dY/dt = b((I + G)/s - Y).$$

При этом $Y(t)$ – национальный доход, $I(t)$ – инвестиции, G – правительственные расходы (предполагаются постоянными), s – предельная скорость сбережений, a > 0 и b > 0 постоянные. М. Лааксонен [6] доказал, что эту модель можно описать одним нелинейным дифференциальным уравнением

$$d^2E/dt^2 - f(dE/dt) + E = 0, \qquad (28)$$

с помощью гладкой функцией f, удовлетворяющей некоторым условиям, например, f(0) = 0. В частности, она должна быть “похожа” на функцию $y = ax(x^2 - b)$ в координатах (x,y). Для описания деятельности второй фирмы рассмотрим ещё одну функцию $y_2 = a\, x(x^4 - b)$, удовлетворяющую условиям из [7]. Подставим в (28) вместо f эти конкретные функции. Тогда, как показано в [6], каждое из следующих уравнений имеет цикл. Заметим, что длина каждого предельного цикла $L_i(a,b)$, i = 1, 2, стремится к нулю, если a, b $\to 0$

$$d^2E_1/dt^2 - a(dE_1/dt)^3 + b(dE_1/dt) + E_1 = 0,$$

$$d^2E_2/dt^2 - a(dE_2/dt)^5 + b(dE_2/dt) + E_2 = 0. \qquad (29)$$

Положим $H_1 = dE_1/dt$, $H_2 = dE_2/dt$. Тогда каждое из уравнений (29) эквивалентно паре уравнений

$$H_1 = dE_1/dt,\ dH_1/dt = a(H_1)^3 - bH_1 - E_1\,,$$
$$H_2 = dE_2/dt,\ dH_2/dt = a(H_2)^5 - bH_2 - E_2\,, \qquad (30)$$

а все вместе описывают динамическую систему в 4-мерном фазовом пространстве (E_1, H_1, E_2, H_2), содержащую цикл (тор), который является прямым произведением двумерных циклов (окружностей).

Перейдём к играм. Рассмотрим игру G_3, состоящую из четырёх участников (*E1, H1, E2, H2*), имеющих следующие функции полезности

$$U_{E1} = E_1H_1,\ U_{H1} = a(1/4)(H_1)^4 - b(1/2)(H_1)^2 - E_1H_1,\ U_{E2} = E_2H_2,$$
$$U_{H2} = a(1/6)(H_2)^6 - b(1/2)(H_2)^2 - E_2H_2. \qquad (31)$$

Предложение 4. Начало координат 4-мерного фазового пространства (E_1, H_1, E_2, H_2) является параметрическим равновесием по Нэшу игры G_3.

Схема доказательства. Заметим, что частные производные функций полезности (31) по соответствующим переменным совпадают с соответствующими правыми частями уравнений (30). Поэтому следующая система уравнений даёт необходимое условие экстремума для внутренних точек

$$dE_1/dt = H_1 = 0,\ dH_1/dt = a(H_1)^3 - bH_1 - E_1 = 0\,,$$

$$dE_2/dt = H_2 = 0,\ dH_2/dt = a(H_2)^5 - bH_2 - E_2 = 0. \qquad (32)$$

Одним из решений этой системы является начало координат $H_1 = 0$, $E_1 = 0$, $H_2 = 0$, $E_2 = 0$. Если участник *E1* или *E2* придерживается нулевой стратегии, то при любых стратегиях остальных участников у него будет нулевой доход, поэтому ему не выгодно эту стратегию менять. Итак, $E_1 = E_2 = 0$. Тогда функции полезности участников $H1$ и $H2$ равны, соответственно, (см. (31))

$$U_{H1} = (H_1)^2[a(H_1)^2 - 2b]\,,\; U_{H2} = (H_2)^2[a(H_2)^4 - 3b].$$

Отсюда, если $(H_1)^2 < 2b/a$ и $(H_2)^4 < 3b/a$, то $U_{H1} < 0$ и $U_{H2} < 0$. Таким образом, участникам $H1$ и $H2$ невыгодно отклоняться от нулевой стратегии (для $H1$ менее, чем на $(2b/a)^{1/2}$, а для $H2$ менее, чем на $(3b/a)^{1/4}$). Пусть $a \to 0$, $b \to 0$ *и* $(b/a) \to 0$. Тогда длины предельных циклов стремятся к нулю и, следовательно, они попадут в любую заданную ε-окрестность нуля. Построение множества параметров Q и функций полезности участников $V_{H1}(q)$ *и* $V_{H2}(q)$ опускается.

8. Присоединение теории когнитивного диссонанса к играм

Теория когнитивного диссонанса (несоответствия) была предложена Л. Фестингером [12] в 1957 г. Он формулирует две основные гипотезы своей теории.

1. В случае возникновения диссонанса индивид будет всеми силами стремиться снизить степень несоответствия между двумя своими установками, пытаясь достичь соответствия. Это происходит вследствие того, что диссонанс рождает «психологический дискомфорт».

2. Вторая гипотеза говорит о том, что, стремясь снизить возникший дискомфорт, индивид будет стараться обходить стороной такие ситуации, в которых он может усилиться.

Как пишет Л. Фестингер [12], диссонанс может появиться по различным причинам. Например, а) из-за логического несоответствия, б) «по причине культурных обычаев», с) в том случае, когда индивидуальное мнение не совпадает с мнением большинства, д) из-за несоответствия прошлого опыта настоящей ситуации.

Моделирование возникновения диссонанса по одной из перечисленных выше причин и его влияния на дальнейшее поведение индивида требует построения и исследования специальных игровых моделей.

Поясним сказанное на конкретном примере Л. Фестингера [12] модифицированном в этой работе. Попытаемся смоделировать взаимоотношения между курильщиком (К), который много курит, и врачом (В), который пытается его вылечить или уменьшить влияние этого порока. Врач периодически измеряет концентрацию никотина в крови и другие показатели, проводит медикаментозное лечение, активно применяет метод гипноза. В соответствии с комплексным лечением (К) может делать следующее:

1. Бросить курить, потому что убедится, что это вредно для здоровья.

2. Он будет отрицать, что курение наносит вред его здоровью, пытаясь убедить (В) о пользе курения для него (снижает вес, снимает стресс, и т.п.). Тем самым (К) оправдывает своё поведение и продолжает курить.

3. (К) будет избегать всякой информации о вреде курения и прекратит лечение.

Мы моделируем второй тип поведения (К).

Обозначим через $E_K(t)$ – установку курильщика (К) «некоторая польза курения в момент t», а через $E_B(t)$ – установку врача на «желательное состояние курильщика в момент t». Обе установки измеряются вещественными числами. Заметим, что установка E_K не означает отказ (К) от лечения, а просто измеряет степень или меру этого отказа. Обе установки измеряются одними и теми же единицами, например, желательным уровнем никотина в крови с точки зрения (К) или (В) в момент t. Как обычно, через dE_K/dt и dE_B/dt обозначаются скорости изменения этих установок.

Предполагается, что у каждого индивида существует норма, связанная с соответствующей установкой и не зависящая от времени. Например, у (К) нормой является допустимый уровень никотина в крови или допустимое количество сигарет, выкуриваемых в день. У врача – желательный уровень никотина в крови курильщика. Обозначим через e_{HK} норму установки E_K, а через e_{HB} норму установки E_B. Нормы участников не зависят от времени. Отклонение поведения индивида от нормы своей установки вызывает у него социально-этический дискомфорт, так как эти нормы, как правило, связаны с социальными и этическими правилами поведения индивида в обществе. При этом, чем больше текущая установка отклоняется от своей нормы, тем сильнее дискомфорт у индивида. Другим источником диссонанса является мнение (В) для (К) или мнение (К) для (В), точнее, отклонение средней текущих установок от текущей установки для каждого участника. Таким образом, врач и курильщик склонны к подражанию. Третьим источником диссонанса является внешнее влияние на врача и на курильщика. Суммарный дискомфорт влияет на скорость изменения установок и является источником *когнитивного диссонанса* (КД). Как его измерять?

Составим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые описывают закон изменения этих установок в результате взаимодействия (К) и (В).

$$dE_k/dt = a_K(e_{HK} - E_K) + a_{ПK}[(E_K + E_B)/2 - E_K] + a_{BHK}(e_{BHK} - E_K),$$

$$dE_B/dt = a_B(e_{HB} - E_B) + a_{ПB}[(E_K + E_B)/2 - E_B] + a_{BHB}(e_{BHB} - E_B). \qquad (33)$$

Здесь постоянные параметры $a_К$ или $a_В$ отражают склонность (К) или (В) к собственным нормам $e_{НК}$ или $e_{НВ}$ (склонность к эгоизму). Параметры $a_{ПК}$ или $a_{ПВ}$ интерпретируются, как склонность (К) или (В) к подражанию (склонность к коллективизму), соответственно, параметры $a_{ВНК}$ или $a_{ВНВ}$ – склонность (К) или (В) к внешнему влиянию, а нормы $e_{ВНК}$ или $e_{ВНВ}$ – навязываемые извне нормы. Модель поведения, описанная системой (33), является частным случаем модели формирования установок индивидов, исследованной Ю.Н. Гаврильцом [10,11]. В частности, из работы [10] вытекает следующий результат.

Предложение 5. Если все параметры системы (33) положительны, а параметры $a_К$, $a_В$, $a_{ПК}$, $a_{ПВ}$ строго положительны, то существует положительное стационарное устойчивое по Ляпунову решение $(E_К)^*$, $(E_В)^*$ (так называемый гомеостаз).

Предложение 6. Модели (33) соответствует бескоалиционная игра G двух лиц (врача и курильщика) на квадрате с квадратичными вогнутыми функциями выигрыша, для которой равновесие по Нэшу совпадает с гомеостатическим состоянием заданной линейной модели (33). Подробнее см. в [9].

В качестве квадратичных функций полезности участников рассматривается интеграл по $E_К$ (из верхнего уравнения (33)) или интеграл по $E_В$ (из нижнего уравнения (33)). Обозначим эти функции полезности (для простоты полагаем $a_{ВНК} = a_{ВНВ} = 0$, $a_{ПК} = a_{ПВ} = a_К = a_В = 1$)

$$U_К(E_К, E_В, e_{НК}) \text{ и } U_В(E_В, E_К, e_{НВ}). \quad (34)$$

Квадратичные функции (34) являются параболами (первая – при фиксированном $E_В$, а вторая – при фиксированном $E_К$). При этом без ограничения общности можно считать, что ветви парабол направлены вверх, то есть участники социальной группы (врач – курильщик) минимизируют свои функции полезности для достижения гомеостаза группы.

Мера (КД) индивида (К) в состоянии $E = (E_К, E_В)$ есть $U_К(E_К, E_В, e_{НК})$. Аналогично, мера (КД) индивида (В) в том же состоянии E есть $U_В(E_В, E_К, e_{НВ})$. Далее принимаем за функции выигрыша участников (К) и (В) в игре между (К) и (В) те же самые функции (34), но со знаком минус. Эти функции непрерывны и вогнуты, поэтому игра

$$G_{КВ} = \{ I^2, -U_К(E_К,E_В, e_{НК}), -U_В(E_В, E_К, e_{НВ})\} \quad (35)$$

имеет равновесие по Нэшу. Заметим, что чем больше величина меры (КД) участника, тем дальше он отходит от своей нормы и, следовательно, его (КД) усиливается. Таким образом, *парадигма поведения* врача и его пациента состоит в следующем: *каждый из участников игры* G_{KD} *стремится минимизировать свою меру когнитивного диссонанса при условии, что его партнёр не меняет своей стратегии*. Обратим внимание, что минимизация (КД) норм означает максимизацию соответствующих функций выигрыша. Заметим, что равновесие $E^* = (E_K^*, E_B^*)$ в этой игре, как правило, не совпадает с нормами E_{HK} и E_{HB}. Поэтому можно считать, что равновесие E^* определяет компромиссные нормы участников.

Автор благодарит В.З. Беленького за внимание к этой работе.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Физматгиз, Москва, 1959.
2. Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А., Поманский А.Б., Шапиро А.Д. Итеративные методы в теории игр и программировании, «Наука», Москва, 1974.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики, «Мир», М., 1985 .
4. Смейл С. Глобальный анализ и экономика: оптимум Парето и обобщение теории Морса // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. № 3(165). С. 177–187.
5. Grote J. A Global Theory of Game: The 2-person games // Journal of Mathematical Economics. 1974. V.1. P. 223–235.
6. Laaksonen M. Oscillation in Some Nonlinear Economic Relationships. Chaos // Solution & Fractals. 1996. V. 7. No.12. P. 2235–2245.
7. Arrow Kenneth J. Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Helsinki, Finland, 1965.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
9. Ефимов Б.А. Формирование установок индивидов и равновесие по Нэшу бескоалиционных игр: стохастический подход // Анализ и моделирование экономических процессов. Вып. 9 / Под ред. В.З. Беленького. М.: ЦЭМИ РАН, 2012.

10. Гаврилец Ю. Н., Ефимов Б.А. Изменение предпочтений индивидов в социальной среде // Экономика и математические методы. 1997. Т. 33. №2. С.76–93.
11. Гаврилец Ю.Н., Ефимов Б.А. Теоретико-игровая модель формирования установок в референтной группе // Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. №1. С.116–126.
12. Фестингер Л. Теория когнитивного диссонанса. СПб.: Ювента, 1999.
13. Rabin M. C. Cognitive dissonance and social change // Journal of Economic Behavior and Organization. 1994. Vol. 23. P. 177–194.
14. Puu T. Nonlinear Economic Dynamics. // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1989. No. 336.

Т.А.Белкина, Н.Б.Конюхова

Об асимптотических представлениях функции Беллмана и оптимальной стратегии в модели управления процессом риска с диффузионным возмущением [1]

В данной работе продолжаются и обобщаются начатые в [1] исследования асимптотического поведения оптимальной стратегии и функции Беллмана в задаче оптимального управления инвестициями для модели страхования с классическим процессом риска, возмущенным диффузией. Проблема оптимального управления капиталом страховой компании при использовании рисковых активов с целью минимизации вероятности разорения для модели классического процесса риска исследовалась в [2]–[8] (при наличии или отсутствии различных ограничений). Процесс риска, или случайный процесс, моделирующий изменение капитала страховой компании, рассматриваемый в [1], включает в себя, помимо обычных для классического процесса детерминированной составляющей (процесса поступления премий) и сложного пуассоновского процесса (страховых выплат), также и диффузионную составляющую. Модель с таким процессом риска может быть рассмотрена как одна из модификаций классической модели Крамера-Лундберга, в которых процесс поступления премий рассматривается как случайный – в данном случае это винеровский процесс с положительным сносом. Предполагается, что капитал может непрерывно инвестироваться в два вида активов – акции, моделируемые геометрическим броуновским движением, и банковский счет с положительной процентной ставкой.

В модели, рассматриваемой в [1], винеровский процесс, отвечающий за диффузионное возмущение процесса риска, и винеровский процесс, участвующий в описании динамики цен акций, предполагались независимыми. В задаче минимизации вероятности разорения с помощью инвестиционных стратегий исследовались асимптотика функции Беллмана при малых значениях начального капитала и структура оптимального

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00784 и № 11-01-00219.

управления в области малых значений текущего капитала. В частности, в [1] показано, что наличие диффузионной составляющей приводит к существенному изменению структуры оптимальной стратегии при малом капитале по сравнению с тем, что имеет место для оптимальной стратегии в классической модели. Точнее, если в классической модели при нулевом капитале количество денежных средств, инвестируемых в рисковый актив, должно быть равно нулю, то в модели с диффузионным возмущением это количество (точнее, его предельное значение при стремлении капитала к нулю) определяется некоторым положительным числом, зависящим от параметров модели. Это опровергает некоторые выводы работы [9], в основе которых лежит неверное представление о том, что при стремлении капитала к нулю инвестиции в рисковый актив должны быть в пределе нулевыми.

В данной работе прежде всего результат [1] обобщается для случая наличия ненулевой корреляции винеровских процессов, входящих в определение исходного процесса риска и процесса, описывающего изменение цены акций. (Здесь, в частности, исправлена ошибка, допущенная в [1] (при нулевой корреляции) во втором члене разложения асимптотического представления оптимальной стратегии при малых значениях капитала; эта ошибка не влияет на основные выводы [1].) Кроме того, в данной работе исследуется асимптотическое представление функции Беллмана и оптимальной стратегии при больших значениях капитала в случае экспоненциального распределения размера страховых выплат. Показывается, в частности, что оптимальное количество средств, вкладываемых в акции, стремится к некоторой положительной константе при стремлении капитала к бесконечности, причем эта константа не зависит от параметров акций и параметра диффузионной составляющей процесса риска. Данный результат об асимптотическом поведении оптимальной стратегии инвестиций при больших значениях капитала остается справедливым также и для классической модели риска.

1. Уравнение динамики капитала и задача оптимизации

Для краткости не будем приводить здесь описание модели исходного процесса риска, которое можно найти в [1], а запишем сразу уравнение для результирующего процесса, полученного после применения некоторой инвестиционной стратегии (см. также [9]). Это уравнение имеет вид:

$$X_t^\pi = x + \int_0^t [c + r(X_s^\pi - a_s) + \mu a_s] ds + \sigma \int_0^t a_s dB_s + \sigma_1 B_t^1 - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad (1)$$

где X_t^π – величина капитала страховой компании в момент времени t, $t \geq 0$, x - величина начального капитала, c - скорость поступления страховых взносов (премий), $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ - пуассоновский процесс с параметром λ, определяющий для каждого t число предъявленных исков за временной промежуток $(0, t]$; $Z_1, Z_2, ...$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с некоторой функцией распределения $F(z)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$), представляющих собой величины последовательных страховых выплат, которые, кроме того, не зависят от процесса $\{N(t)\}$. Кроме того, здесь a_s - количество денежных средств, непрерывно инвестируемых в акции, которые моделируются геометрическим броуновским движением

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t),$$

где S_t - цена акции в момент t, μ - ожидаемая доходность акции, $\sigma > 0$ - волатильность, $\{B_t\}$ - стандартный винеровский процесс. Часть капитала в размере $X_s^\pi - a_s$ инвестируется в банковский счет при процентной ставке $r > 0$ (в том случае, если $X_s^\pi - a_s \geq 0$; в противном случае речь идет о заимствованиях при той же процентной ставке). Будем считать в дальнейшем, что $r < \mu$. Наконец, слагаемое $\sigma_1 B_t^1$ в (1), где $\sigma_1 > 0$, $\{B_t^1\}$ - стандартный винеровский процесс, отвечает за диффузионное возмущение, которое присутствует также в исходной модели риска. При этом предполагается, что процессы $\{B_t\}$ и $\{B_t^1\}$ не зависят от процесса $\{N(t)\}$ и последовательности $\{Z_i\}$, но, в отличие от случая, рассматриваемого в [1], между собой они могут быть зависимыми, точнее, $\mathbf{E}(dB_s dB_s^1) = \rho ds$, где ρ - коэффициент корреляции, такой что $|\rho| \neq 1$.

Предполагается, что все случайные величины определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. На этом пространстве задана также фильтрация $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, порожденная процессами $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $\{B_t\}_{t\geq 0}$ и $\{B_t^1\}_{t\geq 0}$. Символ $\pi := \{a_s\}_{s\geq 0}$ обозначает допустимое управление, или случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, предсказуемый относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$.

Определим теперь момент разорения τ^π для процесса (1),

$$\tau^\pi = \inf\{t \geq 0 : X_t^\pi < 0\},$$

соответствующую вероятность неразорения

$$\delta^\pi(x) = 1 - P(\tau^\pi < \infty), \tag{2}$$

а также функцию

$$\delta(x) = \sup_{\pi \in \Pi} \delta^\pi(x), \tag{3}$$

где Π - множество допустимых управлений. Функция $\delta(x)$ является функцией Беллмана в задаче максимизации вероятности неразорения, и в предположении дважды непрерывной дифференцируемости, она удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \mathcal{L}^{(a)} \delta(x) = 0, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{L}^{(a)}\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2\right)\delta''(x) + \left[c + (\mu - r)a + rx\right]\delta'(x) +$$
$$+\lambda\left[\int_0^x \delta(x - s)dF(s) - \delta(x)\right], \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{5}$$

(см. [9], а также [1] в случае $\rho = 0$). Кроме того, наличие аддитивной диффузионной составляющей приводит к разорению с вероятностью единица при нулевом капитале, поэтому решение (4) должно удовлетворять начальному условию $\delta(0) = 0$.

2. Оптимальная стратегия и ее асимптотическое представление при малых значениях капитала

Предположим, что существует дважды непрерывно дифференцируемое решение V уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$V'(x) > 0, \qquad V''(x) < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$V(0) = 0, \tag{7}$$

$$V'(0+) = 1. \tag{8}$$

Тогда супремум в (4) достигается при

$$a_V(x) := -\frac{(\mu - r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma}, \tag{9}$$

и уравнение (4) приобретает вид

$$(c + rx - \rho(\mu - r)\sigma_1/\sigma)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)V''(x) +$$

$$+\lambda\left[\int_0^x V(x - s)dF(s) - V(x)\right] = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{(V'(x))^2}{V''(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Ясно, что если существует решение этого нелинейного интегродифференциального уравнения (ИДУ), удовлетворяющее условиям (7) и (8), то функция, полученная умножением этого решения на любую положительную константу, также будет решением уравнения (10) (удовлетворяющим условию (7)). При этом вид функции (9) меняться не будет, и она будет определять оптимальную стратегию. Следовательно, значение производной в нуле решения $\delta(x)$, определяющего функцию Беллмана, должно определяться из естественного предельного условия

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 1 \tag{11}$$

как условия нормировки, и $a_\delta(x) = a_V(x)$. Вопрос о существовании указанного решения ИДУ (10) обсуждался в [9]. Сформулируем здесь верификационную лемму.

Лемма. *Пусть функция V, определенная на $[0, \infty)$, является положительной, возрастающей и дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей уравнению* (10). *Тогда V ограничена, и функция Беллмана определяется равенством $\delta(x) = V(x)/V(\infty)$. Более того, соответствующая оптимальная стратегия $\pi^* = \{a^*(t)\}_{t\geq 0}$, $a^*(t) = a_\delta(X_{t-}^{\pi^*})$, где $X_t^{\pi^*}$ - значение капитала в момент t при управлении π^*.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству верификационной теоремы 4.1 в [8].

Пусть $H(y)=1-F(y)$. Принимая во внимание условие (7), ИДУ (10) может быть переписано в виде

$$(c+rx-\rho(\mu-r)\sigma_1/\sigma)V'(x)+\frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)V''(x)-$$
$$-\lambda\int\limits_0^x H(y)V'(x-y)dy=\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\frac{(V'(x))^2}{V''(x)},\qquad x\in\mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Изучим асимптотическое поведение решения этого ИДУ при малых значениях x. Обозначим $v(x)=V'(x)$, $\widetilde{v}(x)=v(x)-1$. Тогда из (12) получим для $\widetilde{v}(x)$ ИДУ

$$(c+rx-\rho(\mu-r)\sigma_1/\sigma)(\widetilde{v}(x)+1)+\frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\widetilde{v}'(x)-$$
$$-\lambda\int\limits_0^x H(y)[\widetilde{v}(x-y)+1]dy=\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\frac{(\widetilde{v}(x)+1)^2}{\widetilde{v}'(x)},\qquad x\in\mathbb{R}_+, \tag{13}$$

и из (8) - условие

$$\widetilde{v}(0+)=0. \tag{14}$$

Умножая обе части ИДУ (13) на $\widetilde{v}'(x)$, получим уравнение

$$\begin{gathered}(c+rx-\frac{\rho(\mu-r)\sigma_1}{\sigma})(\widetilde{v}(x)+1)\widetilde{v}'(x)+\frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)(\widetilde{v}'(x))^2-\\ -\lambda\widetilde{v}'(x)\int\limits_0^x H(y)\left[\widetilde{v}(x-y)+1\right]dy=\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(\widetilde{v}(x)+1)^2,\ x\in\mathbb{R}_+.\end{gathered} \tag{15}$$

Представим решение задачи (15), (14) при малых x в виде

$$\widetilde{v}(x)=\alpha x^\beta(1+o(1)),\quad \widetilde{v}'(x)=\beta\alpha x^{\beta-1}(1+o(1)),\quad x\to 0,$$

где $\beta>0$ и α - искомые постоянные. Учитывая, что $H(x)=1+o(1)$, $x\to 0$, получаем из (15) равенство

$$\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\left[\alpha^2x^{2\beta}+2\alpha x^\beta+1\right](1+o(1))=$$
$$=\left[\left(c-\frac{\rho(\mu-r)\sigma_1}{\sigma}\right)\alpha^2\beta x^{2\beta-1}+\left(c-\frac{\rho(\mu-r)\sigma_1}{\sigma}\right)\alpha\beta x^{\beta-1}+\right.$$
$$\left.+\left(r-\frac{\lambda}{\beta+1}\right)\alpha^2\beta x^{2\beta}+(r-\lambda)\alpha\beta x^\beta+\frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\alpha^2\beta^2x^{2\beta-2}\right](1+o(1)).$$

Из этого соотношения легко видеть, что $\beta = 1$ и

$$\left(c - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma}\right)\alpha + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\alpha^2 = \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}.$$

Отсюда, в силу (6), что влечет $\widetilde{v}'(0+) = V''(0+) < 0$, и исходного предположения $\mu > r$, получаем

$$\alpha = \widetilde{v}'(0+) =$$

$$= -\frac{(c-\rho(\mu-r)\sigma_1/\sigma) + \sqrt{(c-\rho(\mu-r)\sigma_1/\sigma)^2 + (\mu-r)^2\sigma_1^2(1-\rho^2)/\sigma^2}}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} =$$

$$= -\frac{\mu - r}{\sigma^2\{\rho\sigma_1/\sigma - c/(\mu-r) + \sqrt{c^2/(\mu-r)^2 + 2\sigma_1 c(\rho_1-\rho)/[\sigma(\mu-r)]}\}},$$

где

$$\rho_1 = (\mu - r)\sigma_1/(2c\sigma). \tag{16}$$

В результате, учитывая замену переменных, получаем соотношения

$$V'(x) = 1 - Gx(1+o(1)), \quad V''(x) = -G + o(1), \quad x \to 0, \tag{17}$$

где G - положительная постоянная,

$$G = \frac{\mu - r}{\sigma^2\{\rho\sigma_1/\sigma - c/(\mu-r) + \sqrt{c^2/(\mu-r)^2 + 2\sigma_1 c(\rho_1-\rho)/[\sigma(\mu-r)]}\}}. \tag{18}$$

Из (17) следует асимптотическое представление для $V(x)$:

$$V(x) = x - (G/2)x^2(1+o(1)), \quad x \to 0.$$

Тогда для функции Беллмана $\delta(x)$ имеем следующее представление:

$$\delta(x) = C[x - (G/2)x^2(1+o(1))], \quad x \to 0,$$

где G определено в (18) и $C = 1/V(\infty)$ – положительная постоянная.

Теперь найдем более точное асимптотическое представление для $V''(x)$, чтобы получить асимптотическое представление оптимальной стратегии (попутно исправив ошибку, допущенную в [1] в частном случае $\rho = 0$). Для этого введем замену переменных $\widetilde{v}(x) = -Gx(1+z(x))$, где

G определено в (18), $z(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда $\widetilde{v}'(x) = -G(1+z(x)) - Gxz'(x)$. При малых $x > 0$ будем искать $z(x)$ в виде

$$z(x) = \eta x^{\theta}(1 + o(1)), \quad x \to 0,$$

где $\theta > 0$ и η – искомые постоянные. Из (15) получаем $\theta = 1$ и

$$\eta = [\lambda - r + (\mu - r)^2/\sigma^2 + Gc_\rho]/[2(c_\rho - G\sigma_\rho^2)],$$

где

$$c_\rho = c - \rho(\mu - r)\sigma_1/\sigma, \quad \sigma_\rho^2 = \sigma_1^2(1 - \rho^2), \tag{19}$$

так что справедливо

$$V''(x) = -G - 2G\eta x(1 + o(1)), \quad x \to 0. \tag{20}$$

Следовательно, для оптимальной стратегии (9), в силу (17) и (20), получаем, что при $x \to 0$

$$a_V(x) = -\frac{(\mu - r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{(\mu - r)(1 - Gx(1 + o(1)))}{\sigma^2 G(1 + 2\eta x(1 + o(1)))} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma} =$$

$$= -\frac{c}{\mu - r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu - r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu - r)}(\rho_1 - \rho)} - \frac{\mu - r}{\sigma^2}\left(1 + \frac{2\eta}{G}\right)x(1 + o(1)),$$

где ρ_1 определено в (16).

Окончательно для оптимальной стратегии при $x \to 0$ получаем:

$$a_V(x) = a_V(0+) -$$

$$-\left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \frac{\left[\lambda - r + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\right]\left[a_V(0+) + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma}\right] + c_\rho\frac{(\mu - r)}{\sigma^2}}{\sqrt{c_\rho^2 + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\sigma_\rho^2}}\right)x(1 + o(1)),$$

где

$$a_V(0+) = -\frac{c}{\mu - r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu - r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu - r)}(\rho_1 - \rho)}. \tag{21}$$

Заметим, что, вопреки предположению в [9], $a_V(0+)$, вообще говоря, не равно нулю. Точнее, из (21) видно, что $a_V(0+) > 0$ при $\rho < \rho_1$, $a_V(0+) = 0$, если $\rho = \rho_1$, и $a_V(0+) < 0$, если $\rho > \rho_1$. Заметим также, что значение положительной константы G из (18), участвующей в представлении функции Беллмана и ее производных, может быть переписано в виде:

$$G = \frac{\mu - r}{\sigma^2[a_V(0+) + \rho\sigma_1/\sigma]}. \tag{22}$$

3. Асимптотические представления при больших значениях капитала: случай экспоненциального распределения размеров требований

Будем рассматривать случай, когда размер страхового требования Z имеет экспоненциальное распределение со средним m. В этом случае удается установить асимптотическое представление функции Беллмана (и оптимальной стратегии) при больших значениях начального (соответственно, текущего) капитала.

Следуя идее [1], получим сначала уравнение относительно оптимальной стратегии. Вернемся к ИДУ (12), в котором в рассматриваемом случае будет $H(y) = e^{-ky}$, где $k = 1/m$. Тогда для $v(x) = V'(x)$, получаем

$$(c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma})v(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)v'(x) -$$

$$-\lambda \int\limits_0^x e^{-ky} v(x - y)dy = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{(v(x))^2}{v'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{23}$$

Положим $u(x) = v(x)e^{kx}$. Тогда $v'(x) = e^{-kx}(u'(x) - ku(x))$, и ИДУ (23) приобретает вид

$$\left(c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma}\right)u(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)(u'(x) - ku(x))$$

$$-\lambda \int\limits_0^x u(y)dy = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{u^2(x)}{u'(x) - ku(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда

$$a_V(x) = -\frac{(\mu - r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{u(x)}{u'(x) - ku(x)} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma},$$

и получаем уравнение

$$\left(c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma}\right) u(x) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\frac{\mu - r}{(a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma)\sigma^2}\, u(x) -$$

$$-\lambda \int\limits_0^x u\,(y)\, dy = -\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{(a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma)\sigma^2}{\mu - r}\, u(x).$$

Дифференцируя это уравнение по x, получаем

$$ru(x) + [c + rx - \rho(\mu - r)\sigma_1/\sigma]u'(x) -$$
$$-\frac{\mu - r}{2\sigma^2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\,\frac{u'(x)(a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma) - u(x)(a_V(x))'}{(a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma)^2} - \lambda u(x) =$$
$$= -\frac{\mu - r}{2}\left[u'(x)(a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma) + u(x)(a_V(x))'\right].$$

Разделив обе части на $u(x)$ и обозначив

$$\widetilde{a}_V(x) = a_V(x) + \rho\sigma_1/\sigma, \tag{24}$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно $\widetilde{a}_V$:

$$r - \lambda + \left(c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma}\right)\left(k - \frac{\mu - r}{\sigma^2\widetilde{a}_V(x)}\right) -$$
$$-\frac{\mu - r}{2\sigma^2}\sigma_1^2(1-\rho^2)\,\frac{k\widetilde{a}_V(x) - (\mu - r)/\sigma^2 - \widetilde{a}_V'(x)}{\widetilde{a}_V^2(x)} =$$
$$= -\frac{\mu - r}{2}\left[k\widetilde{a}_V(x) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} + \widetilde{a}_V'(x)\right].$$

Окончательно, учитывая (19) и соотношение $k = 1/m$, получаем

$$[\sigma^2\widetilde{a}_V^2(x) + \sigma_\rho^2]\widetilde{a}_V'(x) = -\frac{\sigma^2}{m}\widetilde{a}_V^3(x) -$$
$$-2\left[r - \lambda + \frac{c_\rho}{m} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} + \frac{r}{m}x\right]\frac{\sigma^2}{\mu - r}\widetilde{a}_V^2(x) +$$
$$+2\left(c_\rho + rx + \frac{\sigma_\rho^2}{2m}\right)\widetilde{a}_V(x) - \sigma_\rho^2\frac{\mu - r}{\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться, что это ОДУ не имеет решений с особенностями типа полюса в конечных точках. Тогда решение задачи Коши для ОДУ (25) с начальным условием $\widetilde{a}_V(0+) = a_V(0+) + \rho\sigma_1/\sigma$, где $a_V(0+)$ определено в (21), существует глобально на $\mathbb{R}_+$. Заметим, что в силу (22) и положительности G имеем $\widetilde{a}_V(0+) > 0$. Учитывая, что ОДУ (25) обладает иррегулярной особенностью на бесконечности ранга 2 (см. [10]), будем искать сначала ограниченное на бесконечности решение ОДУ (25) в виде формального ряда

$$w(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k / x^k, \tag{26}$$

где коэффициенты $\widetilde{a}_k$ определяются из (25) формальной подстановкой этого ряда:

$$\widetilde{a}_0 = (\mu - r)m/\sigma^2 > 0, \qquad \widetilde{a}_1 = -(1 - \lambda/r)(\mu - r)m^2/\sigma^2, \ldots \tag{27}$$

Тогда из общей теории ОДУ с иррегулярными особенностями на бесконечности получаем, что существует частное решение ОДУ (25), имеющее ряд (26) своим асимптотическим представлением при больших x. Для того, чтобы выявить существование и поведение при больших x однопараметрического семейства решений ОДУ (25), стремящихся к $\widetilde{a}_0$, введем замену: $b(x) = \widetilde{a}_V(x) - w(x)$. Функция $b(x)$ удовлетворяет ОДУ

$$\sigma^2(b^2 + 2wb)w' + [\sigma^2(b^2 + 2wb + w^2) + \sigma_\rho^2]b' =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{m}\left(b^3 + 3b^2w + 3bw^2\right) - 2(A + Bx)(b^2 + 2bw) + 2(C + rx)b, \tag{28}$$

где

$$A = \left[r - \lambda + \frac{c_\rho}{m} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\sigma^2}{\mu - r}, \quad B = \frac{r\sigma^2}{m(\mu - r)}, \quad C = c_\rho + \frac{\sigma_\rho^2}{2m}.$$

Далее, полагая, что $b(x) \to 0$ при $x \to \infty$, линеаризуем ОДУ (28) на решении $b = 0$ и, учитывая главные линейные члены разложения по $1/x$, получаем основное линейное ОДУ

$$\widetilde{b}' = x\left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2}\right]\widetilde{b}, \quad x \gg 1. \tag{29}$$

Здесь $d_0 = -2r/[\sigma_\rho^2 + (\mu - r)^2 m^2/\sigma^2] < 0$, а формулы для коэффициентов d_1 и d_2 опускаем ввиду громоздкости вычислений (их конкретные значения не играют существенной роли в асимптотическом представлении для решений ОДУ (29)). Общее решение ОДУ (29) имеет вид $\widetilde{b}(x, D) = Dx^{d_2} \exp(d_0 x^2/2 + d_1 x)$, где D – произвольная постоянная. Тогда нелинейное ОДУ (28) имеет однопараметрическое семейство решений, представимое параметрическим рядом Ляпунова по целым степеням величины $\widetilde{b}(x, D)$ с коэффициентами, имеющими рост не выше степенного. Следовательно, существует семейство ограниченных решений ОДУ (25), имеющих при больших x асимптотическое представление

$$\widetilde{a}_V(x, D) \sim \Sigma_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k x^{-k} + Dx^{d_2} \exp(d_0 x^2/2 + d_1 x)(1 + o(1)), \ x \to \infty, \quad (30)$$

где $d_0 < 0$ (см. выше), $\widetilde{a}_0 > 0$ и $\widetilde{a}_1$ определены в (27).

Наряду с семейством (30), ОДУ (25) может иметь неограниченные на бесконечности решения. Будем их искать в виде $l(x) = Lx^\theta(1 + o(1))$, $x \to \infty$, где L, θ – искомые постоянные. Из (25) получаем $\theta = 1$ и $L = -2r/(\mu - r)$. Применяя затем тот же прием с заменой переменных, что и выше при изучении ограниченных решений, получаем существование однопараметрического семейства $\widetilde{a}_V(x, Q)$ неограниченных на бесконечности решений ОДУ (25), имеющих представление

$$\widetilde{a}_V(x, Q) = -[2r/(\mu - r)]x(1 + h(x, Q)), \quad (31)$$

где Q – параметр, а функция $h(x, Q) \to 0$ при $x \to \infty$. Покажем, что такие решения не могут определять оптимальную стратегию в рассматриваемой задаче. Действительно, предположим противное, т.е. что $\widetilde{a}_V(x) = \widetilde{a}_V(x, Q)$ для некоторого Q. Так как в силу (9) и (24) имеет место соотношение $(\ln V'(x))' = -(\mu - r)/[\sigma^2 \widetilde{a}_V(x)]$, то

$$V'(x) = K \exp\left\{-\frac{(\mu - r)}{\sigma^2} \int_1^x [\widetilde{a}_V(y)]^{-1} dy\right\} \quad (32)$$

для некоторой константы $K > 0$, откуда при $x \to \infty$ с учетом (31) имеем

$$V'(x) = K \exp\left\{\frac{(\mu - r)^2}{2r\sigma^2} \int_1^x y^{-1}(1 + o(1)) dy\right\} = Kx^{(\mu - r)^2/(2r\sigma^2)}(1 + o(1)).$$

Отсюда функция V не ограничена и не может (с точностью до константы) определять функцию Беллмана как максимальную вероятность неразорения в нашей задаче. Тогда, с учетом (24), (30) и (27), справедлива

Теорема. *Для оптимальной стратегии верно следующее асимптотическое представление при больших x:*

$$a_V(x) = \frac{(\mu - r)m}{\sigma^2} - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma} - \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)\frac{(\mu - r)m^2}{\sigma^2 x}(1 + o(1)),\ x \to \infty. \quad (33)$$

Как следствие, используя (32), (24) и (33), получаем для $V'(x)$ асимптотическое представление при больших x:

$$\begin{aligned} V'(x) =& K\exp\left\{-\int_0^x \left[m\left(1 - m\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)\frac{1}{y}(1 + o(1))\right)\right]^{-1} dy\right\} = \\ =& K\exp\left\{-\int_0^x \left(\frac{1}{m} + \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)\frac{1}{y}(1 + o(1))\right) dy\right\} = \\ =& Ke^{-x/m}x^{\lambda/r-1}(1 + o(1)), \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $V(x) = V(\infty) - Ke^{x/m}x^{\lambda/r-1}(1 + o(1))$, $x \to \infty$, и для функции Беллмана получаем представление:

$$\delta(x) = 1 - K_1 e^{-x/m}x^{\lambda/r-1}(1 + o(1)), \quad x \to \infty,$$

с некоторой константой $K_1 > 0$.

Заметим, что последнее представление имеет место и для функции Беллмана в аналогичной задаче управления классическим процессом риска (см. [7]). То же относится и к предельному значению оптимальной стратегии – значение $a_V(\infty)$ в (33) совпадает с предельным значением, полученным в [7] (при сравнении, естественно, нужно положить $\rho = 0$).

В заключение также отметим, что были проведены численные расчеты для различных наборов параметров модели, подтверждающие полученные результаты.

Список литературы

[1] Белкина Т.А., Норштейн М.В. Структура оптимальной инвестиционной стратегии в динамической модели риска с диффузионным возму-

щением. - Сб. "Анализ и моделирование экономических процессов". М.: ЦЭМИ РАН, 2012, вып. 9, с. 103-112.

[2] Hipp C., Plum M. Optimal investment for insurers// Insurance Math. Econom., 2000, v. 27, 2, p. 215-228.

[3] Hipp C., Plum M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers// Finance and Stochastics, 2003, v. 7, 3, p. 299-321.

[4] Gaier J., Grandits P., Schachermayer W. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment// Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, 3, p. 1054-1076.

[5] Azcue P., Muler M. Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints// Insurance Math. Econom., 2009, v. 44, 1, p. 26-34.

[6] Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения// Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, т. 16, вып.6, с. 961-981.

[7] Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамера-Лундберга при экспоненциальном распределении размера требований// Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010, т.17, вып.1, с. 3-24.

[8] Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M. Optimal constrained investment in the Cramer-Lundburg model// Scandinavian Actuarial Journal, 2012; DOI: 10.1080/03461238.2012/.699001.

[9] Yang H.L., Zhang L.H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process//Insurance Math. Econom., 2005, v. 37, 3, p. 615-634.

[10] Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. - New York: Dover, 1987.

$\boxed{\text{Беленький В.З.}}$, Милкова М.А.

Вычислительная система TAYLOR–4: возможности и примеры

Данная статья завершает серию публикаций [1–5], посвященных разработке, реализации и использованию в вычислительной практике методов, связанных с представлением функций рядами Тейлора, методов асимптотических разложений, а также прямых методов высших производных.

Разработанные д. ф-м.н., проф. В.З. Беленьким специальные рекуррентные алгоритмы (так называемая компьютерная «Алгебра дифференцирования») предназначены для вычисления по формулам дифференциального исчисления точного значения производных произвольных порядков от функций, заданных формулами любой сложности, начиная от суперпозиции элементарных функций и заканчивая функциями, заданными неявно.

Напомним, что в 80–90-х годах на основе «Алгебры дифференцирования» в среде DOS была разработана система TAYLOR [1–3], позволяющая получать разложение функций в ряд Тейлора, а также решать некоторые типовые задачи. Затем система была модернизирована для работы в Windows, создан интерфейс, позволяющий решать задачи в интерактивном режиме [4, 5].

Четвертая (итоговая) версия системы TAYLOR-4 представляет собой набор динамических библиотек (.dll), подключение которых дает возможность исследователю использовать в своей программной среде (Pascal, Delphi, Embarcadero) алгоритмы TAYLOR.

В данной статье мы сначала проведем обзор имеющихся в TAYLOR-4 процедур, а затем приведем примеры их вызова из пользовательской среды.

1. Обзор процедур TAYLOR-4

Каталог процедур можно разбить на процедуры двух уровней: базовый уровень и прикладной уровень.

1.1. Базовый уровень

В базовый уровень включены процедуры, результатом которых являются коэффициенты $\{c_k\}$ разложения функции $y(x)$ в ряд Тейлора:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (x - x_0)^k \, ,$$

$$c_k := \frac{1}{k!} \cdot y^{(k)}(x_0) .$$

Функция $y(x)$ может быть задана различными способами; каждая из базовых процедур отвечает тому или иному способу. Начальная точка x_0 и порядок разложения n ($n \leq 10$) также задаются в качестве входных параметров.

Ниже перечислены процедуры базового уровня (номер процедуры указан в скобках).

- Явная функция (1.1.1).
- Параметрическая функция (1.1.2).
- Неявная функция (1.1.3).
- Обратная функция (1.1.4).
- Функция, заданная обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка (1.1.5).
- Функция, заданная ОДУ высокого порядка $m,$ где $m \leq 5$ (1.1.6).
- Вектор-функция размерности $m, m \leq 5,$ заданная системой дифференциальных уравнений (1.1.7).
- Функция, заданная сингулярным ОДУ порядка $m,$ где $m \leq 5$ (1.1.8).

1.2. Прикладной уровень

В прикладной уровень включены процедуры, предназначенные для решения задач вычислительной математики. Прикладные процедуры можно разбить на 3 подуровня: Типовые задачи, Интегрирование, Вычисление таблиц.

Перечислим процедуры подуровня Типовые задачи (номер процедуры указан в скобках).

- Вычисление корня функции в окрестности начальной точки, заданной способами 1.1.1–1.1.3 базового уровня (1.2.1).
- Вычисление точки экстремума функции в окрестности начальной точки, заданной способами 1.1.1–1.1.3 базового уровня (1.2.2).
- Решение системы двух уравнений (1.2.3).
- Вычисление определенного интеграла (1.2.4).
- Вычисление несобственного интеграла от быстро осциллирующей функции, заданной явно (1.2.5).

В блоке Интегрирование решаются задачи Коши для дифференциальных уравнений, заданных способами 1.1.5–1.1.8.

С помощью блока Вычисление таблиц можно получить значения функции $y(x)$, задаваемой одним из способов 1.1.1–1.1.7, на некотором отрезке аргумента x (равномерная сетка с конечным числом точек), содержащем начальную точку x_0. В частности, получение такого рода таблиц позволяет строить графики функции на заданном отрезке, в том числе графики неявных функций.

Для некоторых процедур (1.1.1–1.1.7, 1.2.1, 1.2.4) допустимо использовать различные варианты задания функций.

1. *Простой вариант*, когда формулы функций содержат только основные переменные.
2. *Вариант с параметрами*, когда в записи формул могут присутствовать несколько (не более пяти) числовых параметров.
3. *Блочный вариант*, допускающий в записи формул идентификаторы промежуточных функций (не более пяти, формулы промежуточных функций также задаются пользователем).
4. *Блочно-параметрический вариант*, допускающий как вариант с параметрами, так и вариант с блоками (в том числе, в формулах промежуточных функций допускается использование параметров).
5.

2. Примеры обращений к процедурам Taylor-4

При обращении к любой из процедур пользователю необходимо указать идентификаторы используемых переменных (допустимо использование только однобуквенных идентификаторов), входные параметры. В случае использования блоков или параметров дополнительно указываются их идентификаторы и формулы.

Массивы и строчные переменные определяются специальными служебными типами: string1, string3, arrs7, arrofreal1, arrofreal2, arrofrealG.

В случае возникновения ошибок (некорректный ввод данных, невыполнение начальных условий и т.п.) пользователю выдается соответствующее сообщение.

Приведем примеры обращений к процедурам.

2.1. Процедуры базового уровня

Исходной информацией для процедур является:

- идентификаторы переменных, при помощи которых записана формула функции;
- формула соответствующей функции;
- начальные значения переменных, определяющих точку разложения ряда Тейлора;
- порядок разложения n.

Результат каждой процедуры (кроме результатов разложения функции, заданной системой дифференциальных уравнений 1.1.7) заносится в массив типа arrofreal, имя которого задается пользователем. Компоненты этого массива – коэффициенты c_k $(k = 0,1, \dots, n)$ ряда Тейлора функции $y(x)$ в точке x_0.

Процедура 1.1.7 получает коэффициенты c_k $(k = 0,1, \dots, n)$ разложения вектор-функции, заданной системой дифференциальных уравнений (порядка не более трех), поэтому выходной массив имеет матричный формат типа arrofreal2; строки этого массива содержат коэффициенты разложения соответствующих функций.

Далее мы приведем примеры подключения процедур.

Простой вариант

Явная функция

Explicit (xS: char; x0: real; f: string3; n: byte; var result: arrofreal),
где xS – идентификатор переменной; x0 – начальное значение переменной xS; f – формула функции; n – порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Обратная функция

Invers (yS: char; y0: real; g: string3; n: byte; var result: arrofreal),
где yS – идентификатор переменной; y0 – начальное значение переменной yS; g – формула функции $x = g(y)$; n – порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Параметрическая функция

Paramet (tS: char; t0: real; f: arrofstring; n: byte; var result: array of real),
где tS – идентификатор параметрической переменной; t0 – начальное значение переменной tS; f – формулы параметрических функции $f_1(tS), f_2(tS)$; n- порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Неявная функция

Implicit (xS,yS: char; x0,y0: real; f: string3; n: byte; var result: array of real),
где xS, yS – идентификаторы переменных; x0, y0 – начальные значения переменных; f – формула функции, задаваемая уравнением $F(xS, yS) = F(x_{0,}y_0)$; n- порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Функция, заданная ОДУ первого порядка

Diff1 (xS,yS: char; x0,y0: real; f: string3; n: byte; var result: arrofreal),
где xS, yS – идентификаторы переменных; x0, y0 – начальные значения переменных; f – формула функции $G(xS, yS)$ (правая часть ОДУ); n – порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Функция, заданная ОДУ высокого порядка ($m \leq 5$)

Diffh (xS: char; x0: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: string3; n: byte;
var result: arrofreal),
где xS – идентификатор основной переменной; x0 – начальное значение; LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет значение m); Yn – массив значений функции и ее производных в начальной точке; f – формула функции $F(xS, LS)$; n – порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Вектор-функция, заданная системой дифференциальных уравнений порядка $m \leq 5$

Diffs (xS: char; x0: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; g: arrs7; n: byte;
var result_m: arrofreal2),
где xS – идентификатор основной переменной; x0 – начальное значение; LS – список идентификаторов для искомой функции (длина списка определяет значение m); Yn – массив значений функции в начальной точке; g – массив формул функций функции; n – порядок разложения; result_m – m-мерный выходной массив коэффициентов.

Функция, заданная сингулярным ОДУ порядка $m \leq 5$

SingODE (xS: char; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: string3; n: byte;
var result: arrofreal),
где xS – идентификатор основной переменной; x0 не задается, оно по умолчанию равно 0; LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет значение m); Yn – массив значений функции и ее производных в начальной точке; f – формула функции $F(xS, LS)$; n – порядок разложения; result – выходной массив коэффициентов.

Вариант с параметрами

Процедуры 1.1.1–1.1.7 могут дополнительно включать задание параметров (не более пяти). В данном случае в записи имени процедуры в конце приписывается символ “P” (Parametr). В качестве входных переменных добавляются переменные PS – список однобуквенных идентификаторов параметров, Zn – массив значения параметров. Например, при обращении к процедуре получения коэффициентов Тейлора явной функции запишем с использованием параметров:

ExplicitP (xS: char; x0: real; f: string3; n: byte; PS: string1; Zn: arrofreal1; var result: arrofreal),
где $f = f(xS, PS)$.

Принцип обращения к остальным процедурам аналогичен и мы его опустим.

Вариант с блоками

В данном случае в записи имени процедуры в конце приписывается символ “B” (Block).

В качестве входных переменных добавляются переменные BS –список однобуквенных идентификаторов промежуточных функций, GS – строковый массив формул функций.

Например, при обращении к процедуре получения коэффициентов Тейлора неявной функции с пользованием блочных функций:

ImplicitB (xS,yS: char; x0,y0: real; BS: string1; f: string3; GS: arrofstring; n: byte; var result: arrofreal),
где $f = f(xS, BS)$.

Принцип обращения к остальным процедурам аналогичен и мы его опустим.

Вариант с блоками и с параметрами

Данный вариант объединяет два рассмотренных выше варианта обращения к процедурам с параметрами и с блоками.

В записи имени процедуры в конце приписывается символ “PB” (Parameter and Block).

Таким образом, к базовой входной информации добавляется четыре переменные: PS, Zn, BS, GS.

Например, при обращении к процедуре получения коэффициентов Тейлора параметрической функции с использованием блоков и параметров:

ParametPB (tS: char; t0: real; f: arrofstring; BS: string1; GS: arrofstring;

n: byte; PS: string1; Zn: arrofreal1; var result: arrofreal),
где $f = f(tS, BS, PS)$.

Принцип обращения к остальным процедурам аналогичен и мы его опустим.

2.2. Процедуры прикладного уровня

Простой вариант

Рассмотрим процедуры решение типовых задач.

Вычисление корня явной функции

Root (xS: char; x0: real; f: string3; n: byte; eps: real; var x1: real),
где xS – идентификатор переменной; x0 – начальная точка, в окрестности которой находится корень уравнения; f – формула функции; n – порядок разложения; eps – точность вычисления (погрешность по значению функции) $x1$ – найденный корень уравнения.

Данная процедура работает также в случае варианта с параметрами, блоками, блоками и параметрами.

Пример подключения процедуры вычисления корня для случая с блоками и параметрами:

RootPB (xS: char; x: real; BS: string1; f: string3; gS: arrs7; n: byte; eps: real;
PS: string1; Zn: arrofreal1; var x1: real),
где BS – список однобуквенных идентификаторов промежуточных функций (блоков); gS – строковый массив формул функций–блоков; PS – список однобуквенных идентификаторов параметров; Zn – массив значения параметров.

Вычисление корня параметрической функции

Rootparamet (tS: char; t0: real; f: arrs7; n: byte; eps: real; var t1,x1: real),
где tS – идентификатор параметрической переменной; t0 – ее начальное значение; f – формулы параметрических функции $f_1(tS), f_2(tS)$; – формула функции; n – порядок разложения; eps – точность вычисления (погрешность по значению функции); результаты: значение параметра t и координаты x.

Вычисление корня неявной функции, заданной условием $\boldsymbol{F(x,y) = F(x_0,y_0)}$

Rootimpl (xS,yS: char; x0,y0: real; f: string3; n: byte; eps: real; x: real;
var x1: real),

где xS, yS – идентификаторы переменных; x0,y0 – их начальные значения; f – формула функции $F(x_s, y_s)$; n – порядок разложения; eps – точность вычисления (погрешность значению $|F(x_1, 0) - F(x_0, 0)|$); x – начальная точка, в окрестности которой находится корень; $x1$ – значение корня.

Вычисление экстремума явной функции

Et (xS: char; x: real; f: string3; n: byte; eps: real; var x1: real; var y1: real),
где xS – идентификатор переменной; x0 – ее начальное значение; f – формула функции $f(xS)$; n – порядок разложения; eps – точность вычисления (погрешность по значению производной данной функции в точке экстремума); $x1, y1$ – координаты точки экстремума.

Вычисление экстремума параметрической функции

Etparamet (tS: char; t0: real; f: arrs7; n: byte; eps: real; var t1,x1,y1: real),
где tS – идентификатор параметрической переменной; t0 – ее начальное значение; f – формулы параметрических функции $f_1(tS), f_2(tS)$; – формула функции; n – порядок разложения; eps – точность (погрешность по значению производной функции f_2' в точке t1); результаты: значение параметра t и координаты точки экстремума $x1, y1$.

Точка экстремума t_1 находится из условия $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$ с точностью eps. Если при этом $\left|\frac{\partial f_1}{\partial t}\right| < 10^{-6}$, то выдается сообщение о неопределенности результата.

Вычисление экстремума неявной функции, заданной условием $\boldsymbol{F(x, y) = F(x_0, y_0)}$

Etimpl (xS,yS: char; x0,y0: real; f: string3; n: byte; eps: real; var x1,y1: real),
где xS, yS – идентификаторы переменных; x0,y0 – начальные значения координат точки экстремума; f – формула функции $F(x_s, y_s)$; n – порядок разложения; eps – точность вычисления (по значению частной производной $\partial F/\partial x$ в точке экстремума); $x1, y1$ – координаты точки экстремума.

Координаты (x_1, y_1) точки экстремума находятся как решение системы двух уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \end{cases}$$

с начальным приближением x_0, y_0 и с точностью eps по значению координаты x_1. Если в точке экстремума $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < 10^{-6}$, то выдается сообщение о неопределенности результата.

Решение системы двух уравнений

Rootsys (xS,yS: char; x,y: real; f: arrs7; n: byte; eps: real; var x1,y1: real),
где xS, yS – идентификаторы переменных; x0,y0 – начальные приближения искомых корней; f – формулы левых частей $F(xS, yS)$; n – порядок разложения; eps – точность (и по значению функций f, и одновременно по значению корней); $x1, y1$ – значения корней.

Вычисление определенного интеграла от явной функции

Integral (xS: char; a,b: real; f: string3; n: byte): real,
где xS – идентификатор переменной; a,b – пределы интегрирования; f – формула функции интегранта; n – порядок разложения.

На каждом шагу интегрирования функция f приближается рядом Тейлора и берется его интеграл. Шаг интегрирования выбирается автоматически. Процедура оформлена как функция, результат которой – значение интеграла.

Данная процедура работает также в случае варианта с параметрами, блоками, блоками и параметрами.

Пример подключения процедуры вычисления интеграла для случая с блоками и параметрами:

IntegralPB (xS: char; x0,x1: real; BS: string1; sS: string3; gS: arrs7;

n: byte; PS: string1; Zn: arrofreal1): real,
где BS – список однобуквенных идентификаторов промежуточных функций (блоков); gS – строковый массив формул функций – блоков; PS – список однобуквенных идентификаторов параметров; Zn – массив значения параметров.

Вычисление несобственного интеграла от быстро осциллирующей функции

Oscint (xS: char; x0, fo: real; fS: string3; n: byte): real,
где xS – идентификатор переменной; fo – частота осцилляций (fo>>1); f – формула функции интегранта; n – порядок разложения.

Далее рассмотрим процедуры интегрирования (решения задачи Коши).

ОДУ первого порядка

IntODE (xS,yS: char; a,b: real; y0: real; f: string3; n: byte): real,
где xS, yS – идентификаторы переменных; a,b – пределы интегрирования; y0 – начальное значение $y_0 = y(a)$; f – формула правой части ОДУ; n – порядок разложения. Результат – значение $y(b)$.

ОДУ высокого порядка $m \leq 5$

IntHODE (xS: char; a,b: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: string3;
n: byte; var Z: arrofreal1),
где xS – идентификатор основной переменной; a,b – пределы интегрирования; LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет порядок уравнения); Yn – их начальные значения; f – формула правой части; n– порядок разложения; Z – имя выходного массива (значения на правом конце функции и ее производных).

Сингулярное ОДУ порядка $m \leq 5$

IntSing (xS: char; b: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; fS: string3;
n: byte; var Z: arrofreal1),
где xS – идентификатор основной переменной; b – правый предел интегрирования b>0 (по умолчанию начальная точка $x_0 = 0$); LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет порядок уравнения); Yn – их начальные значения; f – формула правой части; n – порядок разложения; Z – имя выходного массива (значения на правом конце функции и ее производных).

Должно выполняться ограничение $n + m \leq 10$.

Система дифференциальных уравнений

Intsys (xS: char; a,b: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: arrs7;
n: byte; var Zn: arrofreal1),
где xS – идентификатор основной переменной; a,b – пределы интегрирования; LS – список идентификаторов искомых функции; Yn – их начальные значения; f – формулы правых частей; n – порядок разложения; Z – имя выходного массива (значения $LS(b)$).

Рассмотрим процедуры получения значений функций (вычисление таблиц) на равномерной сетке (для различных видов функций).

Таблица для явной функции

ExplTab (xS: char; f:string3; a: real; b:real; m: byte;

var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где xS – идентификатор переменных; f – формула функции; a, b – концы отрезка значений аргумента, на котором строится таблица; m – число интервалов; points1, points2 – значения аргумента и функции соответственно.

Заданный отрезок [a,b] разбивается на Nt равных частей, и в узлах полученной равномерной сетки вычисляются табличные значения $x, y = f(x)$.

Таблица для параметрической функции

ParametTab (tS: char; f: arrs7; a,b: real; m: byte; var pointsT:arrofrealG;

var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где tS – идентификатор параметрической переменной; f – формулы функций $x = f_1(tS), y = f_2(tS)$; a, b – концы отрезка значений параметра tS, на котором строится таблица; m – число интервалов; pointsT, points1, points2 – значения параметра, аргумента x и функции y соответственно.

Таблица для неявной функции заданной уравнением $\boldsymbol{F(x,y) = F(x_0,y_0)}$

ImplTab (xS,yS: char; x0,y0: real; f: string3; m1, m2: byte; h,eps: real;

n: byte; var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где xS, yS – идентификаторы переменных; x0, y0 – их начальные значения; f – формула функции $F(xS, yS)$; m1, m2 – число точек равномерной сетки аргумента xS слева от начального значения (m1) и справа от начального значения (m2); h – шаг сетки; eps – точность; n – порядок разложения; points1, points2 – полученные табличные значения.

Таблица строится в узлах равномерной сетки отрезка $[x_0 - m_1 h, x_0 + m_2 h]$ с общим числом точек $(m \coloneqq m_1 + m_2 + 1)$, нумеруемых индексом i=0,1,…,m. В каждом узле x_i значение y_i находится процедурой нахождения корня уравнения с параметром как корень (относительно y) уравнения $f_i(y) \coloneqq F(x_i, y) - F(x_0, y_0) = 0$ с параметром x_i, с точностью eps по значению функции f_i.

Таблица для обратной функции

Invtab (xS,yS: char; y0: real; g: string3; m1,m2: byte; h, eps: real;

n: byte; var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG), где xS, yS – идентификаторы переменных; y0 – начальное значение y; g – формула функции $x = g(y)$; m1, m2 – число точек равномерной сетки аргумента xS слева от начального значения $x_0 \coloneqq g(y_0)$ (m1) и справа от начального значения (m2); h – шаг сетки; eps – точность; n – порядок разложения; points1, points2 – полученные табличные значения.

Таблица строится в узлах равномерной сетки отрезка $[x_0 - m_1 h, x_0 + m_2 h]$. В каждом узле x_i значение y_i находится процедурой нахождения корня уравнения с параметром как корень уравнения g(y)=x_i с параметром x_i, с точностью eps по значению y.

Таблица для интегральной кривой для ОДУ первого порядка

ODETab (xS,yS: char; x0,y0,b: real; f: string3; m,n: byte;
var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где xS, yS – идентификаторы переменных; x0, y0 – их начальные значения; b – правый конец табличного отрезка (предполагается, что левый конец $a = x_0$) f – формула правой части ОДУ; m – число интервалов разбиения отрезка [a, b]; n – порядок разложения; points1, points2 – полученные табличные значения.

Таблица для интегральной кривой для ОДУ высокого порядка ($m \leq 5$)

HODETab (xS: char; a,b: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: string3;
m, n: byte; var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где xS – идентификатор основной переменной; a – ее начальное значение; b – правы конец табличного отрезка; LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет порядок уравнения); Yn – их начальные значения; f – формула правой части ОДУ; m – число интервалов разбиения отрезка [a, b]; n – порядок разложения; points1, points2 – полученные табличные значения.

Таблица для интегральной кривой для сингулярного ОДУ (порядка $m \leq 5$)

SingTab (xS: char; b: real; LS: string1; Yn: arrofreal1; f: string3;
m, n: byte; var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG),

где xS – идентификатор основной переменной; b – правый предел интегрирования b>0 (по умолчанию начальная точка $x_0 = 0$); LS – список идентификаторов для искомой функции и ее производных до порядка (m–1) (длина списка определяет порядок уравнения); Yn – их начальные значения; f – формула правой части ОДУ; m – число интервалов разбиения отрезка [a, b]; n – порядок разложения; points1, points2 – полученные табличные значения.

Получение табличных значений (x_i, y_i) предоставляет возможность построения графиков функций.

Приведем пример построения графика неявной функции в среде Delphi. Сначала определим используемые типы, затем подключаем необходимую процедуру (в нашем примере это процедура ImplTab) из библиотеки taylor.dll (библиотека в данном случае находится в той же папке, что и текущий проект Delphi). Ниже приведен фрагмент описываемой процедуры:

```
implementation

{$R *.dfm}
 type
      string1=string[6];
      string3=string[100];
      arrs7=array [0..6] of string3;
      arrofreal1=array[0..5] of real;
      arrofrealG=array[0..1000] of real;


procedure
ImplTab(xS,yS: char; x0,y0: real; fS: string3;
m1,m2: byte; h,eps: real; n: byte;
var points1:arrofrealG; var points2: arrofrealG); stdcall; external 'taylor';
```

```
// Процедура получения табличных значений для неявной функции

var  // Задание переменных:
xS, yS: char;
x0,y0,a,b,h: real;
m1,m2, i,n: byte;
f: string3;
eps:real;
points1, points2: arrofrealG;

begin
  // Входные данные:
  xS:='x';
  yS:='y';
  f:='y^2-2*sin(x*y)+log(x+y)';
  x0:=1; y0:=0;
  m1:=3; m2:=12;
  h:=0.05;
  eps:=1E-6;
  n:=4;

  // Вызов процедуры ImplTab:
  ImplTab(xS,yS,x0,y0,f,m1,m2,h,eps,n,points1, points2);

// Вывод графика неявной функции:
Series1.Clear;
for i:=0 to (m1+m2) do
Series1.AddXY(points1[i],points2[i],'',clRed);
Chart1.Title.Text.Clear;

end;
```

На рис. 1 приведен результат работы данной процедуры.

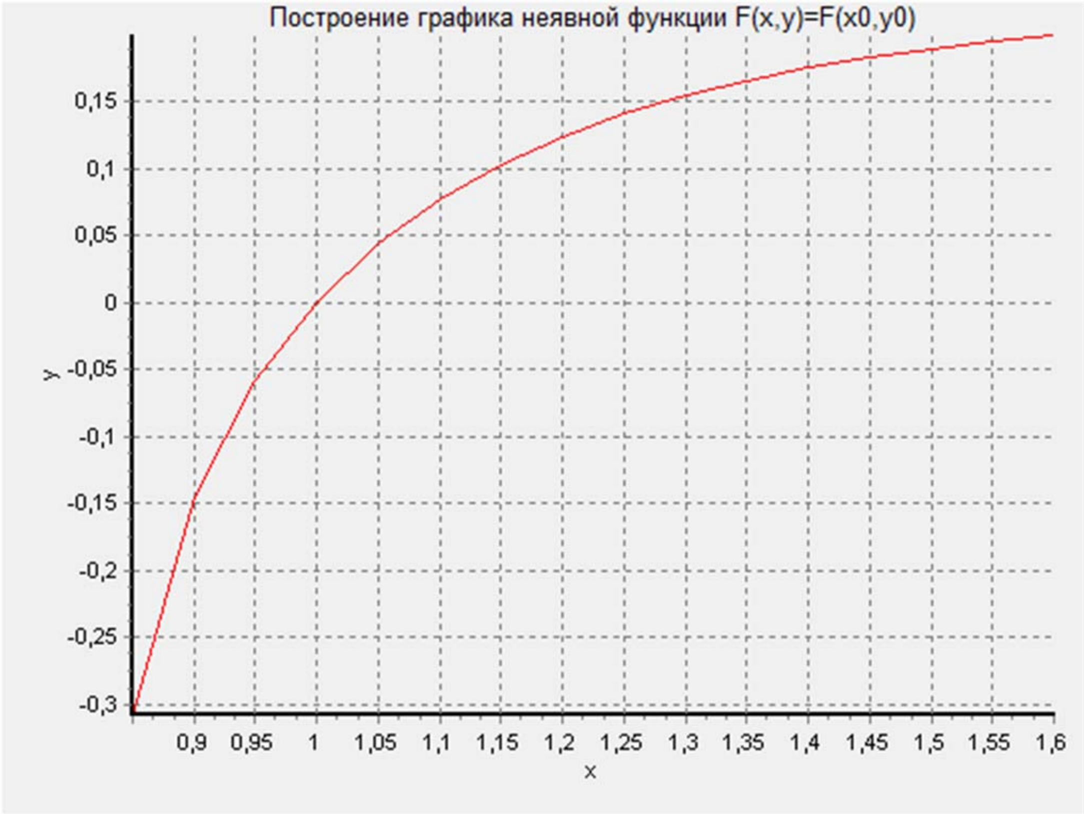

Рис. 1. График неявной функции.

Итак, представленные в виде динамически подгружаемых библиотек (.dll) процедуры TAYLOR позволяют использовать их, не выходя из рабочей среды исследователя (Pascal, Delphi, Embarcadero), что повышает эффективность и удобство работы, упрощает проведение рутинных операций по решению типовых задач вычислительной математики.

Список литературы

1. Беленький В.З. Сообщение о программной системе «Алгебра дифференцирования TAYLOR» // Кибернетика. 1989, № 3.
2. Беленький В.З. Васильева О.А. Кукаркин А.Б. Программный модуль «Алгебра дифференцирования TAYLOR»: результаты численных экспериментов, сообщение о версии 2.1 // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 3.
3. Беленький В.З. Базовые алгоритмы алгебры дифференцирования для ЭВМ. М.: ЦЭМИ РАН, 2003. – 46 с.
4. Борисова (Милкова) М.А. Применение алгебры дифференцирования к исследованию уравнения Беллмана / Сб. «Анализ и моделирование экономических процессов», вып.5. М.: ЦЭМИ РАН, 2008.
5. Милкова М.А. Вычислительная система TAYLOR v. 3.0 / Труды интернет-конференции «Актуальные вопросы современной науки и естествознания», 2009.

С.С. Грачева

Задача оптимального распределения средств на рекламные мероприятия с учетом специфики вуза

1. Постановка задачи

За последние десятилетия рынок образовательных услуг получил значительное развитие. Появилась и продолжает усиливаться конкурентная борьба между различными образовательными учреждениями за привлечение абитуриентов.

Одним из важнейших аспектов планирования рекламной кампании вуза является оценка эффективности проводимых рекламных мероприятий.

Традиционные методы оценки эффективности рекламных вложений учитывают, прежде всего, влияние рекламы на изменение объемов сбыта и выручки предприятия. Поэтому использование этих методов в случае рассмотрения рекламной кампании вуза затруднено или вообще не представляется возможным.

В данной работе для оценки показателей эффективности рекламных мероприятий вуза предлагается использовать оптимизационный подход, при этом предлагается учитывать статистические данные о результатах рекламных кампаний прошлых лет.

Такой подход к распределению рекламного бюджета позволяет перераспределить затраты на различные виды рекламы, используемые вузом, с целью повышения общей эффективности рекламной кампании. При этом для каждого конкретного вуза решается своя задача. Полученное решение позволяет учитывать характерные особенности данного учебного заведения, такие как рейтинг вуза, его местоположение, размер вуза, наличие филиалов и т.п.

Анализ решения данной задачи оптимизации позволяет повысить эффективность распределения выделенных на рекламу средств с учетом специфики рассматриваемого учебного заведения.

2. Описание модели

Рассмотрим задачу оптимизации [1, 3], решение которой позволяет распределять рекламные расходы по различным каналам таким образом, чтобы максимизировать суммарную эффективность затрат на рекламную кампанию в целом. При этом учитываются ограничения на рекламный бюджет и на средства, выделяемые на каждое отдельное рекламное мероприятие, а также статистика проведения рекламных кампаний прошлых лет.

Для описания математической модели введем следующие обозначения.

Пусть y_{ij}^k – число абитуриентов, которые указали в анкете, что заинтересовались вузом после проведения j-ого рекламного мероприятия в i-том квартале k-го года, M – количество проводимых вузом рекламных мероприятий, N – количество лет, за которые имеются статистические данные. Вычислим показатели эффективности каждого рекламного мероприятия. В нашей модели этот показатель поквартальный и будет рассчитываться как средняя эффективность j-ого рекламного мероприятия в i-ом квартале. Эффективность каждого рекламного мероприятия будет определяться на основе расчета относительного отклика на него (доля абитуриентов, указавших в анкете данное рекламное мероприятие, от общего количества абитуриентов, зарегистрировавшихся на сайте института). Обозначим этот показатель через α_{ij}. Запишем формулу для расчета среднего поквартального показателя эффективности:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{y_{ij}^k}{\Sigma_{i=1}^4 \Sigma_{j=1}^M y_{ij}^k}.$$

Теперь сформулируем критерий эффективности рекламной кампании в течение года. Чем больше показатель эффективности определенной рекламы, тем больше необходимо вкладывать денег в эту рекламу.

Обозначим через x_{ij} – затраты на проведение j-го рекламного мероприятия в i-ом квартале. Тогда критерий эффективности всей рекламной кампании можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{M} \alpha_{ij} x_{ij} \to \max_{x_{ij}} \tag{1}$$

Естественно, что бюджет рекламной кампании вуза ограничен. Он определяется в зависимости от целей рекламной кампании. Пусть на рекламу вуза выделены средства в размере X, тогда ограничение имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \le X \tag{2}$$

Исходя из экономического смысла следует ввести ограничение, согласно которому, затраты не могут принимать отрицательных значений:

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,M}.$$

Очевидно, что существует минимально допустимая стоимость того или иного рекламного мероприятия. Кроме того, некоторые виды рекламы должны существовать как поддерживающая реклама. Запишем эти ограничения следующим образом:

$$x_{ij} \ge \gamma_{ij}, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,M}, \tag{3}$$

где γ_{ij} – минимальный размер рекламных вложений

Также могут существовать ограничения сверху на отдельные виды затрат (например, при размещении баннера в каком-либо разделе сайта). Конечно, если полученное ограничение не превышает бюджет (т.е. эффективно), то оно принимает вид:

$$x_{ij} \le \beta_{ij}, \quad \forall i, j : \beta_{ij} < X, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,M}, \tag{4}$$

где β_{ij} – максимальный размер рекламных вложений

Итак, математическая постановка задачи для нахождения оптимального распределения бюджета вуза – это задача максимизации целевой функции (1) при ограничениях (2) – (4). Ограничения (2) – (4) определяют допустимое множество решений задачи.

Полученная задача линейного программирования может быть решена средствами пакета Microsoft Excel [4].

3. Конкретные примеры решения задачи

Рассмотрим решение поставленной задачи для двух государственных вузов технического профиля.

Вуз 1 расположен на окраине Москвы, характеризуется средним по величине рейтингом, не имеет филиалов, в нем обучается около 10 тыс. студентов.

Вуз 2 расположен в центре Москвы, имеет более высокий рейтинг, филиалы в Подмосковье, в нем обучается около 20 тыс. студентов.

Оба вуза предоставили данные о своих рекламных затратах. Для получения информации о поквартальных показателях эффективности рекламных мероприятий были обработаны данные, собранные в результате анкетирования на днях открытых дверей и при регистрации абитуриентов на сайтах вузов. В анкетах абитуриентами указывался вид рекламных мероприятий, который повлиял на их выбор вуза.

За рассматриваемый промежуток времени анализируемые вузы проводили следующие рекламные мероприятия:

– размещение рекламы на радио (x_1);

– размещение наружной рекламы (x_2);

– баннерная реклама на сайте Учеба. ру (x_3);

– размещение объявлений в журналах и газетах (x_4);

– реклама в специализированных справочниках (x_5);

– организация связей с общественностью – поездки по школам, лицеям, колледжам (x_6);

– организация участия в образовательных выставках, конференциях (x_7);
– распространение сувенирной продукции с символикой вуза, информационного и раздаточного материала (x_8);
– размещение информационных плакатов в школах (x_9);
– оптимизация сайта в сети Интернет (x_{10});
– организация культурно-массовых мероприятий для абитуриентов (x_{11});
– издание собственных газет и журналов (x_{12}).

С учетом предоставленных статистических данных об отклике абитуриентов были вычислены средние поквартальные показатели эффективности α_{ij}, приведенные в табл.1. Для этого был определен относительный отклик на каждый вид размещенной вузом рекламы. Незаполненные позиции в таблице означают, что данное рекламное мероприятие в рассматриваемом квартале не проводилось.

Таблица 1

Значения показателей эффективности рекламных мероприятий

Вид рекламы	α_{1j}	α_{2j}	α_{3j}	α_{4j}
x_1		0,01		
x_2				0,08
x_3		0,10		0,10
x_4		0,01	0,01	
x_5	0,04	0,01		
x_6			0,2	
x_7	0,01			0,02
x_8	0,01		0,01	0,01
x_9		0,08		
x_{10}	0,10			
x_{11}		0,10		0,10
x_{12}			0,01	

Анализ полученных коэффициентов позволяет сделать вывод о том, какие рекламные мероприятия являлись наиболее эффективными. Перечислим их.

1. Поездки по школам (x_6). Проводились только в III квартале, но при этом характеризуются самой большой эффективностью.

2. Организация дней открытых дверей (x_{11}). Дни открытых дверей проходили два раза в год во II и IV квартале. Каждый раз были достаточно эффективны.

3. Баннерная реклама вуза в сети Интернет (x_3). Подавалась вузом также во II и IV квартале. Характеризуется высокой интенсивностью.

4. Размещение информационных плакатов в школах (x_9). Проводилось только во II квартале, и также было достаточно эффективно.

Как видно из рис. 1, основная часть средств направляется на финансирование рекламных каналов, не обеспечивающих высокого уровня привлечения абитуриентов. Так, на участие в образовательной выставке (x_7) направляется 66,34% рекламного бюджета. Эффективность данного вида мероприятий небольшая ($\alpha_{1,7}$.=0.01, $\alpha_{4,7}$ = 0,02) На организацию поездок по школам (x_6) денег практически не выделялось, хотя эффективность данного мероприятия в 3 квартале значительна $\alpha_{3,6}$ = 0,2.

Мало расходуется средств и на баннерную рекламу при достаточной эффективности данного вида рекламы ($\alpha_{2,3}$ = 0,1; $\alpha_{4,3}$ = 0,1).

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что задача эффективного распределения средств на рекламные мероприятия является актуальной для рассматриваемого вуза.

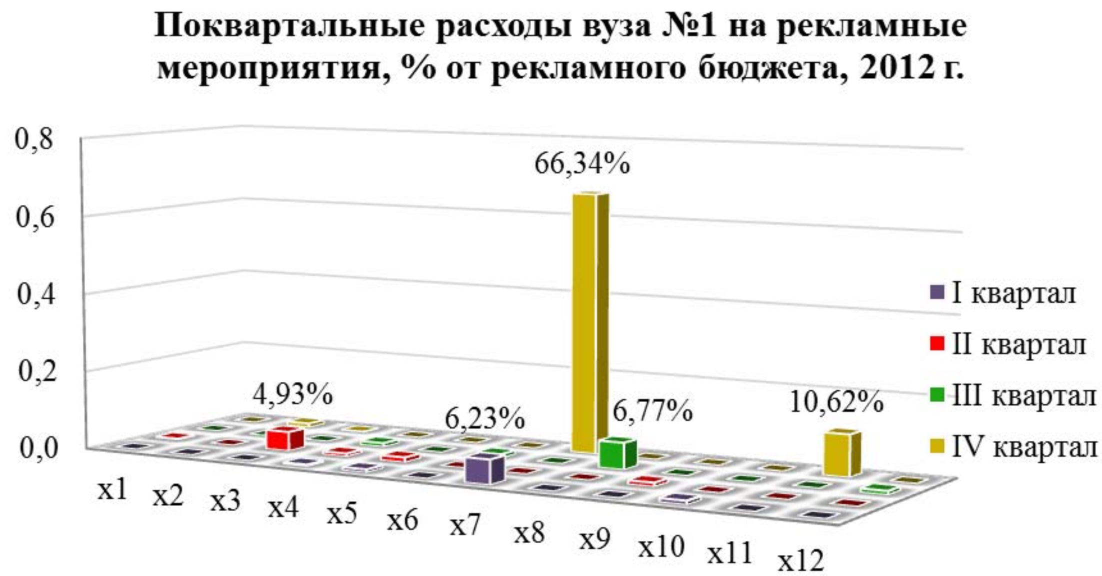

Рис. 1. Реальные поквартальные расходы вуза №1 на рекламные мероприятия, (в процентах от рекламного бюджета).

Решение оптимизационной задачи получено с использованием программного пакета MS Excel. Результаты представлены в табл.2.

Как показывает анализ, в случае небольшого вуза, расположенного на окраине города, наряду с рекламой в Интернете, должно уделяться повышенное внимание к рекламной работе в районных школах и проведению мероприятий с абитуриентами, поскольку эффективность такой деятельности в данном случае высока.

Аналогичное исследование было проведено для вуза 2. По сравнению с вузом 1 данный вуз является более престижным учебным заведением, т.к. он расположен в центре города, поэтому его оптимальная рекламная политика должна существенно отличаться.

Таблица 2

Оптимальное распределение затрат вуза 1 по видам рекламы, (% от рекламного бюджета)

Вид рекламы	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
x_1		2,5		
x_2				2,5
x_3		10,0		10,0
x_4		5,0	5,0	
x_5	2,5	2,5		
x_6			10,0	
x_7	5,0			5,0
x_8	1,0		1,0	1,0
x_9		14,5		
x_{10}	10,0			
x_{11}		5,0		5,0
x_{12}			2,5	

Проведенный анализ показателей эффективности рекламных мероприятий позволил выделить следующие наиболее важные рекламные мероприятия, проводимые вузом 2:

1. Оптимизация сайта в сети Интернет (x_{10}),
2. Баннерная реклама (x_3),
3. Размещение объявлений в журналах и газетах (x_4),
4. Реклама в специализированных справочниках (x_5).

Для вуза 2 была также решена задача оптимизации, основные результаты которой представлены в табл.3.

Таблица 3

Оптимальное распределение затрат вуза 2 по основным видам рекламы, (% от рекламного бюджета).

Вид рекламы	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
x_3		15		15
x_4		5	10	
x_5	10	10		
x_{10}	15			
Другие виды рекламы	5	5	5	5

Как видно из табл.3, для вуза 2 основные рекламные вложения должны быть сделаны в Интернет-рекламу, т.к. в данном случае она является наиболее эффективной.

Полученные результаты показывают, что применение оптимизационной модели для рассмотренных вузов позволило им увеличить эффективность вложения средств в рекламную деятельность более чем в два раза. Кроме того, на основе полученных решений могут быть разработаны рекомендации по оптимизации распределения рекламного бюджета с целью повышения эффективности вложенных средств.

Литература

1. Грачева С.С., Късовска С.В. Модель оптимального распределения рекламного бюджета вуза // Информационные и коммуникационные технологии в образовании, науке и производстве. VI Международная научно-практическая конференция. В 2-х частях. Протвино: Управление образования и науки г. Протвино. 2012. С. 334–336.
2. Грачева С.С., Късовска С.В. Оценка экономической эффективности рекламной стратегии компании // Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции. – М.: МИЭМ, 2012. С. 521–523.
3. Грачева С.С., Късовска С.В. Оптимизация эффективности кампании политики вуза. // Математико-статистический анализ социально-экономических процессов: Межвузовский сборник научных трудов. Выпуск 10. Московский государственный университет экономики, статистики и информатики.- М., 2013. С. 29–33.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. – М: Айрис-пресс. 2002. – 576 с.
5. Каверина Е.А. Организация рекламной деятельности вуза. Учебное пособие. – СПб.: ООО «Книжный Дом», 2007. – 184 с.

Аннотации

Клейнер Г.Б. Паттерн-модель функционирования экономики в системном ракурсе / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 9–23.

В статье предлагается структурно-функциональная модель функционирования экономики, рассматриваемой в контексте обобщенной системной парадигмы Я. Корнаи. Модель отражает функционирование экономики как процесса обращения экономических благ (продуктов), создаваемых и потребляемых экономическими системами различного уровня. Представлена схема взаимодействия типовых экономических систем, благ и процессов в ходе создания, распределения, обмена и потребления благ, а также обобщенные производственные функции, призванные отражать факторы и результаты этих процессов.

Андрюшкевич О.А., Денисова И.М. Особенности формирования национальных инновационных систем / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 24–48.

Анализируется процесс формирования национальной инновационной системы как экономики нового типа, основанной на знаниях и сменяющей предыдущие модели развития. На примере отдельных стран показаны особенности становления евроатлантической, восточноазиатской и альтернативной моделей, а также модели «тройной спирали».

Трофимова Н.А., Крапивина Т.А. Моделирование влияния факторов на динамику социального капитала / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 49–64.

В статье рассматривается проблема моделирования факторов, существенно влияющих на динамику социального капитала в регионах. Для решения поставленной задачи использовались методы многомерного анализа данных, а также методы эконометрического анализа. На основе проведенного исследования было установлено, что рост социального капитала в обществе зависит от уровня социально-экономических условий и демографической ситуации в регионах, а сам социальный капитал накапливается в большей степени во время обучения в учебных заведениях.

Смоляк С.А. Оценка износа машин, подвергающихся случайным отказам / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 65–81.

Метод дисконтированных денежных потоков применен к задаче стоимостной оценки износа подержанных машин и оборудования с учетом случайных отказов. Построенная модель позволяет оценивать износ машин с учетом их возраста и надежности.

Булавский В.А., Калашников В.В., Калашникова Н.И. Равновесия с согласованными предположениями в смешанной олигополии с разрывной функцией спроса / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 82–96.

В статье рассматривается понятие равновесий с предположениями в модели олигополистического рынка однородного продукта, функция спроса в которой не обязательно непрерывна. Агенты рынка допускают предположения о флуктуации равновесной цены как функции вариаций их собственных объемов выпуска продукта. Для произвольного набора допустимых предположений доказывается существование и единственность равновесия с предположениями (называемого внешним равновесием). Для того чтобы ввести понятие внутреннего равновесия, предлагается критерий согласованности предположений (или, что то же, коэффициентов влияния) и доказывается теорема существования такого равновесия, под которым понимается внешнее равновесие с согласованными предположениями. Далее, исследуется монотонное поведение согласованных предположений как функций параметра, представляющего везде (кроме точек разрыва функции спроса) производную этой функции по рыночной цене продукта.

Ефимов Б.А. О периодических решениях динамических систем, связанных с равновесием по Нэшу бескоалиционных игр / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 97–111.

Рассматривается связь между динамическими системами и играми двух лиц. Доказано существование локально устойчивого равновесия по Нэшу при наличии периодического решения в динамических системах, связанных с играми. При этом роль трения играет “отвращение к риску” игроков, а колебание маятника соответствует колебанию социальной среды. В заключении рассматривается игра между врачом и пациентом. Предлагается идея измерения когнитивного диссонанса в этой игре с помощью равновесия по Нэшу.

Белкина Т.А., Конюхова Н.Б. Асимптотические представления функции Беллмана и оптимальные стратегии в модели управления процессом риска / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 112–125.

Для классического процесса риска, возмущенного диффузией, исследованы асимптотические представления оптимальной стратегии инвестиций и функции Беллмана: при малых значениях капитала в общих предположениях относительно распределения выплат и при больших значениях – в предположении об экспоненциальном распределении. Показано, что в то время как в области малых значений структура оптимального управления существенно меняется по сравнению со стратегией в классической модели, в области больших значений это различие нивелируется, и асимптотические представления в обеих моделях совпадают.

Беленький В.З., Милкова М.А. Вычислительная система TAYLOR, версия V4.0: возможности и примеры / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 126–141.

В статье представлена вычислительная система TAYLOR-4, которая является итоговой версией системы TAYLOR. Система TAYLOR-4 позволяет с помощью оригинальных рекуррентных алгоритмов на основе формул дифференциального исчисления получать разложение функций, заданных различными способами, в ряд Тейлора, а также решать некоторые типичные и специальные задачи. Основное внимание уделено изложению принципов работы с системой TAYLOR-4, представленной в виде .dll библиотеки.

Грачева С.С. Задача оптимального распределения средств на рекламные мероприятия с учетом специфики вуза / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. С. 142–149.

В данной работе рассмотрена задача оптимального распределения средств на рекламную кампанию вуза. Задача решается в условиях ограниченного рекламного бюджета с учетом эффективности проводимых рекламных мероприятий. В качестве примера рассматривается нахождение решения данной задачи для двух различных московских вузов.

Abstracts

Kleiner G.B. Pattern model of the economy as a system perspective

The paper proposes a structural-functional model of the economy, considered in the generalized system paradigm by J. Kornai framework. The model reflects the functioning of the economy as the circulation process of economic goods (products) produced and consumed by economic systems at different levels. A scheme of the interaction of economic systems, processes and goods in the creation, distribution, exchange and consumption of goods, as well as generalized production functions designed to reflect the factors and the results of these processes are proposed.

Andryushkevich O.A., Denisova I.M. Peculiarity of creating national innovation systems

The process of creating a national innovation system as the economy of a new type which is based on knowledge and replaces previous models of development is analyzed. The examples of some countries show the peculiarities of the Euro-Atlantic, Eastern-Asian, alternative models and "triple helix" model.

Trofimova N.A., Krapivina T.A. Modeling the factors influence on the dynamics of social capital

We solve the problem of modeling the factors that significantly affect the dynamics of social capital in the regions. We use such methods as methods of multivariate data analysis and methods of econometric analysis. On the basis of this study it was found that the growth of social capital in a society depends on the level of socio-economic conditions and demographic situation in the regions and the social capital accumulates to a greater extent during training in schools.

Smolyak S.A. Assessment of depreciation in equipment exposed to random failures

We solve the problem of valuation of the equipment item which is exposed to random failures. For this purpose we use non-traditional version of the discounted cash flows. The model built in the article reflects the effect of age and reliability of the equipment at its market value and depreciation.

Bulavski V.A., Kalashnikov V.V., Kalashnikova N.I. Equilibrium with the agreed assumptions in mixed oligopoly with a discontinuous function of demand

We study conjectured variations equilibrium (CVE) in a model of mixed oligopoly with not necessarily continuous demand functions. The agents’ conjectures concern the price fluctuations as functions of their production output variations. We establish the existence and uniqueness results for the conjectured variations equilibrium (called *exterior equilibrium*) for any set of feasible conjectures. To introduce the notion of *interior equilibrium*, we develop a consistency criterion for the conjectures (referred to as *influence coefficients*) and prove the existence theorem for the interior equilibrium, understood as exterior equilibrium with consistent conjectures. Moreover, we examine the monotone behavior of the consistent conjectures as functions of a parameter representing the demand's derivative (where it exists) with respect to the market price.

Efimov B.A. On periodic solutions of dynamical systems related to the Nash equilibrium of noncooperative games

The relationship between dynamical systems and two-player games is considered. It is proved that the locally stable Nash equilibrium exists when such dynamical systems have periodic solutions. The "risk aversion" of players is regarded as friction, whereas the pendulum oscillations correspond to the variations in social environment. A game between a doctor and a patient is discussed in conclusion. An approach to measuring the cognitive dissonance on the basis of the Nash equilibrium is proposed for this game.

Belkina T.A., Konyuchova N.B. On asymptotic representations of the value function and the optimal strategy in the control problem for a risk process with diffusion perturbation

For the classical risk process with a diffusion perturbation, asymptotical representations of the optimal investment strategy and the value function are investigated. General assumptions about a claim size distribution for a small reserve are used. For a big reserve, the exponential claim size distribution is supposed. While for a small reserve the structure of the optimal strategy in this model and in the classical model are essentially different, for a big reserve this difference is leveled and the asymptotic representations in the both models are the same.

Belenky V.Z., Milkova M.A. Computer system TAYLOR-4: opportunities and examples

TAYLOR-4 is the final version of system TAYLOR, which allows to receive Taylor approximation (using the original recurrent algorithms) of functions defined in different ways. System also solves some of typical and special tasks.

Gracheva S.S. Optimal funds allocation in promotional activities which is specific for the universities

The paper is devoted the problem of optimal allocation of funds of an advertising campaign of the university. The problem is solved in a limited advertising budget, taking into account the effectiveness of promotional activities. As an example, we considered a solution to this problem for two different Moscow universities.

Авторы

Андрюшкевич Ольга Анатольевна
кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

Беленький Виталий Зиновьевич
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ЦЭМИ

Белкина Татьяна Андреевна
кандидат физ.-мат. наук, доцент, зав. лабораторией ЦЭМИ

Булавский Владимир Александрович
доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научн. сотрудник ЦЭМИ

Грачева Светлана Сергеевна
кандидат техн. наук, доцент НИУ «Высшая школа экономики»

Денисова Ирина Михайловна
кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

Ефимов Борис Александрович
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

Калашников Вячеслав Витальевич
доктор физ.–мат. наук, ведущий научный сотрудник ЦЭМИ

Калашникова Наталья Ивановна
Физико-математический факультет Автономного университета штата Новый Леон, Мексика

Клейнер Георгий Борисович
член корр. РАН, зам. директора ЦЭМИ

Конюхова Надежда Борисовна,
кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ВЦ РАН

Крапивина Татьяна Андреевна
аспирантка ЦЭМИ

Милкова Мария Александровна
научный сотрудник ЦЭМИ

Смоляк Сергей Абрамович
доктор экон. наук, главный научный сотрудник ЦЭМИ

Трофимова Наталия Аристарховна
кандидат экон. наук, доцент, старший научный сотрудник ЦЭМИ

ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2013 г.

Препринты. Новая серия

1. **Бендиков М.А., Колесник Г.В.** Конкуренция саморегулируемых организаций и эффективность рынков / Препринт # WP/2013/298. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 48 с. (Рус.)
2. **Ершов Д.М., Качалов Р.М.** Системы поддержки принятия решений в процедурах формирования комплексной стратегии предприятия / Препринт # WP/2013/299. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 60 с. (Рус.)
3. **Перминов С.Б., Егорова Е.Н., Вигриянова М.С., Абрамов В.И.** Макроэкономические ориентиры фондовых рынков стран БРИК / Препринт # WP/2013/300. – М.: ФГУН ЦЭМИ РАН, 2013. – 59 с. (Рус.)
4. **Татевосян Г.М., Седова С.В., Писарева О.М., Костромина Г.Г.** Обоснование инвестиционных программ химического комплекса / Препринт # WP/2013/301. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 64 с. (Рус.)
5. **Ушкова В.Л., Ильменская Е.М., Перфиличева Н.А.** Мониторинг научных результатов работников научно-исследовательского учреждения на примере ЦЭМИ РАН / Препринт # WP/2013/302. М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 25 с. (Рус.)
6. **Брагинский О.Б., Татевосян Г.М., Седова С.В., Писарева О.М., Куницына Н.Н.** Методология обоснования инвестиционных программ и их оптимизации при ограниченных финансовых ресурсах (на примере химического комплекса) / Препринт # WP/2013/303. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 81 с. (Рус.)
7. **Детнева Э.В., Терушкин А.Г.** Финансовая обеспеченность потребления и накопления валовым располагаемым доходом. Часть 2. Сектор-анализ / Препринт # WP/2013/304. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 56 с. (Рус.)
8. **Агафонов В.А.** Системные принципы стратегического планирования на региональном уровне / Препринт # WP/2013/305. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 73 с. (Рус.)
9. **Летенко А.В., Ставчиков А.И.** Современные проблемы модернизации российской экономики / Препринт # WP/2013/306. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 33 с. (Рус.)

Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Сборник пленарных докладов и материалов круглого стола Тринадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 10–11 апреля 2012 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 94 с.
2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий**. В 5 т. / Материалы Четырнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 9–10 апреля 2013 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 992 с.
3. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. К.А. Багриновского и Е.Ю. Хрусталёва. Вып. 5. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 147 с. (Рус.)
4. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 26. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 174 с. (Рус., англ.)
5. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 27. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 178 с. (Рус., англ.)
6. **Анализ и моделирование экономических процессов** / Сборник статей под ред. В.З. Беленького, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 155 с. (Рус.)

Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences
Publications

2013

Working papers

1. **Bendikov M.A., Kolesnik G.V.** Self-Regulatory Organizations Competition and Markets' Efficiency / Working paper # WP/2013/298. – Moscow: CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 48 p. (Rus.)
2. **Ershov D.M., Kachalov R.M.** Decision Support Systems within the Procedures of Complex Strategy Building / Working paper # WP/2013/299. – Moscow: CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 60 p. (Rus.)
3. **Perminov S.B., Egorova E.N., Vigrianova M.S., Abramov V.I.** Macroeconomic Targets Stock Markets of the BRIC Countries / Working paper # WP/2013/300. – Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 59 p. (Rus.)
4. **Tatevosian G.M., Sedova S.V., Pisareva O.M., Kostromina G.G.** Investment Programs of a Chemical Complex Substantiation / Working paper # WP/2013/301. – Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 64 p. (Rus.)
5. **Ushkova V.L., Ilmenskaya E.M., Perfilicheva N.A.** Monitoring Scientific Results of the Research Workers of the Scientific Enterprise on an Example of CEMI RAS / Working Paper # WP/2013/302. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 25 p. (Rus.)
6. **Braginsky O.B., Tatevosian G.M., Sedova S.V., Pisareva O.M., Kunitsyna N.N.** Methodology Study of Investment Programs and Their Optimization with Limited Financial Resources (for example, the chemical industry) / Working Paper # WP/2013/303. – M.: CEMI RAS, 2013. – 81 p. (Rus.)
7. **Detneva E.V., Terushkin A.G.** Financial Provision of Consumption and Accumulation by the Gross Disposable Income. Part 2. Sector-analysis / Working Paper # WP/2013/304. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 56 p. (Rus.)
8. **Agafonov V.A.** System Principles of Strategic Planning at a Regional Level / Working paper # WP/2013/305. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 73 p. (Rus.)
9. **Letenko A.V., Stavtchikov A.I.** Contemporary Problems of Russian Economy Modernization / Working paper # WP/2013/306. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 33 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Materials. Thirteenth Russian Symposium. Moscow, April 10–11, 2012. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 94 p.
2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises**. 5 issues / Materials. Fourteenth Russian Symposium. Moscow, April 9–10, 2013. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 996 p.
3. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific works ed. K.A. Bagreenovsky, E.Yu. Khrustalyov. Issue 5. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 147 p. (Eng.)
4. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 26. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 174 p. (Rus., Eng.)
5. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 27. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 178 p. (Rus., Eng.)
6. **Analysis and Modeling of Economic Processes** / The Collection of Articles, ed. V.Z. Belenky, N.A. Trofimova. Issue 10. – Moscow: CEMI RAS, 2013. – 155 p. (Rus.)

ISBN 978-5-8211-0660-5

9 785821 106605

Заказ № 16 Объем 9,7 п.л. Тираж 80 экз.

ЦЭМИ РАН