

Учреждение Российской академии наук  
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE

РОССИЙСКАЯ  
АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN  
ACADEMY OF SCIENCES

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сборник статей

Выпуск 7

Москва  
2010

**Анализ и моделирование экономических процессов.** Сборник статей под ред. В.З.Беленького, выпуск 7. – М.: ЦЭМИ РАН, 2010. – 161 с. (рус).

Коллектив авторов: **О.А.Андрюшкевич, В.З.Беленький, Т.А.Белкина, С.В.Буравлев, М.А.Гаврилова, И.М.Денисова, Л.Я.Клеппер, Н.Б.Конюхова, Е.С.Паламарчук, И.В.Роговина, С.А.Смоляк, Н.А.Трофимова, В.М.Четвериков.**

Седьмой выпуск ежегодного Сборника продолжает серию, начатую в 2004 году. Как и прежде, выделено четыре тематических раздела: "Анализ реальных экономических процессов", "Модели финансовых и рыночных механизмов", "Динамические модели", "Дискуссии, заметки и письма". Всего представлено 10 статей.

**Analysis and modelling of economic processes.** The Collection of Articles, ed. V.Z.Belenky, issue 7. – Moscow: CEMI, Russian Academy of Sciences, 2010. – 161 p. (Rus).

The seventh issue of annual Collection of articles prolongs the series beginning in 2004. Four sections are share out: "Analysis of of actual economic processes", "Modelling of financial and market mechanisms", "Dynamic models", "Discussions, Notes and Letters". As a whole ten articles are presented.

Ответственный редактор – доктор физ.-мат. наук, проф. В.З.Беленький

Рецензенты:

доктор экономических наук, проф. Ю.Н.Гаврилец  
доктор экономических наук, проф. В.А.Волконский

Редактор И.А.Левина

ISBN 978-5-8211-0548-6

© Учреждение Российской академии наук  
Центральный экономико-математический институт РАН  
2010 г.

## Содержание

От редактора ..... 6

### Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов

**Андрюшкевич О.А., Денисова И.М.** Особенности становления в России государственно-частного партнерства ..... 7

1. Необходимые условия развития ГЧП
2. Примеры проектов ГЧП
3. ГЧП и финансовый кризис

**Буравлев С.В., Трофимова Н.А.** Риск потери деловой репутации: его значение и методы управления ..... 39

1. Понятие риска потери деловой репутации
2. Факторы риска деловой репутации
3. Система управления РПДР

### **Роговина И.В.**

Применение трехкомпонентного индекса Тейла для оценки экономического неравенства субъектов РФ ..... 57

1. Индекс Тейла
2. Применение к субъектам РФ  
Дополнение редактора

### Раздел 2. Модели финансовых и рыночных механизмов

### **Смоляк С.А.**

Модели оценки износа машин и оборудования – II ..... 69

1. Постановка задачи
2. Модель износа машины
3. Учет технического прогресса
4. Применение к установлению коэффициентов годности

<b>Четвериков В.М.</b> Механизмы компенсации рисков потерь при долевом участии в инвестировании проектов.....	83
1. Моделируемая ситуация	
2. Детерминированная модель без привлечения кредитов	
3. Механизмы компенсации при возможном прогнозируемом снижении предстоящих доходов	
4. Механизм компенсации в вероятностной модели	

### **Раздел 3. Динамические модели**

<b>Белкина Т.А., Гаврилова М.А.</b> Асимптотики вероятности разорения в классической модели страхования с фиксированным объемом средств в форме акций.....	103
1. Описание модели и постановка задачи	
2. Дифференциальное уравнение для вероятности неразорения	
3. Исследование асимптотики при $r > 0$	
4. Исследование асимптотики при $r = 0$	

<b>Белкина Т.А., Конюхова Н.Б.</b> О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования капитала в безрисковый актив.....	113
1. Описание модели и постановка задачи	
2. Сведение к сингулярной задаче Коши для ОДУ с отклоняющимся аргументом	
3. Исследование сингулярной задачи	
4. Окончательный результат для исходной задачи	

## **Паламарчук Е.С.**

Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при наличии случайных факторов .....	123
1. Описание модели и постановка задачи	
2. Сведение к стандартной задаче стохастического линейного регулятора	
3. Задача на бесконечном интервале времени	
4. Предмет дальнейших исследований	

## **Раздел 4. Дискуссии, заметки и письма**

### **Беленький В.З., Клеппер Л.Я.**

О дальнейших путях развития математических методов оптимизации дозовых полей для внутритканевой лучевой терапии злокачественных опухолей .....	137
1. Положение дел по обсуждаемой проблеме	
2. Принципиальные основы намечаемого пути дальнейшего развития	

### **Беленький В.З. Некоторые замечания и дополнения**

к теории однородных случайных процессов с независимыми приращениями .....	145
1. Стохастические процессы роста	
2. Инверсный пуассоновский процесс	
3. Анализ инверсного процесса	
4. Обсуждение	

Лист аннотаций .....	157
Annotation list .....	159
Об авторах .....	161

## От редактора

Эта рубрика по традиции сохраняется, хотя нового уже сказать нечего. Сборник живет в установившемся режиме, по-прежнему привлекая молодых авторов. Введение в последних выпусках дополнительного Раздела 4 "Дискуссии, заметки и письма" вполне оправдало себя – публикуемые в нем материалы расширяют тематику работ, ставят нерешенные вопросы.

Как всегда, я завершаю краткое вступительное слово концовкой: "Благодарю авторов за участие в Сборнике и желаю всем нам успехов в дальнейшей работе".

В.З.Беленький

## Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов

О.А.Андрюшкевич, И.М.Денисова

### **ОСОБЕННОСТИ СТАНОВЛЕНИЯ В РОССИИ ГОСУДАРСТВЕННО-ЧАСТНОГО ПАРТНЕРСТВА<sup>1</sup>**

В настоящее время в развитых и переходных экономиках успешно используются эффективные формы делового сотрудничества бизнеса и государства в виде государственно-частного партнерства (ГЧП или PPP - public-private partnership). ГЧП – это деловой и взаимовыгодный альянс между государством и частным бизнесом для реализации проектов, как правило, в общественно-значимых сферах экономики и заключенный на ограниченный период времени. Принципиальное различие ГЧП от других моделей взаимодействия частного бизнеса и государства состоит в том, что в нем используется особый характер прав пользования и прав собственности объектом, позволяющий внедрить более гибкие формы делового сотрудничества. Основное содержание ГЧП заключается в передаче бизнесу прав владения, пользования, управления объектом при сохранении права собственности за государством. Бизнесу передаются конкретные текущие хозяйственные проблемы: управление объектом, инвестирование, финансирование, вопросы кадровой политики, маркетинг. За государством остаются стратегические функции: ценообразование, тарифная политика, качество обслуживания пользователей, вопросы безопасности, экология.

К настоящему времени оформились определенные тенденции использования механизмов ГЧП в экономиках различного типа. В развитых странах ГЧП применяется для укрепления экономических, территориальных и социальных связей между частным бизнесом, государством и обществом в целом. В экономическом смысле ГЧП способствует модернизации и развитию инфраструктуры и транспорта (авто- и железные дороги, порты, аэропорты), энергетики, жилищно-коммунального хозяйства (водоочистка, мусоропереработка, электро-, тепло-, водоснабжение), здравоохранения (строительство, реконструкция и управление больничными учреждениями), культуры (реставрация памятников, строительство и реконструкция музейных комплексов), телекоммуникаций, инновационной сферы. Тем самым выполняется социальная функция ГЧП – частный бизнес не противопоставляется обществу, извлекая только выгоду от реализации проектов, а активно участвует в развитии

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-06-00154 и Российского гуманитарного научного фонда, проект 10-02-00271

социально-значимых объектов. В странах с переходной экономикой практика использования ГЧП не столь велика, как в развитых странах. Это объясняется рядом причин, главными из которых, на наш взгляд, являются слабость (иногда недоразвитость) рынка капитала, ограниченная покупательная способность потенциальных пользователей объектов ГЧП, отсутствие или слабость профильных рыночных институтов. Кроме того, практически отсутствует административный опыт новых форм управления на всех уровнях (государственный, региональный, муниципальный). С этими обстоятельствами связано иное целевое назначение ГЧП. Прежде всего, оно рассматривается как фактор экономического роста, способный привлечь на взаимовыгодной основе как отечественный, так и иностранный частный капитал. Поэтому проекты ГЧП здесь имеют ярко выраженную инвестиционную направленность и приобретают характер инвестиционных проектов, а гарантом финансовых и прочих рисков выступает государство. Данная направленность ГЧП особенно характерна для России. Кроме того, российское ГЧП отличается и другими особенностями, касающимися методов формирования партнерства, привлечения капитала и проч. Рассмотрим некоторые из них.

### *1. Необходимые условия развития ГЧП*

В России государственно-частное партнерство находится на стадии становления и в отличие от развитых стран иницируется государством. Основные положения о ГЧП представлены в «Программе социально-экономического развития Российской Федерации на среднесрочную перспективу (2006-2008 гг.)» [1]. Эта форма сотрудничества рассматривается как эффективный институт взаимодействия государства и бизнеса для формирования экономической политики, повышения инновационной активности, развития экономической и социальной инфраструктуры. Приоритетными направлениями являются:

- производственная и транспортная инфраструктура (строительство и эксплуатация дорог, электрических сетей, портов, трубопроводов);
- жилищно-коммунальное хозяйство;
- финансирование научных исследований, имеющих перспективы коммерциализации, развитие инновационной инфраструктуры;
- профобразование и переподготовка кадров;
- здравоохранение и социальные услуги;
- информационно-консультативная поддержка предпринимательской деятельности.

В настоящее время происходит формирование необходимых условий для развития ГЧП по двум направлениям: создается соответствующая норматив-



но-правовая база и новые организационные структуры. В рамках *первого направления* уже приняты федеральные законы «Об особых экономических зонах», «О концессионных соглашениях», «Об Инвестиционном фонде», ряд законодательных актов, касающихся порядка функционирования новых институтов развития, постановления и распоряжения Правительства РФ, законодательные документы регионального и муниципального уровней. В рамках *второго* - сформированы новые организационные структуры: Инвестиционный фонд РФ, способствующий проведению государственной инвестиционной политики и финансирующий общественно значимые инвестиционные проекты, совместно реализуемые частным бизнесом и государством; Российский банк развития и его региональные филиалы; Центр ГЧП при Внешэкономбанке; ОАО «Российская венчурная компания» и другие институты развития (см. табл.1).

Современные законодательные основы развития ГЧП начали формироваться с 2005 г. с принятием трех основных федеральных законов, упомянутых выше. К настоящему времени функционирование ГЧП регламентируется сводом законов и постановлений федерального уровня, относящихся к административному, гражданскому, бюджетному, налоговому, земельному законодательству. Его дополняют законодательные инициативы на региональном уровне. В качестве примера приведем принятый в 2006 г. Законодательным Собранием Санкт-Петербурга закон «Об участии Санкт-Петербурга в проектах ГЧП» и Постановление Правительства Санкт-Петербурга от 31.03.2009 г. №346 «О мерах по развитию государственно-частных партнерств в Санкт-Петербурге». Так, в законе 2006 г. устанавливается порядок и условия участия города в ГЧП, в том числе в концессионных соглашениях. Законом закрепляется существенное расширение прав собственности для участников соглашения, предусматривающее различные формы участия, включая переход объектов ГЧП в полную собственность города или партнера, временную собственность или получение права только на эксплуатацию объекта. Законы о ГЧП приняты также в Томской области, Дагестане, Алтае, Калмыкии, Удмуртии, Ставропольском крае, Кемеровской, Челябинской, Курганской областях. Сразу заметим, что принятие региональных законодательных инициатив было обусловлено практической необходимостью, поскольку федеральное законодательство по ряду моментов не отвечает насущным потребностям регионов.

Параллельно с формированием законодательной базы ГЧП были приняты законодательные акты, регулирующие функционирование особых экономических зон (ОЭЗ), как одного из способов и форм внедрения ГЧП. Действующая в этой сфере нормативно-правовая база включает 8 федеральных законов (из них основной – Закон №116-ФЗ «Об особых экономических зонах в Россий-

ской Федерации»), 13 региональных законов, 20 постановлений Правительства РФ, 13 соглашений между Правительствами РФ и органами местного самоуправления о создании ОЭЗ, а также более 37 приказов Министерства экономического развития РФ [2].

Таким образом, современная нормативно-правовая база, регламентирующая функционирование ГЧП, отражает сложившееся положение, при котором принятый свод законов регулирует ту или иную сферу деятельности изолированно друг от друга, не образуя целостной системы. Это приводит к громоздкой законодательной структуре, иногда с дублирующими функциями. Несовершенство существующей нормативно-правовой базы ГЧП – отличительная особенность текущего положения. Поэтому неслучайно сегодня все чаще дискутируются вопросы по реформированию действующего законодательства: высказываются критические замечания по поводу уже принятых законодательных актов, а также вносятся предложения по принятию новых законов.

В области развития существующего законодательства о ГЧП высказываются предложения по дальнейшему совершенствованию концессионного законодательства (устранение неоправданных запретов и ограничений, снижающих привлекательность проектов для рынка и повышающие их стоимость для государства, расширение залоговых прав концессионеров, изменение порядка возмещения издержек и т.п.), разработке законодательных инициатив о неконцессионных ГЧП, а также совершенствованию регионального законодательства [3,4].

В то же время неоднократно подчеркивается, что необходимо разработать единую концепцию ГЧП в России, которая нашла бы свое отражение в едином законе о ГЧП, в котором было бы дано определение, формы и методы функционирования, прописаны права и обязанности участников и т.п. [5,6,7]. На сегодняшний момент такого закона нет. Более кардинальными являются предложения о ликвидации пробела в российском законодательстве и принятии норм публичного права и публично-правовых отношений<sup>2</sup> [8]. Подобные предложения основываются на том факте, что в рамках ГЧП государство имеет особый статус и участвует в партнерстве не в своих интересах, а в интересах общества и с целью наиболее эффективного отправления публичной власти, сохраняя при этом позиции суверена. Подобные отношения не укла-

---

<sup>2</sup> Публичное право – часть системы действующего права, нормы которого направлены на защиту общего блага, связаны с полномочиями и организационно-властной деятельностью государства, с выполнением общественных целей и задач. П.п. регулирует отношения государства, его органов с гражданами, общественными объединениями, хозяйствующими структурами, отношения между государственными органами. [9].

дываются в нормы существующего гражданского права. Принятие норм публичного права позволит узаконить целый ряд публично-правовых отношений, включая публично-правовую собственность, нормы публичного интереса и т.п. Однако предложения подобного рода встречаются только в научной литературе и не имеют практического выхода.

Что касается законодательства об особых экономических зонах, то оно также нуждается в корректировке и доработке. Если говорить в целом, то основные направления реформирования – это регулирование предпринимательской деятельности внутри ОЭЗ, совершенствование регионального законодательства, а также согласование норм национального и международного права по ОЭЗ. Так, в федеральный закон об особых экономических зонах необходимо внести изменения в части предоставления полномочий региональным органам власти по созданию особых экономических зон регионального значения, а также определить четкие финансово-экономические условия и механизм долевого участия не только субъектов Федерации, но и муниципальных образований. В законе о концессионных соглашениях необходимо более четко проработать положения о дополнительных коммерческих и юридических правах потенциальных инвесторов, изменить некоторые нормативные ограничения и уровень рисков.

В годовом отчете ОАО ОЭЗ конкретизированы предложения по корректировке действующего законодательства: предлагается снизить минимальный порог инвестиций для вхождения в ОЭЗ, что позволит привлекать крупный и средний бизнес; разрешить производство научно-технической продукции как опытных, так и промышленных образцов; выделить дополнительные ресурсы на содержание и эксплуатацию созданных объектов инфраструктуры ОЭЗ; конкретизировать перечень нарушений, влекущих расторжение соглашения и лишение статуса резидента ОЭЗ и т.п. [2].

Таким образом, можно заключить, что, несмотря на большое количество и разнообразие законодательных инициатив в области ГЧП, пока не сложилась четкая структура нормативно-правовых актов, регламентирующая его функционирование в целом и применительно к различным сферам экономики. Практической реализации обсуждаемые в научной литературе предложения по совершенствованию законодательной базы пока не имеют.

В рамках *второго направления* развития ГЧП в России интенсивно формируется необходимая институциональная среда. Сегодня уже создано большое разнообразие финансовых и нефинансовых институтов ГЧП. Перечень основных институтов ГЧП, их цели и функции представлены в табл. 1. Проанализируем результаты деятельности некоторых из них.

Одним из первых институтов для государственной поддержки проектов общегосударственного значения, осуществляемых на условиях ГЧП, стал *Инвестиционный фонд РФ*, действующий с 2006 г. Основное направление проектов общегосударственного значения, получивших финансовую поддержку фонда, – реализация крупномасштабных проектов стоимостью не менее 5 млрд. руб., нацеленных на социально-экономическое развитие России и создание национальной инновационной системы. Поддерживаются и региональные проекты стоимостью не менее 500 млн. руб., направленные на социально-экономическое развитие субъектов РФ, предусматривающее создание объектов транспортной, коммунальной и энергетической инфраструктуры государственной и муниципальной собственности, а также реализацию инновационных проектов. Господдержка проектов из Фонда осуществляется в формах: прямое софинансирование, участие в акционерном капитале компании, использование системы государственных гарантий.

Первые годы работы выявили некоторые недостатки в структуре и принципах функционирования Фонда. Поэтому в дальнейшем были приняты меры по повышению качества оценки проектов на основе дополнительных критериев, а также новый механизм формирования источников финансирования Инвестиционного фонда.

В своей текущей деятельности Фонд осуществляет тесное взаимодействие с другим институтом развития – государственной корпорацией «Банк развития и внешнеэкономической деятельности (Внешэкономбанк)». По ряду региональных проектов последний выступает в качестве кредитора, соинвестора или финансового консультанта.

На конец 2009 г. распоряжениями Правительства РФ утвержден 21 инвестиционный проект, имеющий общегосударственное значение, для реализации которых предоставляется господдержка из средств Инвестиционного фонда (на 1 рубль средств Фонда привлекаемые средства инвестора составляют от 2 до 2.5 рублей). Более половины проектов направлено на строительство транспортной инфраструктуры: 7 проектов – на развитие автодорог, 3 проекта – строительство тоннелей и железнодорожных линий, 2 проекта – развитие водных систем, 6 проектов – на развитие региона или отдельных отраслевых комплексов (рассчитано по [10]).

В течение 2009 г. происходило интенсивное наращивание пакета заявок от субъектов РФ на реализацию региональных инвестиционных проектов за счет средств Фонда. Общее число заявок – 53, общая стоимость проектов около 173 млрд. руб., в том числе: за счет средств Фонда – около 29.3 млрд. руб.; за счет средств бюджетов субъектов РФ и местных бюджетов – 14 млрд. руб., средств частных инвесторов – около 130 млрд. руб. [11].

Что касается отраслевой структуры региональных проектов, то ее можно продемонстрировать на примере проектов, представленных на презентации в конце 2009 г. Так, из 13 проектов 5 направлено на строительство инженерных сетей, системы водо- и теплоснабжения, очистительных сооружений, только 1 – на создание индустриального парка.

Что касается ближайших перспектив развития Фонда, то в 2010 г. одним из приоритетных направлений его деятельности станет поддержка региональных инвестиционных проектов, направленных на диверсификацию экономики монопрофильных городов, что позволит решить обострившуюся проблему занятости. Значительная часть будущих проектов направлена на развитие обрабатывающих производств, транспортной инфраструктуры, жилищного строительства, сельского хозяйства. К сожалению, проекты инновационного развития в этом перечне отсутствуют. Более того, текущий финансовый кризис заставил пересмотреть стратегию развития Фонда. По старым проектам предлагается пересмотреть сроки их реализации или отменить те из них, которые предусматривают освоение отдаленных месторождений, поскольку они имеют большую транспортную составляющую и в наибольшей степени подвержены влиянию мировой конъюнктуры. Относительно новых проектов предлагается ориентироваться на те из них, которые обеспечивают получение конкретного результата в течение 3 лет, направлены на удовлетворение стабильного спроса, оказывают поддержку проблемным регионам и предусматривают создание значительного числа рабочих мест [12].

Таким образом, несмотря на заявленные в момент организации цели по стимулированию инновационного развития, в своей текущей деятельности Инвестиционный Фонд поддерживает в основном отраслевые проекты существующего экономического уклада, т.е. занимается «латанием дыр» и, по сути, сохранением устаревшей структуры экономики. Созданный как институт развития, Инвестиционный Фонд не способствует переходу к новой высокотехнологичной модели экономического развития. Поэтому в последнее время все чаще высказываются критические замечания по поводу эффективности работы Фонда. Так, отмечается факт коррупционного использования средств Фонда на проекты, имеющие заведомо завышенную стоимость [13].

Другим крупнейшим институтом ГЧП является Банк развития и внешнеэкономической деятельности (*Внешэкономбанк*), созданный путем реорганизации Банка внешнеэкономической деятельности СССР. Это корпорация, созданная на основе имущественного вноса Российской Федерацией, не имеющая банковской лицензии и не подчиняющаяся Банку России, хотя и выполняющая большинство банковских операций. Внешэкономбанк может предоставлять кредиты, займы, гарантии и поручительства, приобретать цен-

ные бумаги, осуществлять вложения в капиталы коммерческих организаций. Органы управления Внешэкономбанка формируются при участии государственных органов. При этом госорганы и органы местного самоуправления не вправе вмешиваться в оперативную деятельность Внешэкономбанка.

Внешэкономбанк действует в целях обеспечения повышения конкурентоспособности экономики Российской Федерации, ее диверсификации, стимулирования инвестиционной деятельности путем осуществления инвестиционной, внешнеэкономической, страховой, консультационной и иной деятельности.

Основными направлениями инвестиционной деятельности Внешэкономбанка являются:

- реализация инвестиционных проектов, направленных на устранение инфраструктурных ограничений экономического роста, включая развитие энергетической, транспортной инфраструктуры и инноваций, инфраструктуры жилищно-коммунального хозяйства, а также туризма;
- участие в реализации проектов, направленных на повышение эффективности использования природных ресурсов, охрану окружающей среды и улучшение экологической обстановки;
- участие в реализации проектов, направленных на развитие малого и среднего предпринимательства, посредством кредитования организаций и юридических лиц, осуществляющих их поддержку;
- поддержка экспорта промышленной продукции и услуг, в том числе в целях диверсификации национального экспорта (страхование экспортных кредитов или кредитных линий; финансовое содействие техническому перевооружению российских предприятий, выпускающих экспортную продукцию или работающих в сфере импортозамещения; содействие импорту товаров и технологий, не имеющих аналогов в России).

В первую очередь Банк оказывает поддержку следующим отраслям промышленности: авиастроение и ракетно-космический комплекс, судостроение, электроника, атомная промышленность, транспортное, специальное и энергетическое машиностроение, металлургия, деревообрабатывающая промышленность, оборонно-промышленный комплекс. После принятия в ноябре 2008 г. распоряжения Правительства РФ №1697-р список отраслевых приоритетов инвестиционной деятельности Банка пополнился агропромышленным комплексом, что позволило возобновить участие Банка в реализации проектов данного сектора экономики.

Внешэкономбанк как институт развития оказывает финансовую поддержку инвестиционным проектам, являющимся приоритетными для разви-

тия экономики, но не обеспеченными в полном объеме необходимыми ресурсами со стороны частного сектора, в том числе из-за высокой рискованности, длительных сроков окупаемости, сложности необходимых инструментов поддержки и т.п. Поддержку таких проектов Банк осуществляет как путем прямого предоставления кредитов и займов (в том числе совместно с частными финансовыми институтами), так и путем снижения рисков (предоставление гарантий, страхование кредитов и т. п.).

В марте 2008 г. Наблюдательный совет одобрил участие Внешэкономбанка в реализации 11 проектов на сумму 140 млрд. рублей, в том числе:

- проект создания лесоперерабатывающего комплекса в Богучанском районе Красноярского края в рамках инвестиционного проекта «Комплексное развитие Нижнего Приангарья» мощностью 800 тыс. тонн целлюлозы в год. Внешэкономбанк инвестирует в строительство 40 млрд. руб.;
- проект создания в Зеленограде производства субмикронных полупроводниковых компонентов с топологическими нормами 0.11-0.13 мкм, реализуемом ОАО «Ангстрем-Т». Банк открывает кредитную линию для финансирования проекта в размере 915 млн. евро сроком на 9 лет;
- комплексная программа сотрудничества с ОАО «Объединенная авиастроительная корпорация» для создания научно-производственного авиастроительного кластера на базе ЦАГИ (г. Жуковский, Московская область);
- проект развития инфраструктуры промышленных парков в Калужской области общей стоимостью 6.4 млрд. руб. сроком 10 лет. На территории парков будут размещены производства стратегических инвесторов – Volkswagen, Volvo Truck, Peugeot-Citroen, а также производителей автокомпонентов, с общим объемом инвестиций 100 млрд. руб. [14].

По состоянию на 01.10.2009 г. отраслевая структура инвестиционных проектов, рассмотренных органами управления Банка, выглядит следующим образом: 25.2% - развитие инфраструктуры; 25.2% - развитие инноваций; 24.5% – повышение эффективности использования природных ресурсов; 10.3% - поддержка экспорта; 5.9% - олимпийские объекты; 3.1% - национальные проекты; 2.4% - прочее [15].

Одним из перспективных направлений деятельности Внешэкономбанка является развитие стратегического партнерства и долгосрочного сотрудничества с российскими регионами. Внешэкономбанком подписаны Соглашения о сотрудничестве с правительствами и администрациями Красноярского и Краснодарского краев, Сахалинской, Оренбургской, Ульяновской, Рязанской, Кировской, Мурманской, Курганской, Свердловской, Воронежской, Волго-

градской, Вологодской, Тамбовской областей, Чеченской, Чувашской Республик, а также с Правительством Республики Коми. Соглашения предусматривают развитие сотрудничества по широкому кругу экономических, финансовых и социальных вопросов, обслуживание товарно-финансовых потоков регионов и участие в реализации региональных экономических программ. Приоритетными являются инвестиционные проекты в реальном секторе экономики: топливно-энергетический комплекс, строительство жилья, производственных объектов, авиа- и судостроение, электроэнергетика, сельхозпереработка, гостиничный бизнес и т.п. Внешэкономбанк оказывает содействие регионам в разработке схем финансирования их инвестиционных проектов как за счет собственных средств, так и за счет международных финансовых организаций; проводит экспертную оценку предложения иностранных банков, кредитных и финансовых компаний, а также оказывает консультационные услуги и проч.

По состоянию на 01.10.2009 г. региональная структура инвестиционных проектов, рассмотренных органами управления Банка, выглядит следующим образом: 38.2% - Центральный федеральный округ, 15.8% - Сибирский федеральный округ, 11.8% - Приволжский федеральный округ, 10.8% - Южный федеральный округ, 10.2% - Уральский федеральный округ, 8.9% - Северо-Западный федеральный округ, 4.3% - Дальневосточный федеральный округ [15].

Еще одной сферой деятельности Банка является оказание гарантийной поддержки экспорта промышленной продукции и услуг. Такая форма поддержки позволяет российским экспортерам участвовать в экспортных проектах в тех странах, которые характеризуются высоким уровнем политического риска, имеются объективные препятствия для реализации контрактов, а также там, где не представлены российские коммерческие банки. Предоставляя экспортное финансирование, Банк осуществляет поддержку своих клиентов на всех этапах проектов, а также открывает новые возможности для выхода российских экспортеров на зарубежные рынки. Планируемый объем осуществляемых Внешэкономбанком гарантийных операций в 2008-2012 гг. составит порядка 9.46 млрд. долл. (из них на цели поддержки экспорта промышленной продукции и услуг – порядка 5.7 млрд. долл.). Объем государственной гарантийной поддержки экспорта к 2012 г. должен составить 0.3- 0.35% внутреннего валового продукта [16].

Несмотря на то, что финансовая поддержка инвестиционных проектов осуществляется сегодня двумя крупнейшими институтами развития – Инвестиционным Фондом РФ и Внешэкономбанком – по ряду проектов приоритет принадлежит последнему. Так, доля финансирования Банка в реализации



проекта строительства нового выхода на МКАД скоростной магистрали Москва – Санкт-Петербург (15 - 58 км) составляет 52.5%; проект строительства железнодорожной линии Элегест – Кызыл – Курагино в республике Тыва – 95.0%; проект развития промышленного производства в Нижнем Приангарске – 55.2% [13]. Более того, некоторыми экономистами разделяется точка зрения на то, что сегодня ведущую роль в развитии ГЧП стал играть именно Внешэкономбанк. Ему принадлежит ключевая роль в создании инфраструктуры ГЧП, в первую очередь, через механизм предоставления финансовых гарантий [5].

В 2008 г. при Внешэкономбанке был создан *Центр ГЧП* как структурное подразделение банка. Его основная задача - оказание квалифицированной помощи органам государственного и муниципального управления (ОГМУ) по применению инструментов ГЧП при реализации стратегий отраслевого, регионального или городского развития. Его основные функции сводятся к поддержке реализации проектов ГЧП, созданию условий для реализуемых проектов, консультированию ОГМУ, подготовке (совместно с ВУЗами) квалифицированных кадров по вопросам ГЧП, обеспечению нормативно-правовой и методологической поддержки.

*ОАО «Российская венчурная компания» (РВК)*. Если предыдущие институты развития способствовали реализации инвестиционных проектов в различных секторах экономики, включая инновационный, то РВК непосредственно ориентирована на реализацию инновационных проектов, начиная с первоначальной стадии разработок. Компания создана в 2006 г. с целью стимулирования создания в России собственной индустрии венчурного инвестирования, развития инновационных отраслей экономики и продвижения российских наукоемких продуктов на мировые рынки.

РВК действует по принципу «фонда фондов»: она не занимается отбором конкретных инвестиционных проектов и венчурных компаний для инвестирования своих средств, а привлекает для этого профессиональные управляющие компании. Такой принцип работы выбран во избежание образования коррупционных связей. На первом этапе на РВК были возложены две основные функции: отбор лучших венчурных управляющих компаний на конкурсной основе и приобретение паев венчурных фондов, создаваемых этими компаниями (не более 49%). А уже средства венчурных фондов, в свою очередь, направляются на инвестиции в инновационные высокотехнологические компании, находящиеся на ранней стадии развития и деятельность которых соответствует приоритетным направлениям инвестирования. Таким образом, РВК выполняет роль катализатора инвестиций; минимальный размер инвестиций в отдельный венчурный фонд – 600 млн. руб., максимальный – 1500 млн. руб.

Направления инвестирования средств венчурных фондов – это высокотехнологичные инновационные проекты с высокой добавочной стоимостью, в том числе в сфере биотехнологий, нанотехнологий, информационно-технологических систем, авиационных и космических систем, энергетики и энергосбережения.

Приоритетные направления инвестирования создаваемых с участием РВК венчурных фондов определены в соответствии со списком критических технологий, утвержденных Президентом РФ: безопасность и противодействие терроризму; живые системы (биотехнологии, медицинские технологии и медицинское оборудование); индустрия наноносителей и материалов; информационно-телекоммуникационные системы; рациональное природопользование; транспортные, авиационные и космические системы; энергетика и энергоснабжение. Одновременно запрещено инвестирование в «индустрии порока» (производство и распространение алкогольных напитков, табачных изделий, эротической продукции; организация и проведение азартных игр) и традиционные отрасли (добыча, производство и переработка полезных ископаемых и энергоносителей); производство и распределение электроэнергии, за исключением разработки и использования технологий экологически чистого извлечения энергии; розничную и оптовую торговлю; производство товаров народного потребления, за исключением разработки новых продуктов; капитальное строительство.

При формировании РВК использовался израильский опыт по разработке программы «Йозма». Однако в принцип работы РВК были внесены некоторые изменения: увеличен объем капитала, утверждена более низкая ставка доходности, отбор венчурных фондов происходит на открытых конкурсах.

В настоящее время по итогам двух конкурсных отборов сформированы 7 венчурных фондов общим объемом 18983 млрд. руб. (49% - доля РВК, 51% - средства частных инвесторов):

1. ВТБ – Фонд венчурный: объем фонда – 3.061 млрд. руб., управляющая компания – ВТБ Управление активами;
2. Биопроцесс Кэпитал Венчурс: 3 млрд. руб., Биопроцесс Кэпитал Партнерс;
3. Максвелл Биотех: 3.061 млрд. руб., Максвелл Эссет Менеджмент;
4. Лидер – Инновации: 3 млрд. руб., Лидер;
5. Тамир Фишман Си Ай Джи: 2 млрд. руб., ЦентрИнвест;
6. Новые технологии: 3.061 млрд. руб., Альянс РОСНО Управление Активами;
7. С. Групп Венчурс: 1.8 млрд. руб., Север Эссет менеджмент.

В октябре 2009 г. создано ООО «Фонд посевных инвестиций» Российской венчурной компании» при участии ОАО РВК (99%) и Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической среде (1%) с объемом средств 2 млрд. руб. Фонд ориентирован на инвестирование в российские инновационные компании с высоким потенциалом роста на российском и зарубежных инновационно-технологических рынках. Основными задачами Фонда являются: стимулирование развития в России сектора посевных инвестиций с целью максимального вовлечения профессиональных управляющих, экспертов и бизнес-ангелов в процесс создания новых технологических компаний; создание условий для формирования непрерывного потока сделок в венчурные фонды, в том числе созданные с участием средств ОАО РВК; значительное увеличение количества и качества малых технологических бизнесов, претендующих впоследствии на получение инвестиций венчурных инвесторов и фондов ранней стадии.

Фонд осуществляет соинвестирование средств совместно с частными инвесторами и предоставляет не более 75% от объема инвестиционной потребности и не более 25 млн. руб. на первом этапе инвестирования. Особый механизм ГЧП здесь состоит в предоставлении частных и бюджетных средств не на уровне фонда, а на уровне проекта. Деятельность Фонда осуществляется при участии Венчурных партнеров и инициаторов посевных инвестиций, имеющих доступ к научным, материально-техническим и финансовым ресурсам, необходимым для обеспечения деятельности венчурных партнеров.

Первыми Венчурными партнерами Фонда посевных инвестиций стали шесть компаний: ООО «Элементарные частицы»; ООО «Инвенчур»; ООО «Управляющая компания «Альфа-Капитал»; ЗАО «Центр корпоративных решений»; НП Ассоциация бизнес-ангелов «Стартовые инвестиции»; ООО «Минерва Кэпитал Партнерс».

В настоящее время при участии Фонда реализуется проект «Опора – кредит», целью которого является содействие малому предпринимательству в получении адресной поддержки государства в виде налоговых и иных льгот, увеличения финансовой поддержки, упрощения процедуры доступа к госзаказу и др. В рамках данной программы разрабатываются 127 инвестиционных проектов, относящихся к различным отраслям экономики (услуги, сельское хозяйство, электроэнергетика, строительство и проч.). Из общего количества инвестиционных проектов, к сожалению, не более десятка относятся к инновациям.

Помимо общероссийских венчурных фондов сформированы 23 региональных венчурных фонда в субъектах РФ. Структура активов Фондов скла-

дывается из средств федерального бюджета (25%), средств бюджета региона (25%) и вложений частных инвесторов (50%).

По состоянию на март 2009 г. отраслевая структура инвестиций РВК выглядела следующим образом: 21% - рациональное природопользование, 19% - технологии создания и обработки кристаллических материалов, 16% - энергетика и энергоснабжение, 19% - технологии производства программного обеспечения, 9% - технологии обработки, хранения, передачи и защиты информации, 8% - авиационные и космические системы, 14% - информационно-телекоммуникационные системы, 4% - нанотехнологии и наноматериалы [18].

Сравнительно недавно деятельность РВК была проверена Генеральной прокуратурой РФ. В ходе проверки было выявлено, что средства, перечисленные компанией в венчурные фонды, расходовались неэффективно. Так, в 2007-2008 гг. было сформировано 6 закрытых паевых инвестиционных фондов особо рискованных инвестиций, в которые внесено 8.5 млрд. руб., из которых РВК - 4.1 млрд. руб. При этом 6 млрд. руб. было размещено фондами на депозитах в банках. На приобретение ценных бумаг компаний (долей в уставных капиталах) в течение 2 лет было потрачено 1.7 млрд. руб. Почти половина этих организаций образована совместно с иностранными юридическими лицами [19]. В ряде случаев денежные средства, предназначенные для развития инновационной экономики РФ, перечислялись в США на счета зарегистрированных там компаний. При этом уставной капитал некоторых из них минимален, а в одной на момент проверки работал только один человек.

Проверка показала, что в настоящее время ОАО РВК и созданные с его участием фонды не заинтересованы в реализации венчурных проектов, так как размещение денежных средств на депозитных счетах в банках приносит гораздо большую прибыль. Так, по состоянию на 20 января 2009 г. на депозитах было размещено 85% ее уставного капитала. Получая стабильный доход от размещения средств на депозитах (за 2008 г. он составил более 2.5 млрд. руб.), а также имея возможность самостоятельно распоряжаться прибылью, РВК не была заинтересована в осуществлении иной деятельности. Фактические расходы на собственные нужды компании за 2007 г. составили 107 млн. руб. с фондом оплаты труда в сумме 36 млн. руб. при штатной численности на 1 января 2008 г. – 35 человек. Свыше 4 млн. руб. общество израсходовало на добровольное страхование работников и членов их семей. Доход генерального директора за 2007 – 2008 гг. составил более 8 млн. руб., а сумма вознаграждения трех членов Совета директоров превысила 16 млн. руб. [19].

Результатом проверки стала смена генерального директора компании, а также корректировка направлений деятельности и планов компании с учетом потребностей государства и рынка. Основное направление деятельности РВК

как института развития и поддержки инновационно-технологических компаний осталось без изменения. В то же время среди других институтов развития, поддерживающих инновации, РВК заняла свою нишу по оказанию помощи тем компаниям, которые уже прошли стадию НИОКР, но еще не вышли на уровень масштабных проектов, как, например, РОСНАНО. По словам нового генерального директора, РВК – это компания, работающая на горизонтальном рынке адекватными методами, в отличие от РОСНАНО как организации, функционирующей на вертикальном рынке [20].

В 2010 г. РВК планирует создать линейку отраслевых венчурных фондов – развитие биотехнологий и фармацевтики, электроники (разработка новых материалов, чипов, софта), точного машиностроения (робототехника), а также инфраструктурные фонды для инвестиций в компании, специализирующиеся на сервисных услугах. Объем каждого из фондов планируется в размере 1.5-3 млрд. руб. По словам нового генерального директора РВК, в ближайшей перспективе приоритетными станут задачи формирования партнерской сети компаний; интеграции РВК в международные венчурные рынки посредством реализации ряда международных проектов, включая привлечение участников международного венчурного рынка в Россию; совершенствования законодательной и нормативной базы, определяющей институциональную среду инновационно-технологического предпринимательства и т.п. [20].

Перечень первоочередных задач, поставленных перед РВК, свидетельствует о том, что, по сути, компания находится на начальной стадии развития и об эффективности ее работы говорить еще рано. Однако, по мнению генерального директора, при создании компании был предпринят уникальный по своей потенциальной эффективности шаг по внедрению рыночно-ориентированного государственного инструмента, действующего в горизонтальном срезе экономики. Во взаимодействии с вертикально-ориентированными государственными структурами, частным капиталом и предпринимательскими инициативами РВК становится примером эффективной матричной системы государственного управления, способным решать задачи в кратчайшие сроки и с оптимальными затратами [20]. Данное утверждение кажется нам преждевременным и крайне претенциозным.

*Особые экономические зоны (ОЭЗ)* в России являются примером нефинансового института развития ГЧП. Современный этап развития ОЭЗ начинается с июля 2005 г. после принятия основного закона, регулирующего порядок создания и функционирования зон. Целью создания ОЭЗ является развитие обрабатывающих отраслей экономики, высокотехнологичных отраслей, производства новых видов продукции, транспортной инфраструктуры.

Законом регламентируется создание четырех видов ОЭЗ:

- промышленно-производственных (ППЗ) (создаются на участках территории, которые имеют общую границу и площадь которых составляет не более 20 кв. км), цель – производство и (или) переработка товаров и их реализация;
- технико-внедренческих (ТВЗ) (создаются не более чем на двух участках территории, общая площадь которых составляет не более 3 кв. км). Цель – создание и реализация научно-технической продукции, доведение ее до промышленного применения, включая изготовление, испытание и реализацию опытных партий, а также создание программных продуктов, систем сбора, обработки и передачи данных, систем распределения вычислений и оказание услуг по внедрению и обслуживанию таких продуктов и систем;
- туристско- рекреационных (ТРЗ) (создаются на одном или нескольких участках территории, определяемых Правительством РФ). Цель - стимулирование, развитие и эффективное использование туристских ресурсов и объектов курортного лечения и отдыха, разработка и использование природных лечебных ресурсов;
- портовых (создаются на территории морских, речных портов и аэропортов). Цель – стимулирование развития портового хозяйства и портовых услуг.

Срок существования ОЭЗ – 20 лет (ОЭЗ портового типа – 49 лет).

По данным на ноябрь 2008 г. создано 13 ОЭЗ:

- 2 ППЗ (Республика Татарстан - ОЭЗ «Алабуга», Липецкая обл.- ОЭЗ « Липецк»),
- 4 ТВЗ (Москва-Зеленоград, Санкт-Петербург, Дубна, Томск),
- 7 ТРЗ (ОЭЗ на Кавказских Минеральных Водах – Ставропольский край, в Республике Алтай, в Республике Бурятия, в Иркутской области, в Краснодарском крае, в Алтайском крае, в Калининградской области),
- 3 ОЭЗ портового типа (в Ульяновской области - аэропорт, в Хабаровском крае - морской порт, в Красноярском крае - аэропорт).

По состоянию на 01.12.2009 г. в ОЭЗ зарегистрировано 207 резидентов, из которых 26 - резиденты ППЗ и 160 – резиденты ТВЗ; 26 резидентов приступили к выпуску продукции. Частные инвесторы ППЗ и ТВЗ вложили инвестиций на сумму 3.6 млрд. руб. [21]. Другие показатели деятельности ОЭЗ представлены в табл.2.

Как правило, создание инфраструктуры ОЭЗ осуществляется государством. На ее строительство за период 2008-2010 гг. планируется выделить более 30 млрд. руб., которые вносятся в уставной капитал ОАО «Особые эконо-

мические зоны» (100%-ное госучастие). В настоящее время ведется проектирование и строительство более 150 объектов инфраструктуры. По состоянию на 01.12.2008 г. затраты на создание инфраструктуры ОЭЗ составили 15.9 млрд. руб. [17].

По мнению руководителя Федерального агентства по управлению ОЭЗ А.А.Алпатова, в 2007 г. завершен первый этап создания ОЭЗ – этап формирования нормативной правовой базы и открытия «пилотных» зон. К настоящему времени в основном урегулированы земельно-имущественные вопросы и земельные участки, составляющие территорию ОЭЗ, переданы в управление и распоряжение РосОЭЗ, завершена разработка проектов планировок ОЭЗ и концепций их развития, проводится активное проектирование и строительство объектов инфраструктуры во всех ОЭЗ, а ППЗ и некоторые ТВЗ приступили к выпуску продукции (см. табл. 2).

В силу того, что не все ОЭЗ начали функционировать в полном объеме, о комплексных результатах их деятельности судить пока рано. В то же время Счетной палатой РФ и Генпрокуратурой РФ были отмечены негативные моменты деятельности ОЭЗ.

Счетной палатой РФ были выявлены случаи нецелевого и неэффективного использования бюджетных средств, направленных в ОЭЗ в 2007-2008 гг. Так, было отмечено, что РосОЭЗ не обеспечило своевременное и эффективное использование средств, выделенных из федерального бюджета на создание объектов инженерной и социальной инфраструктуры ОЭЗ. За период 2006-2008 гг. федеральное финансирование посредством взноса РФ в уставный капитал ОАО «Особые экономические зоны» составило 36.3 млрд. руб. При этом по состоянию на 1 января 2009 г. остаток неиспользованных бюджетных инвестиций составил 17.1 млрд. руб. [22].

В ходе проверки выявлено, что планы обустройства и соответствующего материально-технического оснащения ОЭЗ «Дубна» и «Зеленоград» были приняты несвоевременно, это привело к увеличению сроков строительства инфраструктуры объектов и снижению планируемых объемов инвестиций со стороны компаний-резидентов. Кроме того, бизнес-планы резидентов, представленные для заключения соглашения о ведении технико-внедренческой деятельности, в ряде случаев не содержали всей необходимой информации, включая сведений о результатах и опыте проведения научно-технической (инновационной) деятельности, правах на объекты интеллектуальной собственности, уровне обеспеченности кадрами и материально-производственной базой. Анализ бизнес-планов показал, что резиденты в основном не располагают собственными ресурсами для осуществления инве-

стиционных проектов, а используют заемные средства, что в условиях неблагоприятной экономической ситуации приводит к сдерживанию строительства.

В ходе проверки Генпрокуратурой РФ были установлены факты размещения средств, выделенных для развития ОЭЗ, под крайне низкие процентные ставки. Так, ОАО «Особые экономические зоны», единственным акционером которого выступает РосОЭЗ, хранило 5 млрд. руб. на депозитном вкладе под 3.5% и 5.5% годовых. ОЭЗ ТВТ «Дубна» размещало средства по депозитному договору под 3% годовых. Согласно данным Счетной палаты РФ, это значительно ниже средних ставок по аналогичным банковским операциям [19]. Кроме того, были выявлены нарушения графиков возведения объектов инженерной, транспортной, инновационной и иных инфраструктур. В ряде случаев не создавались необходимые условия для привлечения инвестиций предпринимателей - за два года деятельности ТВЗ в г. Москве зарегистрировано всего 11 предпринимателей, инвестировавших средства в ее развитие. При этом деятельность непосредственно на территории самой зоны осуществляет только один из них. Остальные предприниматели ведут экономическую деятельность вне ОЭЗ. Как сообщили в Генпрокуратуре, «несмотря на это, результаты деятельности всех 11 предпринимателей суммировались РосОЭЗом в качестве показателей успешной работы особой экономической зоны, что привело к искажению представления об эффективности развития и функционирования этой территории» [23]. Аналогичная ситуация наблюдалась и в ТВЗ г. Томска.

Отмеченные факты свидетельствуют о том, что российские особые экономические зоны как форма ГЧП еще не оформились в стройную организационную структуру, имеющую определенную систему управления и контроля, что приводит к необоснованным волюнтаристским решениям.

Таким образом, в настоящее время наблюдается интенсивный процесс развития институтов ГЧП. Его отличительной особенностью является, на наш взгляд, крайняя бессистемность и нескоординированность действий, а также использование некоторых институтов в корыстных интересах.

## *2. Примеры проектов ГЧП*

В России опыт ГЧП считается опробованным при реализации отдельных инфраструктурных проектов, связанных со строительством и эксплуатацией мусороперерабатывающих заводов и водоочистных сооружений, а также в портовом хозяйстве. Существующее в настоящее время большинство проектов пока не реализовано, а лишь находится на стадии внедрения. Условно их можно разделить на несколько категорий. К первой можно отнести проекты городского и межгородского уровня, ко второй - проекты регионального



развития. Существуют также проекты еще более высокого уровня - проекты развития субъектов РФ в рамках программ социально-экономического развития, также инвестиционные проекты, объединяющие сразу несколько регионов России. Приведем краткую характеристику некоторых из них.

Сразу несколько проектов первого уровня реализуются в г. Санкт-Петербурге. Это строительство автомобильной дороги «Западный скоростной диаметр»; Орловского тоннеля под р. Невой в рамках развития Волго-Балтийского водного пути; скоростной автодороги Москва - Санкт-Петербург на участке 15 – 58-й км.

К настоящему времени частично реализован проект «Западный скоростной диаметр» (ЗСД). Его особенность состоит в том, что это первый проект, осуществляемый по концессионному соглашению. Участниками проекта со стороны государственных органов выступили Федеральное дорожное агентство и правительство г. Санкт-Петербурга, со стороны частного инвестора – ООО ЗСД «Невский меридиан». Это крупнейший консорциум, объединяющий мировые компании: «Strabag AG», «Bouygues Travaux Public», «Hochtief PPP Solutions», «Egis Projects». Целью проекта является создание на платной основе автомобильной дороги для обеспечения авто- и грузоперевозок по направлению их наибольшей концентрации в г. Санкт-Петербурге и подключение транзитного узла города, включая Большой морской порт, к сети федеральных автодорог, что позволит получить выходы в страны Балтии и Скандинавии. В ходе реализации проекта предполагается сооружение двух тоннелей и строительство 72 инженерных сооружений (мосты, путепроводы, транспортные развязки). Стоимость проекта оценивается в 212.7 млрд. руб., включая собственные средства инвестора – 16.1 млрд. руб., заемные средства инвестора – 91.8 млрд. руб., средства бюджетов субъектов РФ – 33.6 млрд. руб., средства Инвестиционного фонда – 71.3 млрд. руб. [24]. После реализации проекта (2004-2013 гг.) право собственности переходит к субъекту РФ (г. Санкт-Петербург). В 2008 г. открыта первая очередь южного участка ЗСД.

Примером проекта второго уровня может служить инвестиционный проект «Комплексное развитие Нижнего Приангарья». Его целью является укрепление промышленного потенциала восточных территорий на основе создания и развития транспортной и энергетической инфраструктур, освоения природных ресурсов и строительства промышленных объектов на принципах ГЧП. Развитие инфраструктуры и электроэнергетики будет способствовать диверсификации экономики региона, созданию новой экономической базы на основе энергоемких производств и последующей переориентации на преимущественное развитие перерабатывающих отраслей. Реализация проекта будет проходить в два этапа: первый – 2006-2010 гг., второй – 2011-2020 гг.

На первом этапе намечено строительство объектов электроэнергетики (первой очереди Богучанской ГЭС, ЛЭП), объектов транспортной инфраструктуры (реконструкция автодороги, строительство железной дороги, моста через р. Ангара), новых промышленных предприятий (алюминиевого завода, двух целлюлозно-бумажных комбинатов), нефтедобывающего комплекса (строительство трубопроводной системы и освоение нефтегазовых месторождений), реализация существующих проектов добычи твердых полезных ископаемых, а также проведение геологоразведочных работ месторождений марганца, железа и бокситов. Сметная стоимость проекта оценивается в 213,9 млрд. руб., в том числе собственные средства инвестора – 60,8 млрд. руб., заемные средства инвестора – 118,9 млрд. руб., средства Инвестиционного фонда – 34,2 млрд. руб. [24]. Поскольку проект инвестируется на принципах ГЧП, то соотношение государственных и частных инвестиций распределяется следующим образом: строительство Богучанской ГЭС – 1:5; строительство участка автодороги Канск - Абан – Карабула – Богучаны – Кодинск – 1:11,5; строительство железнодорожной ветки Карабула – Ярки и моста через р. Ангара – 1: 4,2; строительство нефтепроводов – 1: 5 [25]. Государственная поддержка осуществляется в виде софинансирования на договорных условиях с последующим оформлением имущественных прав в соответствии с инвестиционным соглашением. Государственным координатором проекта выступает Совет администрации Красноярского края. Ответственными исполнителями проекта являются Федеральное дорожное агентство, Федеральное агентство железнодорожного транспорта, министерство энергетики. Частный бизнес представлен специально созданной ОАО «Корпорация развития Красноярского края» (капитал компании в равных долях распределен между администрацией Красноярского края, ОАО «Гидро ОГК», ООО «Базовый элемент», Внешэкономбанком), ОАО «Русский алюминий», ОАО «Федеральная гидрогенерирующая компания», Внешэкономбанком. Инвестиционными консультантами являлись два английских банка: ABN AMRO Bank, Calyon Corporate and Investment Bank.

К настоящему времени успешно развивается строительство Богучанской ГЭС и отдельных участков автодороги. По мнению Правительства РФ, финансовый кризис не повлияет на темпы реализации проекта.

Примером развития ГЧП на уровне программ социально-экономического развития субъектов РФ является программа развития Республики Коми. В соответствии со Стратегией экономического и социального развития Республики Коми на период 2006-2015 гг. главным механизмом ее реализации заявлено ГЧП как эффективный способ привлечения частных инвестиций в те виды деятельности, в которых не предполагается проведения приватизации. Приор-

ритетными направлениями объявлены: развитие социальной и производственной инфраструктуры, строительство и эксплуатация дорог, строительство электросетей, ЖКХ, здравоохранение, образование, культура, социальное обслуживание населения, туризм, формирование инновационных центров развития. Предполагается реализация двух форм ГЧП: 1) создание смешанных компаний или присоединение государственных секторов и частных партнеров к существующей компании; 2) заключение различных договоров (контрактов) между государственными и частными партнерами (договоры о сотрудничестве, об управлении компанией, о реализации, лизинговый договор, договор об уступке). Последняя форма ГЧП уже оправдала себя и успешно используется при реализации инновационных проектов, таких как создание глиноземно-алюминиевого комплекса, строительство газопровода «Ямал – Центр», строительство нефтепровода «Западная Сибирь – Баренцево море». Так, например, в строительстве глиноземно-алюминиевого комплекса принимали участие компания ЗАО «Коми Алюминий», Группа СУАЛ, компания РУСАЛ. Канадская фирма «Hatch Ltd» провела предварительное технико-экономическое обоснование проекта, а также совместно с канадской компанией «SNC - Lavalin International Inc.» подготовила банковское технико-экономическое обоснование строительства завода. Для его разработки со стороны Канадского экспортно-кредитного агентства было выделено 20 млн. долл. Сметная стоимость строительства оценивается в 1,05 млрд. долл., срок сдачи объекта «под ключ» - 2009 г. Со стороны государства предусмотрены гарантии от некоммерческих рисков на сумму 200 млн. долл. Кроме того, к строительству комплекса привлечены финансовые средства международных банков и организаций. Так, Европейский Банк Реконструкции и Развития и МФК выделили для строительства и расширения глиноземно-алюминиевого комплекса 150 млн. долл. [26].

Примером крупнейшего инвестиционного проекта, объединяющего несколько регионов России, является проект «Белкомур» (Белое море - Коми - Урал). Он предполагает строительство спрямляющей железнодорожной магистрали меридионального типа, проходящей по территории трех субъектов Федерации: Пермского края, Республики Коми и Архангельской области, с дальнейшим включением в транснациональную магистраль «Баренц - Линк» (железнодорожный путь из Норвегии в Индию). В рамках проекта планируется также строительство нового Архангельского морского порта, модернизация и создание новых предприятий и производств на территории Республики Коми и Пермского края. Современный проект, предполагающий строительство нового железнодорожного пути протяженностью 794 км, свяжет промышленный Урал и север европейской части России, обеспечит кратчайший

выход к Архангельскому морскому порту, снизив наполовину затраты на грузоперевозки. Кроме того, он позволит решить следующие хозяйственные задачи трех регионов России: обеспечит наилучший выход направляемой на экспорт лесной продукции Республики Коми и Архангельской области к Архангельскому порту; создаст условия для эффективной разработки Средне-Тиманского месторождения бокситов и их вывоза к уральским глиноземным заводам; откроет новые рынки для нефтепродуктов «Тимано-Печоры»; обеспечит сбыт угольной продукции Печорского бассейна на предприятия Урала; обеспечит удобное соединение с железнодорожной сетью Финляндии.

Для реализации проекта в мае 2007 г. была создана управляющая компания «Межрегиональная инвестиционная компания «Северо-Запад-Прикамье». Учредителем компании выступают администрации Республики Коми, Пермского края и Архангельской области и ряд крупных компаний. Внешэкономбанк станет финансовым консультантом проекта. Сметная стоимость строительства железной дороги оценивается в 100 млрд. руб. Общая сумма, которую предполагают вложить частные инвесторы в проект в целом, составляет более 480 млрд. руб. [27, 28]. Строительство железной дороги поддерживается РЖД и включено в Стратегию развития железнодорожного транспорта России до 2030 года. В настоящее время проект находится на стадии подготовки заявки для участия в конкурсе на предоставление государственной поддержки за счет средств Инвестиционного фонда РФ. В связи с мировым финансовым кризисом вопрос о дальнейшем продвижении проекта остается открытым.

### *3. ГЧП и финансовый кризис*

С началом финансового кризиса в научной литературе стал активно обсуждаться вопрос о его влиянии на развитие ГЧП в России. Высказывались две противоположные точки зрения. Первая сводилась к тому, что кризис ни в коей мере не затронет процессы внедрения механизмов ГЧП и реализации проектов. Напротив, сферы применения ГЧП станут островками успеха, благополучия и роста. Кроме того, вложение денежных средств в инфраструктурные проекты более надежно, чем их инвестирование в ПИФы, акции или хранение на банковских счетах. Вторая – кризис может отрицательно повлиять на развитие ГЧП. Поскольку возможно сокращение объемов финансирования проектов ГЧП, то реализация крупных проектов может приостановиться на неопределенное время или вовсе не начаться. В условиях кризиса бизнес-способными окажутся менее затратные проекты. Как показала практика, наиболее реалистичной оказалась вторая точка зрения. Слабость и несовершенство институтов ГЧП привели к тому, что финансовый кризис повлиял на

российскую систему ГЧП сильнее, чем на экономику в целом. По большинству крупномасштабных проектов уже произошла коррекция сроков и графиков финансирования на ближайшие годы. В качестве примера приведем изменения процесса реализации двух проектов ГЧП в г. Санкт-Петербурге – строительство Западного скоростного диаметра и Орловского тоннеля. При реализации первого проекта было принято решение не заключать концессионное соглашение в течение 2009-2010 гг., а временно продолжить строительство трассы за счет федерального и регионального бюджетов. В 2011 г. предполагается провести новый концессионный конкурс. По второму проекту был перенесен срок подачи конкурсных предложений и проведение самого конкурса на апрель 2010 г., а выделение средств из Инвестфонда - на 2011 г. [29]. Кроме того, в ближайшее время можно ожидать реформирования других крупных проектов, которые прошли некоторые стадии отбора: часть проектов может быть заморожена на этапе оценки проекта, другие могут быть реализованы частично, либо на них будут запрошены дополнительные средства из других финансовых институтов. Таким образом, финансовый кризис выявил еще одну особенность российского ГЧП – относительную неразвитость, слабость и неспособность противостоять негативным внешним воздействиям.

Сохранение ГЧП как института развития в условиях кризиса возможно благодаря внедрению ряда мер по совершенствованию механизма финансирования проектов, реструктуризации рисков, изменения сроков действия соглашения ГЧП и срока подачи конкурсных предложений и т.п. Рассмотрим некоторые из них.

В условиях кризиса существенно обострилась проблема источников финансирования проектов ГЧП. Поэтому сегодня экономистами активно обсуждаются альтернативные варианты привлечения стороннего финансирования в виде механизма заимствования на международных финансовых рынках или использования нового для нашей экономики инструмента финансирования – выпуска инфраструктурных облигаций (ИО) [30,31]. Этот вид облигаций эмитируется концессионером после ввода объекта в эксплуатацию. Эмитентом ИО может быть и специально созданная проектная компания. Средства, полученные от размещения ИО, используются для реализации проектов. В мировой практике часть вложений в ИО осуществляют институциональные инвесторы (пенсионные фонды, страховые компании и т.п.). Период обращения ИО привязан к сроку реализации проекта и периоду его эксплуатации (обычно 15-20 лет). В европейских странах выпуск ИО обеспечивается путем предоставления государственных и банковских гарантий, страхования рисков и т.п. Однако использование данного механизма в российском ГЧП пока не-

возможно, поскольку отсутствуют необходимая законодательная база и институциональные инвесторы, способные обеспечить ликвидность рынка ИО.

В условиях кризиса становятся неоднозначными перспективы активного внедрения концессионных проектов. Альтернативой этой формы ГЧП может стать известная на Западе разновидность концессий – контракты жизненного цикла (КЖЦ). В отличие от традиционных концессий, в КЖЦ плательщиком выступает государство. Частный партнер получает ежегодную прибыль лишь в том случае, если он на стадии эксплуатации объекта поддерживает его на должном уровне. Для государства выгода от КЖЦ состоит в том, что объект строится в более сжатые сроки, а бюджетные средства выплачиваются постепенно («в рассрочку»). Для частного инвестора мотивация заключена в том, что все сэкономленные на разных этапах реализации проекта средства и все технологии, примененные в строительстве, принадлежат ему. В России использование этой формы ГЧП пока невозможно, поскольку с точки зрения российского законодательства КЖЦ не является концессией.

В условиях кризиса возможно сохранение интереса частного инвестора к проектам ГЧП при условии их реструктуризации за счет пересмотра матрицы риска от частных инвесторов к государству.

Таким образом, несмотря на негативное влияние финансового кризиса на современное состояние ГЧП в России, можно предположить, что он явится стимулирующим фактором для внедрения новых форм и методов реализации ГЧП-проектов.

### **Заключение**

В настоящее время ГЧП как форма делового взаимодействия частного бизнеса и государства развивается повсеместно. В России она все еще находится на стадии становления. При этом используются лишь отдельные и не всегда эффективные для российской экономики формы ГЧП. Проекты имеют ярко выраженный инвестиционный характер и рассматриваются как один из факторов экономического роста.

В ходе реализации проектов на принципах ГЧП проявились определенные недостатки существующей институциональной среды. Стало очевидным несовершенство законодательной базы (включая обеспечение гарантий и прав инвестора) и отсутствие необходимых рыночных институтов. Поэтому сегодня высказывается целый ряд предложений по созданию благоприятных условий, необходимых для использования механизмов ГЧП. Наиболее актуальными и крупномасштабными из них являются решение проблем совер-

шенствования законодательной и институциональной базы, которые далеки от своего завершения.

Существуют и другие не менее важные задачи. Актуальной и наиболее острой проблемой развития ГЧП в России является крайне высокий уровень транзакционных затрат частного сектора для подготовки и участия в конкурсных процедурах. По некоторым оценкам расходы на юридические и иные консалтинговые услуги возрастают на 10-20% по сравнению с альтернативными формами взаимодействия. Более высокая трудоемкость и подготовительные затраты для качественного обоснования партнерства характерны и для государственного участника проекта. Для преодоления указанного недостатка предлагается разработать определенную систему стандартов, включающую некие типовые элементы, снижающие затратность и время разработки проекта. В некоторых случаях речь может идти и о разработке схожих проектов в целом.

Для повышения эффективности проектов ГЧП предлагается создать систему мониторинга, позволяющую отслеживать реализацию проекта в течение всего жизненного цикла партнерства, в том числе при смене этапов проекта, возникновении нестандартных ситуаций и проводить регулярные аналитические расчеты эффективности.

По-прежнему крайне необходимым считается развитие конкурентной среды и механизмов реализации конкурентных преимуществ на рынке ГЧП. С одной стороны, проекты должны быть привлекательными для частного инвестора, а с другой – необходимо наличие множества компаний, способных реализовать цели проекта. Высказывается также пожелание о построении финансовой структуры российских проектов, оптимально сочетающей государственное финансирование, предоставление синдицированных займов, участие международных финансовых организаций, выпуск облигаций для обеспечения рефинансирования проектов, использование средств российских и зарубежных инвесторов в акционерном капитале.

Современный финансовый кризис внес свои коррективы в реализацию проектов ГЧП. Перспективы развития имеют уже начавшиеся менее затратные проекты, финансирование которых осуществляется, по крайней мере, из трех источников (государственный, региональный, частный).

Таким образом, наличие множества нерешенных проблем, слабость и неразвитость институтов ГЧП – отличительная особенность текущего положения в области российского ГЧП.

В заключение отметим, что в российской практике внедрения ГЧП как особой формы взаимодействия государства и частного бизнеса реализуемые проекты можно рассматривать как попытку адаптации ГЧП к российским

условиям, включая выстраивание деловых отношений между бизнесом и государством, бизнесом и региональной администрацией, а также эффективной вертикали административного управления. С этой точки зрения ГЧП можно рассматривать как способ преодоления противоречий между рынком и государственным управлением в переходной экономике.

### Литература

1. Программа социально-экономического развития РФ на среднесрочную перспективу (2006-2008 гг.). [www.akdi.ru/econom/program/41.htm](http://www.akdi.ru/econom/program/41.htm).
2. Годовой отчет ОАО ОЭЗ, 2008. [www.oao-oez.ru](http://www.oao-oez.ru).
3. И. Иванов. ГЧП в регионах и на муниципальном уровне: разработка успешной модели и перспективы в новых условиях // Материалы совещания Внешэкономбанка, региональных центров государственно-частного партнерства и участников рынка проектов ГЧП. Москва, декабрь 2009. [www.vtb.ru/ru/ppp](http://www.vtb.ru/ru/ppp).
4. В.Н. Мочальников. Государственно-частное партнерство в условиях кризиса. Первый Российский экономический конгресс. Москва, 2009.
5. Материалы международной конференции «Государственно-частное партнерство: новые возможности для развития инфраструктуры в странах с переходной экономикой», Москва, 2008.
6. А.И. Николаев. Государственно-частное партнерство в РФ: экономическое содержание и правовое обеспечение. // Недвижимость и инвестиции. Правовое регулирование. №1-2, 2007.
7. Совфед инициирует разработку федерального закона о государственно-частном партнерстве. [www.oao-oez.ru](http://www.oao-oez.ru).
8. М.А. Дерябина. Гражданско-правовые и публично-правовые отношения в проектах ГЧП. // Первый Российский экономический конгресс. Москва, 2009.
9. Энциклопедия юриста. <http://dic.academic.ru/dic.nsf>.
10. Реестр инвестиционных проектов, утвержденных распоряжением Правительства РФ от 30 ноября 2006 г. №1708-р и распоряжением Правительства РФ от 18 августа 2007 г. №1082-2. [www.minregion.ru](http://www.minregion.ru).
11. Информация о параметрах функционирования Инвестиционного фонда РФ. [www.minregion.ru](http://www.minregion.ru).
12. М. А. Фурщик. Инвестиционный фонд и финансовый кризис. //Аграрный эксперт, №2, 2009.
13. Н. Кричевский. Миф или ширма? Чем стало государственно-частное партнерство в России. //Московский комсомолец, 11 ноября, 2009.



14. Р.А. Кокорев. Роль институтов в диверсификации экономики Российской Федерации.  
[www.un.org/esa/policy/eitconference/2apram\\_report\\_kokorev\\_rus.pdf](http://www.un.org/esa/policy/eitconference/2apram_report_kokorev_rus.pdf).
15. Внешэкономбанк. Участие Внешэкономбанка в финансировании инвестиционных проектов. [www.veb.lgga.ru/ru/strategy/support/prj\\_rev](http://www.veb.lgga.ru/ru/strategy/support/prj_rev).
16. Институты развития: международный и российский опыт в аспекте использования на региональном уровне. Серия «Аналитические доклады», №1. УГУ, Екатеринбург, 2008.
17. А.А.Алпатов. Особые экономические зоны: главные результаты работы в 2008 году. // Вестник особых экономических зон, №3, 2008.
18. Венчурные фонды. [www.rusventure.ru/investments/funds](http://www.rusventure.ru/investments/funds).
19. Генеральная прокуратура РФ. Новости. 24.02.2009.  
[http://genproc.gov.ru/new/news\\_9093](http://genproc.gov.ru/new/news_9093).
20. И.Р. Агамирзян. РВК в структуре экосистемы технологического бизнеса России. [www.rusventure.ru/press-service/massmedia](http://www.rusventure.ru/press-service/massmedia).
21. Что такое особая экономическая зона.  
[www.economy.gov.ru/mines/activity](http://www.economy.gov.ru/mines/activity).
22. [www.asninfo.ru/asn/57/14921](http://www.asninfo.ru/asn/57/14921).
23. РИА «Росбизнесконсалтинг» [www.sibai.ru/content/view/1571/1734](http://www.sibai.ru/content/view/1571/1734).
24. Министерство регионального развития РФ. [www.min.region.ru](http://www.min.region.ru).
25. Итоги 10-летнего развития Красноярского края // РИА Новости.- 2005, 27 янв. [www.rian.ru](http://www.rian.ru).
26. Республика Коми 85 лет. <http://85.rkomi.ru/ru/Ekonomika>.
27. [www.pomorcpp.org/2008/09/18](http://www.pomorcpp.org/2008/09/18).
28. [www.rosbalt.ru/2008/09/20](http://www.rosbalt.ru/2008/09/20).
29. Коммерсантъ. Приложение (Санкт-Петербург) №115 (4170) от 30.06.2009.
30. Е. Зусман. ГЧП в условиях экономического кризиса: новые тенденции развития. // Юрист, №1, 2009.
31. И. Вдовин. Механизмы ГЧП в условиях кризиса: что дальше?// Финансовый инжиниринг для инфраструктуры, РБЦ, ноябрь 2009.
32. Внешэкономбанк. Основные направления деятельности. [www.veb.lgga.ru/ru/strategy/support](http://www.veb.lgga.ru/ru/strategy/support).
33. А.В. Баженов. Центр государственно-частного партнерства. Результаты работы в 2009 году. Материалы совещания Внешэкономбанка, региональных центров государственно-частного партнерства и участников рынка проектов ГЧП. Москва, декабрь, 2009.  
[www.veb.ru/ru/PPP/pppact09/201](http://www.veb.ru/ru/PPP/pppact09/201).

## Современные институты ГЧП в России

Институты	Цели (задачи) создания	Основные функции
1	2	3
<p><b>1. Инвестиционный фонд Российской Федерации</b></p> <p>Сформирован 1 января 2006 г. в соответствии с постановлением Правительства Российской Федерации от 23 ноября 2005 г. № 694 «Об Инвестиционном фонде Российской Федерации»</p>	<p><i>Цель</i> - предоставление государственной поддержки для реализации проектов, имеющих общегосударственное значение и осуществляемых на условиях ГЧП, направленных на:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- создание и (или) развитие элементов российской инновационной системы;</li> <li>- обеспечение реализации институциональных преобразований;</li> <li>- создание и (или) развитие инфраструктуры (в том числе социальной) в рамках реализации инвестиционных проектов, направленных на социально-экономическое развитие РФ;</li> <li>- реализацию региональных инвестиционных проектов</li> </ul>	<p>I. Предоставление средств Инвестиционного Фонда РФ в виде бюджетных ассигнований, которые могут предоставляться в форме:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) инвестиций в объекты капитального строительства государственной собственности РФ, включая финансирование разработки проектной документации;</li> <li>2) субсидий на софинансирование капитального строительства объектов государственной собственности субъектов РФ, бюджетные инвестиции в которые осуществляются из бюджетов субъектов РФ или из местных бюджетов;</li> <li>3) субсидий на софинансирование разработки проектной документации объектов капитального строительства государственной собственности субъектов РФ и муниципальной собственности в рамках концессионных соглашений;</li> <li>4) взносов в уставные капиталы ОАО, в том числе участие в их учреждении;</li> <li>5) предоставления государственных гарантий РФ;</li> <li>6) направления в инвестиционные фонды, создаваемые в субъектах РФ.</li> </ol> <p>II. Предоставление господдержки для разработки проектной документации инвестиционных проектов</p>
<p><b>2. Государственная корпорация «Банк развития и внешнеэкономической деятельности (Внешэкономбанк)»</b></p> <p>Создан 4 июня 2007 г. в соответствии с Федеральным законом «О банке развития» от 17 мая 2007 г. №82-ФЗ</p>	<p><i>Цель</i> - обеспечение повышения конкурентоспособности экономики РФ, ее диверсификации, стимулирования инвестиционной, внешнеэкономической, страховой, консультационной и иной деятельности по реализации проектов в РФ и за рубежом, в том числе с участием иностранного капитала, направленных на развитие инфраструктуры, инноваций, особых экономических зон, защиту окружающей среды, на поддержку экспорта российских товаров, работ и услуг, а также на поддержку малого и среднего предпринимательства</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Финансирование инвестиционных проектов, в том числе в форме предоставления кредитов или участия в капитале коммерческих организаций.</li> <li>2) Выпуск облигаций и иных ценных бумаг.</li> <li>3) Участие в реализации инвестиционных проектов общегосударственного значения на условиях ГЧП, а также проектов по созданию инфраструктуры и иных объектов для обеспечения функционирования особых экономических зон.</li> <li>4) Участие в поддержке малого и среднего предпринимательства посредством финансирования кредитных организаций и юридических лиц, осуществляющих поддержку малого и среднего предпринимательства.</li> <li>5) Участие в реализации федеральных целевых и государственных инвестиционных программ, включая внешнеэкономические, в том числе по государственной поддержке экспорта промышленной продукции (товаров, работ, услуг).</li> <li>6) Экспертиза инвестиционных проектов и проектов экспортных контрактов, включая ор-</li> </ol>

		<p>ганизацию экспертизы инженерно-технических решений.</p> <p>7) Обеспечение финансовой и гарантийной поддержки экспорта промышленной продукции российских организаций, включая предоставление государственных гарантий российским экспортерам промышленной продукции (товаров, работ, услуг), российским и иностранным банкам, кредитующим российских экспортеров, а также страхование экспортных кредитов от коммерческих и проч. рисков.</p> <p>8) Банковское обслуживание бюджетных кредитов, предоставляемых для поддержки экспорта промышленной продукции российских организаций, в том числе при сооружении объектов за рубежом и осуществлении поставок оборудования, выдача банковских гарантий при участии российских организаций в международных торгах и реализации заключенных экспортных контрактов.</p> <p>9) Осуществляет права и исполняет обязанности агента валютного контроля, установленные для уполномоченных банков и т.п.</p>
<p><b>3. Центр ГЧП Внешэкономбанка</b> – структурное подразделение Внешэкономбанка</p> <p>Создан в июне 2008 г.</p>	<p><i>Цель</i> – содействие разработке и реализации проектов на основе государственно-частного партнерства.</p> <p><i>Основные задачи:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- консультирование органов государственного и муниципального управления по организации проектов ГЧП;</li> <li>- разработка методологии организации и управления проектами ГЧП органами государственного и частного управления;</li> <li>- информационное обеспечение рынка проектов ГЧП, в том числе ведение базы данных проектов (готовящихся, реализуемых, реализованных), обобщение и распространение опыта организации проектов ГЧП;</li> <li>- разработка вопросов нормативного характера, необходимых для развития рынка проектов ГЧП и инвестиционной деятельности Внешэкономбанка на данном направлении;</li> <li>- участие в формировании и отборе программ повышения квалификации кадров государственного и муници-</li> </ul>	<p><i>1. Информационное обеспечение:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- мониторинг факторов развития рынка и отдельных его сегментов с целью оценки инвестиционного климата в различных отраслях и регионах России;</li> <li>- распространение информации о готовящихся и реализуемых проектах ГЧП;</li> <li>- открытый доступ к методическим рекомендациям, распространение опыта проектов ГЧП в России, в том числе с использованием сети Интернет.</li> </ul> <p><i>2. Нормативное сопровождение:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- обобщение опыта реализации проектов ГЧП в России и в мире;</li> <li>- разработка методических рекомендаций по подготовке и управлению исполнением проектов ГЧП;</li> <li>- организация координации и обмена опытом между органами государственного и муниципального управления по вопросам применения ГЧП;</li> <li>- экспертиза и разработка проектов законодательных и нормативных актов по тематике ГЧП, в том числе региональных и муниципальных.</li> </ul> <p><i>3. Поддержка переподготовки кадров</i> органов государственного и муниципального управления (ОГМУ):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- разработка принципиальных требований к составу курсов государственного и муниципального управления по подготовке и реализации проектов ГЧП;</li> <li>- разработка совместных программ Банка и ведущих Вузов.</li> </ul> <p><i>4. Обеспечение деятельности профессиональных участников рынка ГЧП</i> (консультационных и юридических компаний, инжиниринговых консультантов, аудиторских компаний, компаний, оказывающих услуги в области стратегического планирования отраслевого и</p>

	пального управления по вопросам организации и управления проектами ГЧП	территориального развития). <i>5. Консультационные услуги:</i> - формирование типовых программ проектов ГЧП, организация и экспертиза проектов; - стратегическое планирование использования ГЧП; - создание Центров ГЧП ОГМУ.
<b>4. ОАО «Российская венчурная компания» (ОАО «РВК»)</b>  Создано 7 июня 2006 года в соответствии с Распоряжением Правительства Российской Федерации от 7 июня 2006 года №838-р	<i>Цель</i> – стимулирование создания в России собственной индустрии венчурного инвестирования, развития инновационных отраслей экономики и продвижения на мировой рынок наукоемких технологических продуктов  <i>Задачи РВК:</i> - развитие новых инновационных компаний и формирование культуры и инфраструктуры инновационного предпринимательства; - совершенствование связи науки, образования и инновационного бизнеса, коммерциализация технологий; - продвижение создаваемых в России новых технологий и технологических продуктов на международный рынок; - освоение лучших международных практик венчурного инвестирования	<i>На РВК возложены две основные функции:</i> - отбор лучших венчурных управляющих компаний на конкурсной основе; - приобретение паев венчурных фондов управляющих компаний;  <i>Расширение функций вследствие модернизации:</i> 1. Разработка и внедрение механизма «посевого» инвестирования средств ОАО «РВК» в высокотехнологичные стартапы, с реализацией данного механизма через создание сид-фондов (венчурных фондов, имеющих менее жесткие ограничения на максимальный и минимальный размер продаж ценных бумаг инвестируемых компаний, по сравнению с существующими правилами ЗПИФ). 2. Разработка и внедрение нефинансовых механизмов поддержки венчурного рынка РФ через реализацию следующих инфраструктурных программ: - создание информационной площадки – портала для обеспечения доступа отечественных предприятий к информации о венчурных рынках, о развитии высокотехнологичного и венчурного бизнеса в РФ и зарубежных странах; - программы повышения венчурной компетенции, направленные на консультационное и информационное содействие формированию венчурной среды и стимулирования потока проектов для венчурных фондов; - организация мероприятий, нацеленных на популяризацию венчурного инвестирования среди предпринимателей, инвесторов и представителей администраций.
<b>5. ОАО «Особые экономические зоны» (ОАО «ОЭЗ»)</b>  Преобразовано из Федерального государственного предприятия «Внешнеэкономическое объединение	<i>Основные цели:</i> - обеспечение реализации соглашений о создании ОЭЗ; - создание объектов инфраструктуры и иных объектов, предназначенных для обеспечения функционирования ОЭЗ; - управление объектами ОЭЗ; - извлечение прибыли.	<i>Основные функции:</i> - участие в экономическом и социальном развитии особых экономических зон (ОЭЗ) путем создания и строительства объектов ОЭЗ, управления указанными объектами и их эксплуатации, привлечения инвестиций для ОЭЗ, содействия деятельности резидентов ОЭЗ, привлечения квалифицированной рабочей силы для работы на территории ОЭЗ; - увеличение выручки и объемов услуг, работ и товаров, реализуемых Обществом, которое осуществляется путем снижения себестоимости товаров, проведения рекламных компаний, участия в торгах, в том числе конкурсах и аукционах на поставку товаров для государственных и муниципальных нужд; - увеличение объемов производства товаров путем создания и развития современных про-

<p>«Внешстройимпорт»</p> <p>Постановлением Правительства РФ от 12 апреля 2006 г. №211 и статьей 8 (пункта 7 части 1 и части 2) Федерального закона от 22 июля 2005 г. №116-ФЗ «Об особых экономических зонах РФ»</p>	<p><i>Осуществление политики в области:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- менеджмента;</li> <li>- экологии;</li> <li>- профессионального здоровья и безопасности в ОЭЗ</li> </ul>	<p>изводственных и технологических мощностей, внедрение новейших технологий производства и управления, в том числе информационных, управления качеством товаров;</p> <p>- внедрение современных технологий путем проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, внедрение новейших технологий производства и управления, в том числе информационных, внедрение и совершенствование систем управления качеством, обеспечение защиты коммерческой и государственной тайны.</p>
<p><b>6. Особые экономические зоны:</b></p> <p><b>1. Техничко-внедренческого типа (ОЭЗ ТВТ)</b></p> <p><i>ОЭЗ ТВТ в г. Москва</i> Создана Постановлением Правительства РФ от 21 декабря 2005 г. №779</p> <p><i>ОЭЗ ТВТ в г. Санкт-Петербурге</i> Создана Постановлением Правительства РФ от 21 декабря 2005 г. №780</p> <p><i>ОЭЗ ТВТ в г. Дубна Московской области</i> Создана Постановлением Правительства РФ от 21 декабря 2005 г. №781</p> <p><i>ОЭЗ ТВТ в г. Томске</i> Создана Постановлением Правительства РФ от 21 декабря 2005 г. №783</p> <p><b>2. Промышленно-производственного типа (ОЭЗ ППТ)</b></p> <p><i>ОЭЗ ППТ в Республике Татарстан</i></p> <p><i>ОЭЗ ППТ в Липецкой области</i></p>	<p>Развитие высокотехнологичных отраслей, производство новых видов продукции</p> <p>Развитие информационно-коммуникационных и электронных технологий, технологий производства новых материалов, нанотехнологии, биотехнологии, медицинских технологий</p> <p>Реализация проектов в сферах точного и аналитического приборостроения, биотехнологий, разработки программных продуктов, электроники, средств связи, новых материалов</p> <p>Развитие информационных и ядерно-физических технологий</p> <p>Развитие микро- и нанoeлектроники, оптоэлектроники, биоинформационных и биосенсорных технологий, информационно-коммуникационных систем, нанотехнологий и наноматериалов</p> <p>Производство автомобилей, автокомпонентов, создание производств химической, нефтехимической, обрабатывающей промышленности, фармацевтической и авиационной отраслей. Машиностроение, металлообработка, производство строительных материалов, бытовой техники</p>	<p>Ведение технико-внедренческой деятельности</p> <p>Ведение промышленно-производственной деятельности</p>

Таблица 2

Источник: [2, 21]

## Основные показатели деятельности ОЭЗ технико-внедренческого и промышленно-производственного типа

Наименование ОЭЗ	Общая стоимость выполненных работ по созданию ОЭЗ на 01.01.2009г. (млн. руб.)	Инвестировано средств ОАО «ОЭЗ» на создание объектов ОЭЗ на 01.01.2009 г. (млн. руб.)	Количество резидентов		Объем инвестиций резидентов (млн. руб.)		Создано рабочих мест		Объем выпущенной продукции (млн. руб.)	
			31.12.08	31.12.09	31.12.08	31.12.09	31.12.08	31.12.09	31.12.08	31.12.09
ОЭЗ ТВТ (всего)	5676.3	8002.3	113	160	2000	3601,6	1343	2125	-	-
ОЭЗ ТВТ Москва	930.3	2059.3	19	32	168	742,5	161	539	780	1750
ОЭЗ ТВТ Дубна	3193.8	4132.8	32	50	97	414	350	450	34	182
ОЭЗ ТВТ С.Петербур.	314.6	588.4	25	33	159	235,1	254	316	-	-
ОЭЗ ТВТ Томск	1237.4	1221.7	37	45	1576	2210	578	820	263	486
ОЭЗ ППТ (всего)	11891.5	12490.3	113	28	15000	19090	4000	6168	10100	16030
ОЭЗ ППТ Татарстан	7932.1	8201.9	8	9	8000	11510	3000	4930	8100	13000
ОЭЗ ППТ Лип. обл.	3959.4	4288.3	13	17	6000	7580	1100	1238	2000	3030

## **Риск потери деловой репутации: его значение и методы управления<sup>1</sup>**

В процессе экономической деятельности любая организация сталкивается с опасностью потерь. Эта опасность представляет собой риск. Риск, являясь неотделимой частью экономической, политической, социальной жизни общества, неизбежно сопровождает все сферы деятельности и направления любой организации, которая функционирует в условиях рынка. Управление рисками – неотъемлемая часть политики любой организации. Активное обсуждение вопросов на уровне руководства при принятии инвестиционных решений и успешное управление преобразованиями являются примерами управления рисками на практике, даже если такие процедуры применяются на неформальной основе.

Сегодня в условиях нестабильной экономической конъюнктуры и глобализации экономических процессов организации сталкиваются с новыми рисками, которые принимают все более взаимосвязанный характер и становятся менее управляемыми.

### **1. Понятие риска потери деловой репутации**

В последнее время актуальным становится вопрос, связанный с риском потери деловой репутации (далее – РПДР), или репутационным риском, который обычно выносится в разряд прочих рисков, угрожающих компании. В литературе уделено недостаточно внимания этому виду риска, несмотря на то, что при наступлении негативного события, которое может повлиять на репутацию, компания может понести значительный ущерб.

Эксперты сходятся во мнении, что хорошая репутация делает компанию более привлекательной для инвесторов, повышает ее капитализацию, позволяет увеличить доход, обеспечивает более сильные позиции при выходе на новые рынки и поддержку широких слоев населения. Репутация является одним из факторов, который позволяет притягивать дополнительные ресурсы и «обходить» конкурентов. Отмечено, что хорошая репутация позволяет отдельным компаниям при равных условиях генерировать больший денежный поток, чем их конкурентам. Хорошая репутация стимулирует

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект 08-02-00271.

бизнес, а бизнес-результаты, в свою очередь, становятся лучшей подпиткой отличной репутации.

Принято считать, что истинная цена репутации выясняется только тогда, когда речь идет о продаже компании. Чем лучше у нее в этот момент репутация, тем дороже ее можно продать. Однако на самом деле преимущества положительной репутации компании ощущают на себе ежедневно. Во-первых, предприятие с хорошей репутацией может продавать свой продукт дороже, чем остальные. Потребитель готов переплачивать за товар или услугу, если он знает, что за этим стоит уважаемый производитель, гарантирующий качество предлагаемого продукта. Во-вторых, такое предприятие может дешевле, чем прочие участники рынка, «покупать» кадры: многие люди предпочитают работать в известных и уважаемых компаниях.

Особенно возрастает роль репутации в эпоху глобализации. Мировая практика признает, что корпоративная репутация является нематериальным активом компании, имеющим свою стоимость. Интерес собственников российских компаний к репутационному риску объясняется растущей ориентацией на акционерную стоимость и, как следствие, желанием задействовать все инструменты, позволяющие повысить стоимость бизнеса.

Несмотря на финансовый кризис, Россия остается одной из наиболее перспективных стран для инвестирования. Зарубежные фирмы не только продолжают работу с уже имеющимися клиентами, но и постепенно расширяют свое присутствие на российском рынке, представляют на рынке новые продукты, образуют партнерские альянсы, создают локальные офисы, проводят слияния и поглощения.

Тенденции глобализации могут привести к следующим сценариям развития событий:

- усилению конкуренции
- созданию новых стратегических партнерств
- смене собственников бизнеса.

В каждом из трех случаев хорошая репутация становится источником дополнительных выгод для локальных игроков. Преимущества хорошей репутации заключаются как в возможности сохранить лояльность клиентов в условиях активизации деятельности уже работающих в России зарубежных компаний и при появлении новых конкурентов, в заключении выгодных и перспективных партнерских соглашений, так и в возможности отечественных компаний, оказавшихся участниками процесса слияний и поглощений, реализовать свои активы по более высокой цене.

Очевидно, что для достижения заметного эффекта любые предпринимаемые организацией действия по управлению деловой



репутацией должны носить долгосрочный и системный характер, быть интегрированными в ключевые бизнес-процессы.

Открытой информации о том, что какая-то российская компания попыталась объективно оценить стоимость своей репутации, не существует. В мире действует ограниченное число исследовательских компаний, имеющих признанные методологические подходы, которые позволяют оценить вес репутации в общей стоимости активов организации. И ни одна из этих компаний пока не представлена в России. При этом в России укореняется практика проведения ежегодных репутационных исследований (репутационных аудитов), позволяющих строить проактивные коммуникационные кампании по развитию корпоративной репутации.

Практические исследования в данном направлении, в частности, проводились агентством «Эксперт» [1, 2]. Изучив различные зарубежные подходы к определению корпоративной репутации, агентство опросило руководителей высшего звена российских компаний. Участникам опроса было предложено распределить по значимости различные слагаемые корпоративной репутации. В результате были выделены три доминирующих на момент проведения опроса самодостаточных критерия: репутация первого лица организации, финансовая устойчивость компании и качество товаров и услуг, поставляемых на рынок.

Наиболее полным исследованием бизнес-рисков можно считать исследование, проведенное компанией «Эрнст энд Янг» (Ernst & Young Risk Univers<sup>TM</sup>) в 2009 г. [3]. В исследовании приняли участие более 100 экспертов, представляющих 11 отраслей. По результатам исследования репутационный риск занял 10-е место в системе основных бизнес-рисков, переместившись с 22-й позиции рейтинга аналогичного исследования, проведенного в 2008 г. Компания «Эрнст энд Янг» относит репутационный риск к разряду операционных, которые в свою очередь определяет как риски, оказывающие влияние на процессы, системы, персонал и цикл создания стоимости компании в целом. В исследованиях этой компании отмечается, что РПДР грозит не только отдельным предприятиям, но и целым отраслям.

Причину изменения позиции репутационного риска и его переход в первую десятку основных бизнес-рисков компания «Эрнст энд Янг» связывает с финансовым кризисом, который превратил вопрос репутации предприятия в один из важнейших факторов выживания для компании и поставил под угрозу репутацию целых отраслей экономики, например банковский сектор.

Кроме того, значимость этого риска возросла и в силу ужесточения нормативных требований, поскольку чаще всего наиболее серьезный урон репутации фирмы наносит именно несоответствие законодательным

требованиям. Наиболее значительным аспектом репутационного риска в 2009 г. был финансовый кризис и спровоцированный им кризис на рынке кредитования. В условиях неопределенности в отношении характера, объема и необходимости раскрытия информации о понесенных убытках, а также в свете ошибок, допущенных в сфере стратегии и управления, которые повлекли за собой эти убытки, безупречная финансовая репутация для компаний стала основным условием продолжения их деятельности. Основным компонентом создания стоимости компании стала кредитоспособность, обеспеченная за счет устойчивого финансового положения, прозрачности и честности во всех аспектах взаимодействия с рынком. Репутация всегда была связана с рыночной капитализацией, но кредитный кризис подчеркнул эту взаимозависимость.

В нефинансовых секторах экономики финансовый кризис выразился в ограниченном доступе к кредитным средствам и повышенной стоимости капитала, вызванной нестабильностью на рынке. Репутация компании является серьезным фактором, влияющим на доступность и стоимость кредитных средств и капитала для поддержки операционной деятельности и обеспечения роста финансирования.

Законодательно понятие репутационного риска в России закреплено в нормативных актах Центрального Банка Российской Федерации [4,5]. В письме ЦБ РФ от 23.06.2004 № 70-Т РПДР кредитной организации, или репутационный риск, определен как «риск возникновения у кредитной организации убытков в результате уменьшения числа клиентов (контрагентов) вследствие формирования в обществе негативного представления о финансовой устойчивости кредитной организации, качестве оказываемых ею услуг или характере деятельности в целом».

Такое определение РПДР связано с тем, что в настоящее время этот вид риска получил широкое развитие только в банковской и страховой сферах. Именно в этих сферах поддержание безупречной репутации является основополагающим фактором успеха. Это объясняется, в частности, сложностью оценки качества услуг, предоставляемых банком или страховой компанией. Отложенное предоставление услуги приводит к ситуации, когда в момент выбора банка/страховой компании или заключения сделки потребители особенно чувствительны к информационным и репутационным составляющим. С другой стороны, можно утверждать, что взаимодействие потребителей и финансовых институтов основывается на принципе доверия.

Однако наличие репутационного риска в кредитных организациях отнюдь не означает полное его отсутствия на российских предприятиях. Представители других отраслей экономики подвержены риску не в меньшей степени, чем кредитующие их банки. Риск существенным образом может

отражаться на финансовом состоянии эмитентов и некредитных финансовых организаций, работающих на рынке ценных бумаг, чья репутация является одним из главных условий их успешной деятельности и сохранения клиентской базы.

Таким образом, РПДР в общем случае можно определить как риск возникновения у компании убытков в результате формирования в обществе негативного представления о финансовой устойчивости деятельности компании, качестве товаров и услуг, оказываемых ею, и характере деятельности в целом.

## 2. Факторы риска деловой репутации

В соответствии с подходами к определению риска деловой репутации можно выделить общие факторы риска деловой репутации и факторы, определяющие репутацию кредитных организаций.

С точки зрения качественной оценки деятельности любого предприятия деловая репутация представляет собой мнение заинтересованных сторон (стейкхолдеров) о его деятельности. Причинами возникновения риска потери деловой репутации являются как недостатки в организации деятельности предприятия (внутренние факторы), так и действия со стороны внешних контрагентов (внешние факторы).

К внутренним факторам следует отнести:

- неисполнение предприятием договорных обязательств;
- отсутствие формализованных механизмов, позволяющих избегать конфликтов интересов между акционерами, менеджерами и другими заинтересованными лицами;
- неспособность предприятия эффективно противодействовать экономическим преступлениям, а также иной противоправной деятельности, осуществляемой недобросовестными клиентами, контрагентами и (или) сотрудниками предприятия;
- недостатки кадровой политики предприятия при найме и расстановке персонала;
- несоблюдение работниками предприятия законодательства;
- несоблюдение работниками норм делового общения, принципов профессиональной этики;
- отсутствие программ повышения квалификации работников.

К внешним факторам относятся факторы, связанные с влиянием контрагентов на репутацию предприятия:

- недобросовестное (некоммерческое) поведение предприятий-конкурентов. Например, распускание ими ложных (необоснованных) слухов о качестве продукции предприятия, финансовом положении, неплатежах, невыполнении обязательств перед контрагентами;
- опубликование в средствах массовой информации негативных сведений о предприятии, его работниках, акционерах членах органов управления;
- негативная оценка деятельности предприятия, высказанная внешними аудиторскими организациями;
- снижение рейтинга предприятия рейтинговыми агентствами.

Основные факторы, определяющие репутацию кредитных организаций, указаны в [5]. К ним относятся:

- несоблюдение кредитной организацией законодательства Российской Федерации, учредительных и внутренних документов, обычаев делового оборота, принципов профессиональной этики, неисполнение договорных обязательств перед кредиторами, вкладчиками и иными клиентами и контрагентами;
- отсутствие во внутренних документах механизмов, позволяющих эффективно регулировать конфликт интересов клиентов и контрагентов -- учредителей (участников), органов управления и служащих --, а также минимизировать негативные последствия конфликта интересов;
- неспособность кредитной организации, ее аффилированных лиц и реальных владельцев эффективно противодействовать легализации доходов, полученных преступным путем, и финансированию терроризма и иной противоправной деятельности, осуществляемой недобросовестными служащими, клиентами и контрагентами;
- недостатки в управлении банковскими рисками кредитной организации, приводящие к возможности нанесения ущерба деловой репутации;
- недостатки кадровой политики при подборе и расстановке кадров, несоблюдение принципа "Знай своего служащего";
- возникновение у кредитной организации конфликта интересов с учредителями (участниками), клиентами и контрагентами, а также другими заинтересованными лицами;
- опубликование негативной информации о кредитной организации или ее служащих, учредителях (участниках), членах органов управления, аффилированных лицах, дочерних и зависимых организациях в средствах массовой информации.

### 3. Система управления ЛПДР

Система управления РПДР включает в себя как непосредственное управление репутационным риском, так и стратегии, политики, методики и процедуры, являющиеся средствами управления репутационным риском.

Процесс непосредственного управления репутационным риском состоит из следующих стадий:

- Идентификация риска;
- Оценка риска;
- Мониторинг;
- Контроль.

#### *3.1. Идентификация риска*

Под идентификацией риска следует понимать процесс выявления признаков данного риска, определение его видов и факторов. В случае репутационного риска идентификация осуществляется путем сбора, обобщения и систематизации информации о деловой репутации компании. Процесс идентификации рисков включает определение внешних признаков реализации значимых событий риска, определение предельных уровней и недопустимых сочетаний рисков, а также определение сочетаний рисков, при которых начинается их трансформация в РПДР. Весь этот процесс состоит из нескольких этапов, организуемых службой, ответственной за управление рисками и базирующихся на расчете определенных показателей.

Идентификация риска должна быть направлена на честное, непредвзятое и объективное выявление слабых и высокорисковых зон у конкретной компании с точки зрения потери деловой репутации. В этой связи целесообразно на постоянной основе проводить отбор и анализ материалов, размещенных в средствах массовой информации, а также использовать иные источники, включая периодические опросы клиентов и контрагентов. Объектами анализа помимо информации о самом предприятии может, и должна быть, информация об акционерах (учредителях) предприятия, аффилированных с компанией лицах, ее работниках, основных клиентах и партнерах. На основании всей собранной информации должна быть сформирована единая аналитическая база данных. Результатом проведенного анализа должно быть собственное мотивированное суждение относительно уровня репутационного риска, состояния деловой репутации компании, возникших и потенциальных проблемах в данной сфере, а также (при необходимости совместно с другими службами) разработка соответствующих мер реагирования.

### 3.2. Оценка риска

Анализ показывает, что для оценки РПДР наиболее существенны следующие факторы:

1. Мониторинг доли рынка, которую занимает компания (ежемесячно), реакция руководства банка на изменения, влияющие на репутацию.
2. Репутация и рейтинг топ-менеджмента, учредителей и самой компании.
3. Репутация руководителей структурных подразделений компании, ее сотрудников.
4. Результаты проверок уполномоченных органов государственного регулирования, аудиторских фирм. Реакция руководства на их рекомендации.
5. Восприятие рынком и обществом менеджмента и финансовой стабильности компании. Адекватность рынку продуктов и услуг, которые предлагает компания.
6. Качество менеджмента и сервиса обслуживания клиентов. Практика работы компании относительно анализа перспектив расширения спектра продуктов и услуг и разработки соответствующей внутренней нормативной базы.
7. Желание и способность руководства корректировать стратегии бизнеса в соответствии с изменениями в законодательстве, конъюнктуры рынка или других факторов.
8. Контекст публикуемой информации о компании в средствах массовой информации.
9. Выполнение принципов Кодекса корпоративной этики. Разрешение споров и конфликтов интересов на всех уровнях компании.
10. Соблюдение внутренней дисциплины, исполнение внутренних дисциплинарных процедур.
11. Организация процесса риск-менеджмента в компании. Наличие соответствующих политик, положений, процедур, методик.
12. Адекватность систем внутреннего контроля и аудита потребностям компании.
13. Характер и объем жалоб, обращений от клиентов и реакция руководства на них. Существование громкого или заметного судебного дела, которое негативно влияет на репутацию компании.

В контексте классификации факторов, определяющих РПДР, факторы с 1 по 5, а также 8 можно отнести к характеризующим влияние внешней среды, тогда как факторы 6, 7, 9–13 позволяют оценить внутреннюю ситуацию.

На основании анализа приведенных факторов можно выделить следующие три уровня риска потери деловой репутации: низкий, умеренный и высокий. Результаты анализа приведены в табл. 1.

**Таблица 1**

**Классификация уровней риска потери репутации**

Низкий риск	Умеренный риск	Высокий риск
Высшее руководство предусматривает изменения, которые влияют на репутацию компании, и соответственно реагирует на них	Высшее руководство адекватно реагирует на изменения рынка или регулирования, которые влияют на репутацию компании	Высшее руководство не предусматривает или не принимает своевременных адекватных мер в ответ на изменения рынка или регулирования
Компания в соответствии с принципами корпоративного управления разработала Кодекс этики, который полностью выполняется	Компания в соответствии с принципами корпоративного управления разработала Кодекс корпоративной этики, который частично выполняется	Кодекса корпоративной этики в компании нет или он не функционирует
Внутренняя дисциплина компании обеспечивается на высоком уровне	Внутренняя дисциплина компании обеспечивается на приемлемом уровне	Внутренняя дисциплина компании не обеспечивается
Системы внутреннего контроля и аудита полностью адекватны и являются целиком действующими	Системы внутреннего контроля и аудита в целом адекватны	Системы внутреннего контроля и аудита неэффективны и не обеспечивают уменьшения рисков. Руководство не употребило надлежащих исправительных действий или в прошлом их применение не имело ожидаемых результатов

<p>Влияние внутренних и внешних факторов на репутацию компании является минимальным, и принимаются меры для контроля (например, через действующую службу связей с общественностью).</p>	<p>Влияние внутренних и внешних факторов на репутацию компании является контролируемым (например, через действующую службу связей с общественностью).</p>	<p>Существует значительное негативное влияние на репутацию компании за счет внутренних и внешних факторов, что сказывается в значительном количестве исков к компании, значительном объеме жалоб клиентов/контрагентов или в больших суммах убытков. В ближайшее время улучшение ситуации не ожидается</p>
<p>Компания четко регламентирует управление рисками в политиках. Процесс управления рисками охватывает все виды деятельности компании</p>	<p>Компания адекватно регламентирует управление рисками в политиках</p>	<p>Достижения компании в соблюдении политик является недостаточным</p>
<p>Компания имеет дело с регулярными судебными процессами или жалобами, сопоставимыми с деятельностью компании, но не оказывающих существенного влияния на его репутацию</p>	<p>Компания предотвратила конфликт интересов и других нарушений правовых вопросов или контроля. Уровень судебных процессов, убытков, жалоб клиентов сопоставим с деятельностью компании</p>	<p>Риск под угрозой вследствие значительных судебных процессов, денежных убытков или больших объемов жалоб клиентов. Слабое администрирование, конфликты интересов, другие нарушения в контроле и в нормах могут быть очевидными</p>



Руководство четко осведомлено о конфиденциальности частной информации и несет ответственность за информацию о контрагенте	Руководство понимает вопрос информации и в целом применяет принцип ответственности за информацию о контрагенте	Руководство не осведомлено и не заинтересовано в обеспечении безопасности частной информации о контрагенте
Доля рынка компании растет по сравнению с началом года	Доля рынка компании не изменяется или изменяется незначительно по сравнению с началом года	Доля рынка компании значительно уменьшилась по сравнению с началом года

Существуют различные способы оценки репутации. В российских правилах бухгалтерского учета под репутацией понимается «разница между покупной ценой организации и стоимостью по балансу всех ее активов и обязательств». По МСФО (Международные стандарты финансовой отчетности) деловая репутация, или гудвилл (goodwill), представляет собой разницу между ценой, заплаченной за предприятие покупателями, и «справедливой стоимостью» (данная величина зачастую значительно отличается от простой стоимости всех активов фирмы). Оба метода дают четкую схему оценки делового капитала. Однако их недостаток заключается в том, что определить репутацию можно лишь после продажи фирмы.

Чтобы иметь возможность выяснять именно нематериальную цену компании, разработана экспертная оценка репутации. Это в большей степени маркетинговый, нежели финансовый подход, поскольку стоимость репутации определяется экспертами на основании разного рода методик и критериев. Обычно оценка репутационного риска проводится с использованием экспертных оценок вероятности возникновения, вида и суммы возможного убытка не только в текущем времени, но и с учетом долгосрочной перспективы. Анализ документов и опрос экспертов затрагивает, как правило, блок вопросов, касающихся репутации собственников и топ-менеджеров компании, ее корпоративной стратегии, финансового положения, состава и качества управленческой команды, репутации товара или услуги, а также социальной ответственности.

Необходимо иметь в виду, что вклад всех этих параметров в создание репутации не одинаков. Особенности репутации как социального явления измеряются в ее непрерывном развитии, дополняются новыми критериями,

меняют степень значимости в определении понятия «хорошая репутация бизнеса».

Наиболее гибким инструментом оценки риска потери деловой репутации является ситуационный анализ. Ситуационный анализ включает в себя прогнозирование ухудшения существующей репутации в результате влияния негативных факторов. К этим факторам относятся негативное изменение рыночной ситуации, раскрытие отрицательной информации о деятельности компании, намеренных и ошибочных искажениях такой информации контрагентами и персоналом компании, принятие непродуманных управленческих решений в области рекламы и маркетинга и пр.

Корпорация Interbrand, например, использует для оценки метод избыточных прибылей [6, 7]. Сначала рассчитывается доход, полученный компанией за счет брэнда (разница между реальной прибылью и доходами, которые можно получить, продавая небрэндированный товар). Потом полученная сумма умножается на специально рассчитанный коэффициент (включающий целый ряд критериев, таких как лидерство компании в отрасли, стабильность финансовых показателей и т. д.). Результат и есть цена брэнда, который является важной частью репутации. Существуют и косвенные показатели, демонстрирующие уровень репутации предприятия. Скажем, данные рейтинга наиболее уважаемых компаний США Fortune-500 основаны на результатах опроса руководителей фирм и аналитиков, оценивающих компании по восьми параметрам: качество менеджмента и продукта, способность привлечь и удержать квалифицированные кадры, финансовая стабильность, эффективное использование активов, инвестиционная привлекательность, применение новых технологий, социальная ответственность и охрана окружающей среды.

В процессе управления репутационным риском компания может разработать определенные критерии – показатели раннего предупреждения риска, отслеживание которых будет способствовать своевременному выявлению потенциальных источников риска. Состав показателей раннего предупреждения риска зависит от того, по причине каких факторов возникает риск. В случае если риск возникает по причине внутренних факторов, то в состав показателей раннего предупреждения риска целесообразно включить:

- количество фактов внутреннего мошенничества, разглашения работниками инсайдерской информации;
- количество фактов неисполнения или несвоевременного исполнения компанией своих обязательств перед клиентами и контрагентами;
- количество аварий, сбоев информационно-технологических систем и автоматизированных рабочих мест.

Если же риск возникает по причине внешних факторов, то в качестве критериев раннего предупреждения репутационного риска могут использоваться:

- показатель, характеризующий количество фактов внешнего мошенничества;
- параметры, характеризующие лояльность общественности к компании, например, количество жалоб и претензий к компании, обращений на компанию в суд;
- параметры, анализ динамики которых позволит компании сформировать мнение о настроениях контрагентов (например, количество обслуживаемых клиентов).

-

Одной из важнейших проблем оценки риска потери репутации является не только оценка его текущего состояния, но и прогнозирование потенциального возникновения проблем в будущем. Для этого необходимо обеспечить внутреннюю систему контроля и информирования службой риск-менеджмента. На основании аналитической информации, предоставленной службой риск-менеджмента, органы управления смогут принимать соответствующие управленческие решения, направленные на устранение излишнего влияния внешних и внутренних факторов репутационного риска, например:

- изменение политики в области подбора и расстановки кадров, в первую очередь руководителей служб, ужесточение требований к отдельным должностям;
- более тщательное распределение полномочий между органами управления, должностными лицами и службами банка;
- подразделений, занятых обслуживанием клиентов (в целях избежать оттока клиентуры), организация посещения работниками внешних семинаров;
- совершенствование системы внутреннего контроля, в том числе в области предотвращения легализации доходов, полученных незаконным путем, и финансирования террористической деятельности, в первую очередь методов идентификации клиентов;
- организация работы со средствами массовой информации, иных форм взаимодействия с общественностью и др.

### 3.3. Мониторинг риска

Основной задачей мониторинга риска потери деловой репутации является выявление причин, способствовавших появлению данного риска и их дальнейшая ликвидация. Мониторинг должен начинаться с анализа и контроля показателей, влияющих на репутацию компании. На основе установленных показателей и выбранной методики оценки риска потери деловой репутации делается вывод о состоянии репутации компании и наличии проблем. После этого определяются возможные источники падения репутации компании и выявляются причины этого процесса. В результате делается попытка как ликвидации истинных причин падения репутации или минимизации их влияния, так и ликвидации последствий этого процесса.

Ликвидация последствий может состоять в устранении источника падения репутации или, при невозможности, минимизации его негативного влияния на репутацию. Методы и способы ликвидации и минимизации выбираются и выстраиваются исходя из конкретного источника проблем, глубины и силы его влияния на репутацию и возможных вариантов решения. Они могут носить финансовый, организационный или гуманитарный характер. Закончив ликвидацию истинной причины или ее минимизацию необходимо провести мониторинг последствий. Истинная причина, как правило, имеет глубокие корни.

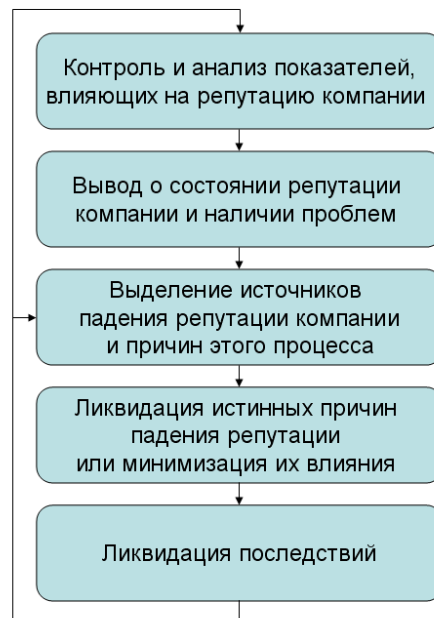


Рис 1. Алгоритм мониторинга риска потери деловой репутации.

Методы и способы ликвидации последствий тоже выбираются и выстраиваются исходя из природы выявленного последствия, его глубины и силы влияния на репутацию.

При отсутствии проблемных позиций при мониторинге можно говорить о том, что риск репутации компании опять минимален.

На рис. 1 представлен алгоритм мониторинга риска потери деловой репутации.

### *3.4. Контроль*

Чем больше организация, тем сложнее поддерживать репутацию, тем более осознанной должна быть политика в сфере репутационного менеджмента. Это подразумевает в первую очередь наличие процедур принятия решений по вопросам, в которых потенциально содержится риск утраты репутации (сделки по слияниям и поглощениям, увольнения топ-менеджмента и т. д.), развитие системы внутренних коммуникаций и поддержки лояльности внутренних аудиторий, регулярность информационного взаимодействия со всеми заинтересованными деловыми сообществами. Особенно это актуально для холдинговых компаний с диверсифицированным бизнесом. Очень часто, не имея стандартов управления репутацией, собственники не в состоянии удержать под контролем политику менеджмента в своих многочисленных активах, результатом чего становится падение их собственной репутации. Ценность этой стадии процесса управления РПДР заключается в возможности получить полноценную информацию, на которой может базироваться выверенная программа управления репутацией и дальнейшего мониторинга ее развития. Контроль в области управления репутационным риском осуществляется на различных уровнях уполномоченными и исполнительными органами управления компании, службой внутреннего аудита. Органы управления проводят оценку адекватности показателей раннего предупреждения риска, оценивают аналитические отчеты службы риск-менеджмента. Кроме того, контроль должен охватывать проверку своевременности и точности выполнения компанией мероприятий по снижению репутационного риска. На стадии контроля очень важна проверка соответствия деятельности компании принципам управления репутационными рисками. К этим принципам относятся:

1. Адекватность характеру и размерам деятельности компании.
2. Внесение оперативных изменений в случае изменения внешних и внутренних факторов.
3. Возможность количественной оценки соответствующих параметров.

4. Непрерывность проведения мониторинга.
5. Оценка риска и подготовка надлежащих мер производится одними и теми же людьми, одним и тем же подразделением компании.
6. Технологичность мероприятий репутационного управления.

Первый, пятый и шестой принципы не требуют пояснений. Второй принцип фактически означает наличие гибкого и динамичного инструментария репутационного риск-менеджмента, к которому можно отнести ситуационную корректировку наборов мероприятий и компонентов репутационной стратегии, ключевых сообщений, статуса фигур, являющихся спикерами или коммуникаторами в том или ином случае. При реализации третьего принципа одним из параметров такой оценки могут являться количество позитивных, негативных и нейтральных публикаций в СМИ, количество упоминаний персон в позитивном и негативном ключе, число положительных отзывов клиентов за анализируемый период и пр. Четвертый принцип предполагает выделение ситуационного (активного) и непрерывного (пассивного) управления репутационным риском. Пассивное управление риском состоит в отслеживании информационного поля, контроле источников негативной информации, их достоверности и силы.

## Заключение

До настоящего времени проблема анализа риска потери деловой репутации не достаточно изучена, несмотря на всю ее важность. До сих пор многие компании относят этот вид риска к второстепенным. Ошибочность этих взглядов выявилась во время финансового кризиса. Первыми компаниями, испытавшими на себе РПДР, были банки и страховые компании. Неслучайно, что те немногие разработки, которые имеются в настоящее время по исследуемой проблеме, выполнены для этих компаний. Существенным моментом является и то, что до сих пор не создан экономико-математический аппарат, позволяющий адекватно решить данную проблему.

В статье сделана попытка дать определение риска потери деловой репутации для любой компании, а не только для банков и страховых компаний. В статье также рассмотрены основные факторы этого вида риска и проанализирована система управления РПДР.

На основе изученного и представленного материала можно дать следующие практические рекомендации.

1. В рамках корпоративной стратегии следует разработать стандарт компании, содержащий перечень норм и нормативов, обязательных для выполнения, перечень недопустимых действий, а также перечень требований к сотрудникам фирмы.
2. Необходим мониторинг и непрерывный анализ даже минимальных нарушений репутационной стратегии компании, совершаемых отступлений от принятого стандарта.
3. На основании данных мониторинга следует выделять наиболее важные (приоритетные) и типовые риски для данной конкретной компании.
4. Приоритетные риски должны концентрироваться в определенном подразделении с целью минимизации этих рисков.
5. Необходимо ввести мотивацию укрепления корпоративной репутации и санкции за ее ухудшение со стороны подразделений предприятия или отдельных работников (за инициативы социального, рыночного, экологического характера, личные достижения, позитивную информацию в прессе и т.п.)
6. Необходимо разработать адекватную экономико-математическую модель, позволяющую оценивать РПДР.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Орлова Е. Быть эффективным и непротивным // Эксперт Урал. – 2004. – №47
2. Многоликая репутация // Эксперт Урал. – 2005. – №45  
([http://www.expert.ru/printissues/ural/2005/45/delovaya\\_reputatsiya/](http://www.expert.ru/printissues/ural/2005/45/delovaya_reputatsiya/))
3. «Исследование «Эрнст энд Янг» в области бизнес-рисков 2009. Десять основных рисков для международного бизнеса»  
(<http://www.ey.com/RU/ru/Issues/Managing-risk>)
4. Письмо ЦБ РФ от 23.06.2004 № 70-Т «О типичных банковских рисках»
5. Письмо ЦБ РФ от 30.06.2005 № 92-Т «Об организации управления правовым риском и риском потери деловой репутации в кредитных организациях и банковских группах»
6. Школин А. Как оценить деловую репутацию // Финанс. – 2004. – № 3
7. Interbrand World's Most Valuable Brand's 2001 Methodology. – Interbrand ([www.interbrand.com](http://www.interbrand.com))



## Применение трехкомпонентного индекса Тейла для оценки экономического неравенства субъектов РФ

Для современной России, с богатством и разнообразием ее регионов, проблема регионального экономического неравенства весьма актуальна, и ей посвящено немало работ в научной литературе (см., например, [1] и цитированную там литературу).

Целью настоящей работы является оценка экономического неравенства субъектов РФ на основе их макроэкономических показателей – валового продукта и численности населения.

### 1. ИНДЕКС ТЕЙЛА

Одним из наиболее широко используемых в исследованиях показателей неравенства является индекс Тейла, определяемый для совокупности (= множества)  $R$  регионов  $r$  по формуле [2]

$$T_R := \sum_{r \in R} \left[ \frac{Y(r)}{Y(R)} \cdot \log \frac{Y(r)/Y(R)}{N(r)/N(R)} \right] , \quad (1)$$

где  $Y(r)$ ,  $N(r)$  – валовый продукт (ВП) и численность населения региона;  $Y(R)$ ,  $N(R)$  – то же для всей совокупности  $R$ . Индекс  $T_R$  неотрицателен, и чем больше его значение, тем сильнее неравенство; равенство  $T_R = 0$  достигается только если все регионы одинаковы как по выпуску продукции, так и по численности населения.

1.1. *Двухступенчатое представление.* Важное преимущество индекса Тейла как меры **общего** регионального неравенства, состоит в том, что он обладает *свойством разложимости* (см. [1]): величину  $T_R$  можно представить как сумму двух слагаемых, каждое из которых отражает неравенство определенного **уровня**.

Поясним это подробнее. Пусть множество  $R$  представлено как совокупность  $G$  его непересекающихся подмножеств – *групп*  $g$ , образующих полное разбиение:

$$R = \bigcup_{g \in G} g , \quad (2)$$

причем каждый регион входит только в одну группу.

Всякая группа  $g$  состоит из некоторого количества первичных регионов  $r \in R$ . Можно подсчитать соответствующие этой группе продукт и население

$$Y(g) := \sum_{r \in g} Y_r \quad , \quad N(g) := \sum_{r \in g} N_r \quad , \quad (3)$$

и вычислить затем индекс Тейла *внутригруппового* регионального неравенства

$$T_g = \sum_{r \in g} \left[ \frac{Y(r)}{Y(g)} \cdot \log \frac{Y(r)/Y(g)}{N(r)/N(g)} \right] \quad . \quad (4)$$

Это можно проделать со всеми группами  $g \in G$ .

С другой стороны, в силу разбиения (2), мы можем рассматривать  $R$  как **совокупность групп**, и вычислить (по информации (3)) индекс Тейла *группового неравенства*

$$T_G := \sum_{g \in G} \left[ \frac{Y(g)}{Y(R)} \cdot \log \frac{Y(g)/Y(R)}{N(g)/N(R)} \right] \quad . \quad (5)$$

*Примечание.* Строго говоря, надо было бы заменить в (5)  $R$  на  $G$ , но это ничего не меняет: очевидно,  $Y(R) = Y(G)$ ,  $N(R) = N(G)$ . ♠

Точный смысл упомянутого выше свойства разложимости раскрывает следующее соотношение:

$$T_R = T_G + T_w \quad T_w := \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(G)} T_g \quad . \quad (6)$$

Здесь  $T_w$  – средневзвешенный (по валовому продукту) индекс внутригруппового неравенства. Формула (6) – это двухступенчатое (состоящее из двух *компонент*) представление общего регионального неравенства.

1.2. *Трехступенчатое представление.* Еще более полная картина неравенства получается (впервые предложено в работе Акита [3], см. ссылку в [4]), если индекс группового неравенства  $T_G$  представить, в свою очередь, в двухступенчатой форме, подобно тому как это было сделано с индексом  $T_R$ . Для это надо просто в описании п. 1.1 заменить термин "регион" на "группа".

Объединяя группы в более крупные образования  $h$  (назовем их *классы*, а их множество обозначим  $H$ ), получим разбиение множества групп  $G$  в форме, аналогичной (2):

$$G = \bigcup_{h \in H} h \quad , \quad (7)$$

где каждый класс  $h$  содержит некоторое количество групп. Все формулы (3)-(5) сохраняются при подстановке

$$r := g \quad , \quad g := h \quad , \quad R := G \quad , \quad G := H \quad .$$

В результате получается представление, аналогичное (6):

$$T_G = T_H + T_s \quad T_s := \sum_{h \in H} Y(h)T_h \quad , \quad (8)$$

и, наконец, окончательное *трехступенчатое представление*

$$T_R = T_H + T_s + T_w \quad . \quad (9)$$

Равенство (9) раскладывает индекс общего регионального неравенства  $T_R$  на компоненты трех уровней:

- $T_w$  – средневзвешенное по всем группам неравенство регионов внутри групп
- $T_s$  – средневзвешенное по всем классам неравенство групп внутри классов
- $T_H$  – неравенство классов в целом по всей совокупности  $R$ .

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ К СУБЪЕКТАМ РФ

2.1. *Методика*. Профессор Р.М.Мельников в работе [5] предлагает следующую иерархическую структуру *типологию* множества субъектов РФ (их общее количество 87): регион (субъект РФ) – группа – класс<sup>1</sup> (табл. 1). Типология построена с помощью многомерных методов статистического анализа на основе значений 45 показателей, отражающих качество жизни населения, уровень развития экономики, факторы и условия регионального развития.

---

<sup>1</sup>Именно эти термины использованы в Разделе 1.

**Типология субъектов РФ по уровню и факторам  
социально-экономического развития**

Классы	Группы	Регионы
1. Успешные регионы (32)	1. Столичные мегаполисы (2)	Москва, Санкт-Петербург
	2. Разработчики месторождений углеводородного сырья (3)	Ханты-Мансийский АО, Ямало- Ненецкий АО, Ненецкий АО
	3. Промышленные лидеры (12)	Ленинградская обл., Ярославская обл., Вологодская обл., Липецкая обл., Самарская обл., Татарстан, Башкортостан, Свердловская обл., Челябинская обл., Оренбургская обл., Тюменская обл., Кемеровская обл.
	4. Инновационно активные регионы (7)	Московская обл., Калужская обл., Воронежская обл., Нижегородская обл., Томская обл., Новосибирская обл., Омская обл.
	5. Относительно благополучные освоенные регионы севера (6)	Мурманская обл., Архангельская обл., Пермский край, Красноярский край, Саха, Коми
	6. Динамичные регионы северо- востока (2)	Сахалинская обл., Чукотский АО
2. Депрессивные регионы (36)	1. Индустриально- аграрные инфраструктурно обустроенные (7)	Белгородская обл., Курская обл., Рязанская обл., Краснодарский край, Удмуртия, Чувашия, Мордовия

	2. Аграрные (10)	Орловская обл., Тамбовская обл., Брянская обл., Ростовская обл., Ставропольский край, Ульяновская обл., Саратовская обл., Волгоградская обл., Астраханская обл., Марий Эл
	3. Старопромышленные (6)	Владимирская обл., Ивановская обл., Тверская обл., Тульская обл., Пензенская обл., Калининградская обл.
	4. Слабозаселенные (8)	Кировская обл., Псковская обл., Новгородская обл., Смоленская обл., Костромская обл., Карелия, Хакасия, Амурская обл.
	5. Неблагополучные регионы северо-востока (5)	Магаданская обл., Камчатская обл., Хабаровский край, Приморский край, Иркутская обл.
3. Слаборазвитые регионы (19)	1. Трудоизбыточные аграрные (11)	Карачаево-Черкессия, Дагестан, Калмыкия, Курганская обл., Алтайский край, Республика Алтай, Бурятия, Тыва, Читинская обл., Агинский Бурятский АО, Еврейская автономная обл.
	2. Перенаселенные отсталые (4)	Ингушетия, Северная Осетия – Алания, Кабардино-Балкария, Адыгея
	3. Неосвоенные удаленные (4)	Корякский АО, Усть-Ордынский Бурятский АО, Эвенкийский АО, Таймырский (Долгано-Ненецкий) АО

\*В скобках указано количество субъектов РФ в группе или классе.

В класс «успешные регионы» входят субъекты РФ, социально-экономическая ситуация в которых наиболее благополучна.

В класс «депрессивные регионы» включены субъекты РФ, которые в прошлом играли важную роль в экономике страны благодаря развитой промышленности и сельскому хозяйству, но вследствие рыночных преобразований в значительной степени утратили свою конкурентоспособность.

Наконец, представителей класса «слаборазвитые регионы» отличают крайне слаборазвитая социальная и транспортная инфраструктура, высокие показатели бедности и безработицы, низкий уровень среднедушевых денежных доходов населения.

При оценке масштабов регионального экономического неравенства необходимо учитывать различия покупательной способности денег в регионах. Корректировка региональных различий ВП на различия в уровнях цен в регионах в данной работе осуществлялась с использованием региональных индексов стоимости фиксированного набора потребительских товаров и услуг по следующей формуле:

$$Y_i^c = Y_i \times \frac{C}{C_i}, \quad (10)$$

где  $C$  – полусумма стоимостей фиксированного набора потребительских товаров и услуг в среднем по стране на конец данного и на конец предыдущего года,  $C_i$  – то же для региона  $i$ ,  $Y_i$  – ВП в регионе  $i$  в данном году,  $Y_i^c$  – ВП в регионе  $i$  в данном году с поправкой на межрегиональные различия цен [4].

2.2. Результаты. Результаты расчетов для регионов РФ за период с 2005 по 2008 г. приведены в табл. 2 и 3. Исходная информация взята из статистических сборников Госкомстата РФ "Регионы России. Социально-экономические показатели", 2006-2009 гг.

Расчеты показывают, что в течение исследуемого периода общее региональное экономическое неравенство в России изменялось разнонаправленно. С 2005 г. по 2006 г. масштабы неравенства увеличились почти в полтора раза, после чего резко сократились.

Таблица 2

**Индексы Тейла\*10<sup>3</sup> группового (Т<sub>h</sub>)  
и внутригруппового (Т<sub>g</sub>) неравенств, 2005-2008 гг.  
(для типологии табл. 1)**

Регионы		2005	2006	2007	2008
<b>Успешные регионы, Т<sub>h</sub></b>		14.2	130.1	132.7	127.7
<b>Т<sub>g</sub></b>	1.	14.7	1.6	2.1	18.9
	2.	0.3	0.1	313.1	0.1
	3.	65.1	181.5	23.6	78.0
	4.	1.5	2.6	18.3	2.4
	5.	3.0	1.2	0.3	0.9
	6.	0.5	0.1	0.3	0.2
<b>Депрессивные регионы, Т<sub>h</sub></b>		1.7	2.7	0.5	5.0
<b>Т<sub>g</sub></b>	1.	0.4	0.3	15.0	11.6
	2.	0.8	2.8	58.9	11.8
	3.	2.1	0.4	20.0	0.6
	4.	0.4	0.4	54.8	0.2
	5.	0.6	0.3	0.9	0.3
<b>Слаборазвитые регионы, Т<sub>h</sub></b>		0.4	0.4	16.2	23.2
<b>Т<sub>g</sub></b>	1.	1.2	1.1	34.9	1.0
	2.	0.3	0.3	51.5	0.3
	3.	0.3	0.2	0.3	0.3

Таблица 3

**Общее региональное неравенство Т<sub>R</sub> и его компоненты**

	2005		2006		2007		2008	
	Индекс	Доля, %	Индекс	Доля, %	Индекс	Доля, %	Индекс	Доля, %
Т <sub>w</sub> (внутригрупповая компонента)	0.0910	30.71	0.2029	44.98	0.1201	30.77	0.1263	32.53
Т <sub>s</sub> (групповая компонента)	0.1163	39.22	0.1333	29.54	0.1493	38.25	0.1329	34.25
Т <sub>h</sub> (классовая компонента)	0.0891	30.06	0.1149	25.47	0.1209	30.97	0.1289	33.22
Т <sub>R</sub> (общее неравенство)	0.2964	100.00	0.4511	100.00	0.3904	100.00	0.3881	100.00

По величине группового неравенства на первом месте находится класс «успешные регионы». Индексы Тейла для него на несколько порядков превышают соответствующие показатели классов «депрессивные регионы» и «слаборазвитые регионы».

Масштабы внутригруппового неравенства наиболее высоки на протяжении всего рассматриваемого периода в группе «промышленные лидеры», состоящей из 12 регионов.

Использование предложенной Мельниковым Р.М. сетки регионов позволяет сделать вывод о том, что в период с 2005 по 2008 г в российской экономике масштабы классового, группового и внутригруппового неравенства различались незначительно (за исключением 2006 г., когда внутригрупповое неравенство резко увеличилось).

Из табл. 3 видно, что наибольший вклад в общее региональное неравенство осуществлялся за счет его групповой компоненты на протяжении всего рассматриваемого периода, за исключением 2006 г., когда почти в полтора раза возрос вклад внутригрупповой компоненты.

Таким образом, использование трехступенчатого представления индекса Тейла позволяет раскрыть структуру регионального экономического неравенства, что особенно актуально для стран с таким неоднородным экономическим пространством, как Россия.

## Литература

1. Мельников Р.М. Анализ динамики межрегионального экономического неравенства: зарубежные подходы и российская практика. // Регион: экономика и социология, 2005, №4, с. 3-18.
2. Theil H. Economics and information theory.- Amsterdam, 1967.
3. Akita, T. Decomposing Regional Income Inequality using a Two-Stage Nested Theil Decomposition Method. International Development Working Paper Series 2, IUJ Research Institute, International University of Japan, 2000.
4. Akita T., Kawamura K. Regional income inequality in China and Indonesia: comparative analysis, //Conference papers ersa02 (European Regional Science Association), 2002.
5. Мельников Р.М. Проблемы теории и практики государственного регулирования экономического развития регионов. РАГС, М., 2006.



## ДОПОЛНЕНИЕ РЕДАКТОРА

Считаю целесообразным прокомментировать использованный в работе И.В.Роговиной индекс Тейла группового экономического неравенства.

1. *Индекс Тейла.* В монографии [2] Г.Тейл ввел энтропийный индекс неравенства совокупности индивидов – экономических агентов  $S = \{i = 1, \dots, N\}$ , каждый из которых ( $i$ ) характеризуется доходом  $Y_i > 0$  ( в статье – объемом выпуска некоторого продукта). Тейл определяет индекс неравенства, присущий данной совокупности формулой

$$T_S = H_{\max} - H(S) = \log N - H(S) \quad . \quad (1)$$

Здесь

- $H(S)$  – энтропия по Шеннону совокупности  $S$

$$H(S) := - \sum_{i \in S} \frac{Y_i}{Y(S)} \log \frac{Y_i}{Y(S)} \quad Y(S) := \sum_{i \in S} Y_i > 0 \quad (2)$$

- $H_{\max}$  – максимальное значение энтропии, равное  $\log N$  и достигаемое при  $Y_i/Y(S) = 1/N \quad \forall i$

Итак, по Тейлу экономическое неравенство измеряется отклонением энтропии от ее максимального значения, достигаемого при полном равенстве долей агентов в выпуске совокупного продукта. Максимальное значение индекса  $T_S$  соответствует минимальному значению энтропии ( $H(S) = 0$  ,  $T_S = \log N$ ) и достигается, когда весь продукт производится единственным агентом, а все остальные ничего не производят.

В [2] показано, что индекс (1) **индивидуального** неравенства может быть представлен в двухступенчатой форме, в которой появляется индекс **группового** неравенства; приведем здесь авторскую выкладку.

Разобьем множество  $S$  на совокупность  $G$  (непересекающихся) *групп*  $g$ , каждая из которых состоит из некоторого количества ( $\geq 1$ ) индивидов. Для произвольной группы  $g \in G$  обозначим через  $Y(g)$  совокупный продукт всех агентов и выделим в энтропии  $H(S)$  ту часть, которая приходится на данную группу

$$- \sum_{i \in g} \frac{Y_i}{Y(S)} \log \frac{Y_i}{Y(S)} = - \frac{Y(g)}{Y(S)} \cdot \sum_{i \in g} \frac{Y_i}{Y(g)} \left[ \log \frac{Y_i}{Y(g)} + \log \frac{Y(g)}{Y(S)} \right] =$$

$$= \frac{Y(g)}{Y(S)} \cdot \left[ H(g) - \log \frac{Y(g)}{Y(S)} \right] \quad Y(g) := \sum_{i \in g} Y_i \quad ; \quad (3)$$

в этом соотношении  $H(g)$  – энтропия группы  $g$ , рассматриваемой, подобно  $S$ , как совокупность экономических агентов. Суммируя (3) по всем группам, получим представление индекса (1) в следующей форме:

$$\begin{aligned} T_S &= \log N - \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} \cdot \left[ H(g) - \log \frac{Y(g)}{Y(S)} \right] = \\ &= \log N - \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} \log N(g) + \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} \log \frac{Y(g)}{Y(S)} + \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} [\log N(g) - H(g)] = \\ &= \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} \log \frac{Y(g)/Y(S)}{N(g)/N} + \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} T_g \quad , \end{aligned} \quad (4)$$

здесь  $N(g)$  – количество индивидов в группе  $g$ , и, соответственно,  $T_g$  – индекс Тейла индивидуального неравенства, присущего группе  $g$ .

В этом представлении первая сумма представляет собой индекс Тейла  $\tilde{T}$  группового неравенства, характеризующий неравенство, присущее совокупности групп:

$$\tilde{T}_G := \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} \log \frac{Y(g)/Y(S)}{N(g)/N} \quad , \quad (5)$$

а вторая сумма – это средневзвешенный (по выпуску продукта) индекс Тейла  $wT$  внутригруппового индивидуального неравенства:

$$wT_G := \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(S)} T_g = \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(G)} T_g \quad . \quad (6)$$

Таким образом, двухступенчатое представление состоит в разложении индекса общего индивидуального неравенства на две *компоненты*:

$$T_S = \tilde{T}_G + wT_G \quad . \quad (7)$$

*Примечание.* Если все группы состоят из одного агента, то

$$T_g = 0 \quad \forall g \quad , \quad wT_G = 0 \quad , \quad T_S = T_G \quad . \quad \spadesuit$$

2. Свойства индекса группового неравенства. Согласно п. 1, индекс индивидуального неравенства  $T$  обладает следующими свойствами:

С1.  $T_S \in [0, N]$  ;

С2. разложимость  $T_S$  – представление в двухкомпонентной форме (7). Покажем, что аналогичные свойства сохраняются и у индекса  $\tilde{T}$  группового неравенства.

2.1. Свойство С1 – разложимость  $\tilde{T}$ . Покажем, что свойство С2 выполняется. Рассмотрим некоторую совокупность  $G$  групп, каждая из которых ( $g$ ) характеризуется численностью индивидов  $N(g)$  и выпуском продукта  $Y(g)$ . Неравенство, присущее совокупности  $G$  оценивается индексом Тейла

$$\tilde{T}_G := \sum_{g \in G} \frac{Y(g)}{Y(G)} \log \frac{Y(g)/Y(G)}{N(g)/N(G)} \quad Y(G) := \sum_{g \in G} Y(g) \quad , \quad (8)$$

*Примечание.* Если совокупность  $G$  представляет собой разбиение множества индивидов  $S$  (что, вообще говоря, сейчас не предполагается), то  $Y(G) = Y(S)$ , и тогда (8) совпадает с (5). ♠

Пусть совокупность  $G$  разбита на более крупные непересекающиеся образования – *кластеры*, каждый из которых содержит некоторое количество ( $\geq 1$ ) групп; будем обозначать кластеры буквой  $h$ , а всю их совокупность буквой  $H$ . Рассмотрим, как и ранее, некоторый кластер  $h \in H$ , обозначим через  $Y(h)$  совокупный продукт этого кластера и выделим в индексе (8) ту часть, которая относится к данному кластеру:

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in h} \frac{Y(g)}{Y(G)} \log \frac{Y(g)/Y(G)}{N(g)/N(G)} = \\ & = \frac{Y(h)}{Y(G)} \cdot \sum_{g \in h} \left[ \frac{Y(g)}{Y(h)} \left( \log \frac{Y(g)/Y(h)}{N(g)/N(h)} + \log \frac{Y(h)/Y(G)}{N(h)/N(G)} \right) \right] = \\ & = \frac{Y(h)}{Y(H)} \left[ \tilde{T}_h + \log \frac{Y(h)/Y(G)}{N(h)/N(G)} \right] . \end{aligned}$$

Суммируя по всем кластерам, получаем

$$\tilde{T}_G = \sum_{h \in H} \sum_{g \in h} \frac{Y(g)}{Y(G)} \log \frac{Y(g)/Y(G)}{N(g)/N(G)} =$$

$$= \sum_{h \in H} \frac{Y(h)}{Y(H)} \tilde{T}_h + \sum_{h \in H} \frac{Y(h)}{Y(H)} \log \frac{Y(h)/Y(H)}{N(h)/N(H)} ; \quad (9)$$

в последнем переходе учтены равенства  $Y(H) = Y(G)$ ,  $N(H) = N(G)$ . Вторая сумма в (9) равна  $\tilde{T}_H$ , а первая – это усредненная (по выпуску продукции) сумма  $w\tilde{T}$  внутрикластерных индексов группового неравенства.

Итак, индекс группового неравенства представим в двухкомпонентной форме, аналогичной (7):

$$\tilde{T}_G = \tilde{T}_H + w\tilde{T}_H ; \quad (10)$$

эта формула и была использована в статье (см. формулу (6) статьи).

*Примечание.* По-видимому, формула (10) разложения индекса  $\tilde{T}$  была получена впервые в работе [3] (к сожалению, труднодоступной); в первоисточнике [2] она отсутствует, получена только формула (7). Р.М.Мельников в своей работе [1] использует формулу (10), но не приводит никакой ссылки и не дает ее вывода. Это обстоятельство послужило, отчасти, поводом к тому, чтобы дополнить статью Роговиной. ♠

2.2. Свойство С2 – интервал изменения индекса  $\tilde{T}$ . Можно было бы думать, что при фиксированных значениях параметров  $N, K$  границы изменения индекса зависят от них обоих, однако это не так – свойство С2 сохраняется, независимо от количества групп  $K$ ; это вытекает из следующей леммы.

**Лемма.** Для любой совокупности групп  $G$  индекс группового неравенства  $\tilde{T}_G$  может быть представлен как индекс  $T_S$  индивидуального неравенства с количеством индивидов  $N = N(G)$ .

*Доказательство.* Будем считать, что все индивиды группы  $g \in G$  производят одинаковое количество продукта  $Y_i = Y(g)/N(g)$  и рассмотрим индекс  $T_S$  совокупности индивидов

$$S := \bigcup_{g \in G} \bigcup_{i \in g} i \quad ( \Rightarrow N = \sum_{g \in G} N(g) = N(G) ) .$$

Применяя к индексу  $T_S$  формулу (7) и учитывая, что  $T_g = 0 \quad \forall g \in G$  (и, следовательно  $wT_G = 0$ ), получим  $T_S = \tilde{T}_G$ , что и требовалось. ♠

В.З.Беленький

## Раздел 2. Модели финансовых и рыночных механизмов

С.А. Смоляк

### МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ИЗНОСА МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ - II

#### 1. Постановка задачи

Настоящая статья является продолжением [1] и обобщением полученных результатов на более реалистичную ситуацию функционирования машин и оборудования в современной экономике.

Вначале нам придется повторить некоторые исходные положения работы [1]. Под “машинами” мы понимаем отдельно оцениваемые установки, машины, оборудование и транспортные средства и будем подразделять их на *виды*, а каждый вид — на *марки* (этим термином охватываются и модели и модификации). Примем, что разные марки машин одного вида используются для одних и тех же целей: они способны производить ту же продукцию, выполнять те же работы или оказывать те же услуги (в противном случае будем относить их к другому виду машин). Тем самым они “взаимозаменяемы” и являются товарами, конкурирующими друг с другом на рынке. Поэтому машина — это типичный представитель *массового* имущества, которое серийно изготавливается (производится, создается) и обращается на рынке в достаточно большом количестве. Рынок машин каждого вида делится на первичный и вторичный. На *первичном* рынке продаются машины *в новом состоянии* (только что изготовленные<sup>1</sup>), на *вторичном* — подержанные (бывшие в эксплуатации).

Независимо от того, обращается ли на рынке продукция, производимая машиной, или нет, ее использование приносит владельцу определенные *выгоды*. Их можно определить как рыночную стоимость произведенной продукции за вычетом затрат по эксплуатации машины — такой показатель близок по содержанию к так называемой “прибыли до начисления амортизации и уплаты процентов и налогов” (*Earnings before Interests, Taxes, Depreciation and Amortization*), если в составе затрат не учитываются налоги, и с так называемым чистым операционным доходом, если их учитывать. Если машина производит промежуточную продукцию или отдельные технологические операции, то такие результаты работы, хотя и не обращаются на рынке, тоже обладают определенной полезностью для владельца и потому, теоретически, имеют рыночную

---

<sup>1</sup> Мы не используем термин “новые”, обозначающий машины новых марок, которые только начинают поступать на рынок.

стоимость, отражающую их “вклад” в рыночную стоимость готовой продукции. Другое дело, что эта рыночная стоимость не может быть измерена “непосредственно”.

В процессе старения машина подвергается *физическому износу*. В конечном счете он проявляется в том, что приносимые машиной выгоды с течением времени имеют общую тенденцию к снижению (разумеется, после ремонта показатели машины улучшаются, однако указанная тенденция все равно сохраняется).

При оценке рыночной стоимости машины [2] предполагается, что после даты оценки она будет использоваться экономически рационально. При этом в конце концов наступает момент, когда ее дальнейшее использование становится неэффективным, невыгодным. Этот момент определяет *срок службы машины*, когда она должна быть *утилизирована* — передана в сферу вторичного использования. При утилизации владелец машины получает определенные доходы и несет некоторые расходы. Разность между ними определяет утилизационное сальдо машины, которое может быть как положительным, так и отрицательным.

Для оценки основных средств часто используется *сравнительный (рыночный)* подход, когда стоимость объекта оценивается по данным о ценах сделок с аналогичными объектами. При оценке подержанных машин такой подход не всегда удается реализовать, т.к. из данных о реальных сделках или объявлений о продаже не всегда можно установить, действительно ли проданная или предлагаемая к продаже машина находится в таком же техническом состоянии, что и оцениваемая. Кроме того, “подержанность” машины может быть разной, так что цены на вторичном рынке имеют гораздо большую вариацию, чем на первичном. По этой причине гораздо чаще сравнительный подход применяют в сочетании с затратным. Это выглядит следующим образом: вначале, опираясь на данные о ценах *первичного* рынка, оценивают стоимость машины данной марки в новом состоянии — *восстановительную стоимость* (ВС), а затем корректируют ее с учетом износа оцениваемой машины (см. ниже). Для такой корректировки используют обычно таблицы или функции, отражающие уменьшение стоимости машины в зависимости от ее возраста.

При *доходном* подходе рыночная стоимость машины оценивается исходя из тех (чистых) выгод, которые она будет приносить в будущем, а именно — как их дисконтированная сумма за оставшийся срок службы. Важно, что эти выгоды должны относиться к наилучшему, *наиболее эффективному способу использования* машины (НЭИ) с тем, чтобы получающаяся в результате оценка стоимости машины была наибольшей.

В общем случае машины могут эксплуатироваться и утилизироваться разными способами. Однако из принципа НЭИ вытекает, что чистые выгоды должны прогнозироваться оценщиком применительно к наиболее эффективным способам эксплуатации и утилизации машины. При этом утилизационное сальдо, отвечающее наиболее эффективному способу утилизации машины, будет ее *утилизационной стоимостью* (*salvage value*). Обычно она составляет 4-9% от стоимости машины в новом состоянии. Мы будем считать ее известной величиной.

Срок службы машины, отвечающий наиболее эффективному способу эксплуатации, будем называть *рациональным*, измерять в годах и обозначать через  $T$ . Обычно такие сроки известны и не слишком велики.

Задача, решаемая в этой статье, состоит в обосновании метода определения стоимости подержанной машины по известной информации о ее рациональном сроке службы, восстановительной и утилизационной стоимости. Для этого мы построим экономико-математическую модель износа машины, рассматривая процесс износа машины в непрерывном времени. В отличие от [1], при этом мы будем учитывать инфляцию, налоги на имущество (по ставке  $m$ ) и на прибыль (по ставке  $n$ ), а также расходы на страхование (уплачиваемые по ставке  $q$  от рыночной стоимости страхуемой машины).

## 2. Модель износа машины

Рассматриваются машины определенной марки разного возраста в один и тот же момент времени  $0$ , являющийся датой оценки. Пусть  $T$  — рациональный срок службы этих машин,  $K(t)$  — стоимость машины в возрасте  $t$ . Тогда величина  $K(T)$  будет отражать утилизационную стоимость машин данной марки, которую мы обозначим через  $U$  и будем считать известной. Интенсивность выгод от наиболее эффективного использования машины возраста  $t$  обозначим через  $B(t)$ . При этом выгоды, получаемые за малый отрезок  $dt$ , составят  $B(t)dt$ . При оценке имущества оценщики обычно не имеют информации о налогах на имущество и прибыли и страховых платежах, уплачиваемых владельцем имущества. Поэтому далее мы принимаем, что величины  $B(t)$  отражают выгоды до осуществления указанных расходов, так что соответствующие выгоды будут близки по содержанию к “прибыли до начисления амортизации и уплаты процентов и налогов”.

Для построения искомой модели используем лежащий в основе методов *доходного подхода* к оценке имущества принцип дисконтирования, который (в детерминированной ситуации) можно сформулировать так:

Стоимость имущества на дату оценки =  
 = дисконтированные выгоды от рационального использования имущества  
 в течение некоторого периода +  
 +дисконтированная стоимость имущества в конце периода.

Рассмотрим участника рынка, который в момент 0 приобретает машину в возрасте  $t$  лет по рыночной стоимости  $K(t)$ , использует ее в течение малого интервала времени  $\varepsilon$  и затем продает (также по рыночной стоимости). Рассчитаем чистые выгоды этого участника, учитывая при этом указанные выше основные факторы.

Для этого заметим, что купленная машина будет поставлена на баланс по цене приобретения  $K(t)$ , так что за время  $\varepsilon$  на нее будет начислена амортизация  $K(t)a(t)\varepsilon$  (здесь  $a(t)$  — амортизационная ставка). При этом в момент времени  $\varepsilon$  машина будет иметь остаточную (налоговую) стоимость  $K(t) - K(t)a(t)\varepsilon$ . Налогооблагаемую прибыль от *использования* машины за время  $\varepsilon$  получим, вычитая из получаемых выгод  $B(t)\varepsilon$  амортизацию, налог на имущество  $mK(t)\varepsilon$  и расходы на страхование  $qK(t)\varepsilon$ . Она составит:

$$B(t)\varepsilon - K(t)a(t)\varepsilon - mK(t)\varepsilon - qK(t)\varepsilon = \{B(t) - K(t)[a(t) + m + q]\}\varepsilon.$$

В момент времени  $\varepsilon$  машина, возраст которой будет уже  $t + \varepsilon$ , продается по (новой) рыночной стоимости. Обозначим ее временно через  $K_1(t + \varepsilon)$ . Налогооблагаемой прибылью от *продажи* здесь будет цена продажи за вычетом остаточной стоимости машины, т.е.  $K_1(t + \varepsilon) - [K(t) - K(t)a(t)\varepsilon]$ . Суммируя прибыли от использования и от продажи машины, найдем совокупную прибыль:

$$\begin{aligned} & \{B(t) - K(t)[a(t) + m + q]\}\varepsilon + K_1(t + \varepsilon) - [K(t) - K(t)a(t)\varepsilon] = \\ & = K_1(t + \varepsilon) - K(t) + [B(t) - (m + q)K(t)]\varepsilon. \end{aligned}$$

Налог на прибыль (по ставке  $n$ ) при этом будет равен

$$n\{K_1(t + \varepsilon) - K(t) + [B(t) - (m + q)K(t)]\varepsilon\}.$$

Обратим внимание, что размер налога при этом не зависит от выбранной владельцем амортизационной политики.

Учтем теперь, что все указанные выше денежные поступления и расходы представлены в номинальном выражении, без корректировки на инфляцию. Тогда, в соответствии с принципом дисконтирования стоимость машины на дату оценки равна сумме дисконтированных (по номинальной посленалоговой ставке  $\rho$ ) посленалоговых чистых выгод от ее последующего использования. В данном случае эти чистые выгоды будут включать доналоговые выгоды  $B(t)\varepsilon$  и выручку  $K_1(t + \varepsilon)$  от продажи



машины в момент времени  $\varepsilon$ , за вычетом налогов на имущество  $mK(t)\varepsilon$  и на прибыль  $n\{K_1(t+\varepsilon) - K(t) + [B(t) - (m+q)K(t)]\varepsilon\}$  и расходов на страхование  $qK(t)\varepsilon$ . Если отнести все эти составляющие, кроме выручки от продажи, к дате оценки, то с точностью до малых более высокого порядка данное условие примет следующий вид:

$$K(t) \approx B(t)\varepsilon - (m+q)K(t)\varepsilon - n\{K_1(t+\varepsilon) - K(t) + [B(t) - (m+q)K(t)]\varepsilon\} + (1-\rho\varepsilon)K_1(t+\varepsilon) \approx (1-n-\rho\varepsilon)K_1(t+\varepsilon) + nK(t) + (1-n)[B(t) - (m+q)K(t)]\varepsilon. \quad (1)$$

Для получения искомой модели теперь необходимо конкретизировать величину стоимости машины в момент ее продажи —  $K_1(t+\varepsilon)$ . Это потребует самостоятельного подробного рассмотрения.

Как уже говорилось, для оценки подержанных машин оценщики часто используют таблицы или формулы для коэффициентов, отражающих соотношение стоимости подержанной машины и машины той же марки в новом состоянии. В нашей модели эту роль играют величины  $k(t) = K(t)/K(0)$  — коэффициенты годности<sup>2</sup>. Оказывается, что такие коэффициенты достаточно стабильны во времени и близки для машин одного вида разных марок.

Но что означает стабильность таких коэффициентов? Предположим, что сейчас и год тому назад значения  $k(t)$  оказались одинаковыми. Это значит, за прошедший год стоимость машин в новом состоянии и стоимость подержанных машин той же марки возраста  $t$  изменилась одинаково, т.е. темпы роста цен на первичном рынке были такими же, как и на вторичном. Такую инфляцию можно назвать *видовой*. Допущение о видовом характере инфляции не является чем-то необычным. Так, например, при оценке эффективности строительных и иных реальных инвестиционных проектов приходится учитывать как рост цен на жилые и офисные помещения, так и рост затрат на строительные-монтажные работы. В этих целях в расчеты закладываются некоторые средние прогнозируемые темпы роста указанных цен и затрат. По существу, в таких расчетах предполагаются одинаковые темпы роста цен на любые (а не только сооружаемые по проекту) жилые и офисные помещения (любые виды строительные-монтажные работ). Далее, нередко возникают ситуации, когда известно, по какой цене была приобретена машина несколько лет

<sup>2</sup> В американской литературе их выражают в процентах и именуют процентами годности (Percent Good Factor), российские оценщики используют их дополнение до 100% и именуют процентами износа.

тому назад, но неизвестно, по какой цене такая же машина продается на дату оценки. В таких ситуациях оценщики применяют к машинам любого возраста индексы-дефляторы, отражающие темпы роста цен на данные машины в новом состоянии в ретроспективном периоде (этот метод описан, например, в [3, с.101-102]; значения таких индексов для США указаны, например, в [4, 5]). Другими словами, и здесь инфляция также считается видовой.

Разумеется, предположение о видовом характере инфляции, т.е. о пропорциональном росте цен на первичном и вторичном рынках (или о стабильности коэффициентов годности во времени) может и неточно отражать рыночную ситуацию. Однако оно позволяет хотя бы приближенно учесть инфляцию при оценке машин и не требует для этого чрезмерно большого объема исходной информации. И в самом деле, чтобы учесть инфляцию, оценщику необходимо ее спрогнозировать. Для этого он обычно использует информацию об изменении цен на машины в предшествующем периоде. Наиболее подробной при этом будет информация о ценах первичного рынка, тогда как данные вторичного рынка обычно оказываются непредставительными (не так уж часто в распоряжении оценщика оказываются цены достаточно большого числа сделок, совершенных в разное время, но с машинами одного и того же вида, марки и возраста). В таком случае оценщик сможет только дать прогноз инфляции на первичном рынке, т.е. спрогнозировать, как будут меняться в ближайшее время стоимости машин в новом состоянии. Именно на эту информацию (темп видовой инфляции  $i$ ) мы и будем опираться.

Напомним, что нашей очередной задачей является определение рыночной стоимости  $K_1(t+\varepsilon)$  машины возраста  $t+\varepsilon$  в момент  $\varepsilon$ . Если бы инфляции не было, то эта стоимость была бы точно такой же, как и у машины возраста  $t+\varepsilon$  в момент 0, т.е.  $K(t+\varepsilon)$ . Однако, если цены купли-продажи машин растут с темпом  $i$ , то за время  $\varepsilon$  их рыночные стоимости вырастут в  $1+i\varepsilon$  раз. В таком случае должно выполняться равенство:

$$K_1(t+\varepsilon) = (1+i\varepsilon)K(t+\varepsilon). \quad (2)$$

Это значит, что функции  $K_1(t)$  и  $K(t)$  отличаются друг от друга только постоянным множителем  $1+i\varepsilon$ .

Подставляя (2) в (1) и преобразуя, получим с точностью до малых более высокого порядка:

$$K(t) \approx K(t) + (1-n)\varepsilon \left\{ K'(t) - \left[ \frac{\rho}{1-n} - i + m + q \right] K(t) + B(t) \right\}.$$

Легко видеть, что такое равенство возможно только, если

$$K'(t) - \omega K(t) + B(t) = 0, \quad (3)$$

где

$$r = \frac{\rho}{1-n} - i + m + q. \quad (4)$$

Граничное условие для этого дифференциального уравнения выражает тот факт, что в конце рационального срока службы стоимость машины совпадает с утилизационной:

$$K(T) = U. \quad (5)$$

Решением уравнения (3) с этим граничным условием будет:

$$K(t) = \int_t^T e^{-r(s-t)} B(s) ds + Ue^{-r(T-t)}. \quad (6)$$

Заметим теперь, что срок службы машины  $T$  отвечает ее наиболее эффективному использованию, при котором стоимость машины оказывается наибольшей, т.е. максимизируется значение  $K(t)$  при любом  $t < T$ . Приравняв производную по  $T$  правой части (6) к нулю, получим необходимое условие оптимума:

$$B(T) = rU. \quad (7)$$

В случае, когда интенсивность приносимых машиной выгод уменьшается с возрастом, это условие определяет оптимальный срок службы однозначно.

Выясним теперь экономический смысл полученных результатов.

Формула (6) по внешнему виду напоминает известную формулу, представляющую стоимость машины суммой дисконтированных выгод от ее последующего использования до конца срока службы (включая выгоды от утилизации). Однако это лишь внешнее сходство. На самом деле в формулу входят выгоды, приносимые машинами разного возраста в один и тот же момент времени 0 (на дату оценки), а стоящие перед этими выгодами экспоненциальные множители имеют смысл весов, придаваемых указанным машинам.

Тем не менее, показатель  $r$  имеет смысл ставки дисконтирования. Чтобы прояснить его экономическое содержание, заметим, что в общем случае ставка дисконтирования отражает доходность альтернативных направлений инвестирования, а такими обычно бывают вложения в финансовые инструменты. Поэтому обычно ставку дисконтирования принимают по данным фондового рынка на уровне доходности тех или иных финансовых инструментов (скажем, акций, облигаций или депозитов). Естественно, что все публикуемые данные о таких доходностях — доналоговые, не учитывающие тех налогов (на дивиденды

или на прирост капитала), которые уплачивает владелец ценных бумаг. Таким образом, фондовый рынок позволяет установить доналоговую ставку дисконтирования ( $\omega$ ). В то же время в расчетах эффективности инвестиционных проектов и при оценке бизнеса по посленалоговым денежным потокам используется иная, посленалоговая ставка дисконтирования. Именно эта ставка ( $\rho$ ) использовалась и нами при выводе уравнения (3). Для того, чтобы получить посленалоговую доходность ценных бумаг, необходимо умножить соответствующую доналоговую доходность ( $\omega$ ) на так называемый “налоговый корректор” — дополнение ставки налога на прибыль до единицы ( $1-n$ ). Поэтому обычно принимается, что  $\rho = \omega(1-n)$ . Но тогда

$$r = \frac{\rho}{1-n} - i + m + q = \omega - i + m + q. \quad (8)$$

Заметим теперь, что (доналоговые) доходности финансовых инструментов всегда определяются в номинальном выражении, т.е. без корректировок на инфляцию. Вычитая из такой доходности темп инфляции, мы получаем ту же доходность в *реальном* выражении. Это значит, что ставка  $r$  по смыслу является реальной и доналоговой. В то же время она существенно отличается от “обычных” реальных доналоговых ставок: во-первых, в ней учитывается не темп общей инфляции в стране, а тем роста цен на машины данной марки, а во-вторых, она учитывает также ставки налога на имущество и страховых платежей. И то и другое совершенно естественно, поскольку она применяется для “дисконтирования” выгод, в которых не учитываются ни налоги на имущество и прибыль, ни страховые платежи.

Учитывая изложенное, ставку  $r$  естественно трактовать как *специальную доналоговую* ставку дисконтирования.

Укажем два важных свойства функции  $K(t)$ :

1. Поскольку  $K(T) = U$ ,  $B(T) = rU = rK(T)$ , то из равенства (3) при  $t=T$  следует:  $K'(T) = rK(T) - B(T) = 0$ . Это значит, что график функции  $K(t)$  имеет в конце срока службы горизонтальную касательную.

2. Дифференцируя (3), найдем:  $K''(t) = rK'(t) - B'(t)$ . Подставляя сюда  $t=T$ , получаем:  $K''(T) = -B'(T)$ . Но функция  $B(t)$  убывающая, поэтому  $B'(T) < 0$ , так что  $K''(T) > 0$ . Это означает, что функция  $K(t)$  в конце срока службы выпукла вниз (т.е. *износ не может возрастать прогрессивно*).

Вернемся теперь к равенству (3) и представим его в дифференциальной форме:

$$B(t)dt = [-dK(t)] + rK(t)dt. \quad (9)$$

Это равенство допускает такую трактовку:

выгоды, приносимые машиной за малый отрезок времени, являются суммой уменьшения стоимости машины за это время (“экономическая амортизация”) и дохода на вложенный в машину капитал за это время при уровне доходности, равном специальной ставке дисконтирования.

Аналогичный результат применительно к значительно более простой (безналоговой) модели был получен нами в [1].

### 3. Учет технического прогресса

Сделанное выше предположение о видовом характере инфляции чрезмерно ограничительное. Мы уже отмечали, что значения коэффициентов годности, рассчитанные в разные годы, близки. Однако периодически такие таблицы корректируются. Одна из причин этого очевидна: с течением времени оценщики получают больше информации о зависимости стоимости машин от возраста и каждая новая зависимость  $k(t)$  уточняет предыдущую. Если бы дело было только в этом, то зависимости, построенные в разные годы, колебались бы вокруг некоторой средней зависимости. Между тем, есть и другая причина, обуславливающая некоторое систематическое изменение зависимостей  $k(t)$  со временем. Это — технический прогресс в машиностроении.

Время от времени на рынке появляются новые марки машин, производящие ту же продукцию, но более эффективные по сравнению с существующими. Это значит, что появляется более эффективный способ производства этой продукции. Когда с его помощью будет производиться достаточно большая часть продукции (т.е. когда машины новой марки составят значимую долю машинного парка), то рыночная стоимость продукции будет определяться именно этим, наиболее эффективным способом ее производства. Следовательно, эта рыночная стоимость уменьшится. Поскольку затраты по эксплуатации существующих машин при этом не изменятся, то уменьшатся выгоды, приносимые этими машинами. Соответственно, при этом уменьшатся и стоимости этих машин. Однако, что для нас более важно, при этом **сократится и срок рационального использования этих машин**. И действительно, мы нередко наблюдаем, как в связи с техническим прогрессом сокращаются сроки службы компьютеров, телевизоров и иной техники. То же самое происходит и с другими видами машин, просто темпы сокращения сроков службы здесь небольшие.

Постараемся учесть в нашей модели влияние технического прогресса. Предположим, что темп сокращения сроков службы машин данной марки известен и составляет  $\lambda$ . Другими словами, если на дату оценки срок

рационального использования машин составлял  $T$  лет, то через время  $\varepsilon$  он будет составлять  $T/(1+\pi\varepsilon)$  лет. Здесь уже нельзя утверждать, что функции  $K_1(t)$  и  $K(t)$  отличаются друг от друга только постоянным множителем: вторая “заканчивается” по достижении возраста  $T$ , тогда как первая — при достижении меньшего возраста  $T/(1+\pi\varepsilon)$ . Поэтому естественно принять, что график функции  $K_1(t)$  получается из графика функции  $K(t)$  не только растяжением в  $1+i\varepsilon$  раз вдоль оси ординат, но и сжатием в  $1+\pi\varepsilon$  раз вдоль оси абсцисс. В таком случае вместо (2) должно выполняться равенство:

$$K_1(t + \varepsilon) = (1 + i\varepsilon)K\left(\frac{t + \varepsilon}{1 + \pi\varepsilon}\right). \quad (10)$$

Отсюда с точностью до малых более высокого порядка получаем:

$$K_1(t + \varepsilon) = K(t) + \varepsilon[iK(t) + (1 + \pi t)K'(t)]. \quad (11)$$

Вернемся теперь к основному соотношению (1) и подставим туда (11). Тогда, с точностью до малых более высокого порядка, будем иметь:

$$\begin{aligned} K(t) &\approx K(t) + (1 - n)\varepsilon \left\{ B(t) - \left[ \frac{\rho}{1 - n} - i + m + q \right] K(t) + (1 + \pi t)K'(t) \right\} = \\ &= K(t) + (1 - n)\varepsilon \{ B(t) - rK(t) + (1 + \pi t)K'(t) \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что такое равенство возможно только, когда

$$(1 + \pi t)K'(t) - rK(t) + B(t) = 0. \quad (12)$$

Решением этого уравнения с граничным условием  $K(T) = U$  будет:

$$K(t) = \int_t^T \left( \frac{1 + \pi t}{1 + \pi s} \right)^{r/\pi} \frac{B(s)}{1 + \pi s} ds + \left( \frac{1 + \pi t}{1 + \pi T} \right)^{r/\pi} U. \quad (13)$$

Условие для оптимальности срока службы машины найдем, как и раньше, приравняв к нулю производную правой части этого выражения по  $T$ . Оно окажется прежним:  $B(T) = rU$ .

Как и (6), выражение (13) можно интерпретировать как взвешенную сумму выгод, получаемых от машин разного возраста на дату оценки, однако трактовать его как дисконтированную сумму будущих выгод от использования машины уже нельзя. Дело в том, что даже при меняющихся во времени ставках дисконтирования коэффициенты  $\alpha_{ts}$  дисконтирования к моменту  $s$  выгод, получаемых в момент  $t$ , должны обладать полугрупповым свойством:  $\alpha_{ts} = \alpha_{t\tau} \alpha_{\tau s}$ , а такое свойство здесь не выполняется. В то же время легко увидеть, что при  $\pi \rightarrow 0$  формула (13) переходит в формулу (6).

#### 4. Применение к установлению коэффициентов годности

Разумеется, в тех случаях, когда (например, по данным синхронных

наблюдений за машинами разного возраста) выгоды от использования машин можно измерить непосредственно, формулы (6) или (13) позволяют прямо оценивать стоимость машин. Однако такие ситуации достаточно редки. Гораздо чаще зависимость  $B(t)$  точно неизвестна. Именно поэтому оценщики обычно оценивают стоимость подержанных машин, умножая стоимость машин соответствующей марки в новом состоянии (на первичном рынке) на коэффициент годности. Оказывается, что полученные выше результаты позволяют достаточно точно определить такие коэффициенты.

В этих целях примем стоимость машины в новом состоянии за единицу и введем в рассмотрение относительные показатели: *относительную интенсивность доналоговых выгод*  $b(t)=B(t)/K(0)$ , *относительную утилизационную стоимость*  $u=U/K(0)$  и нужные нам *коэффициенты годности*  $k(t) = K(t)/K(0)$ .

В этих обозначениях с учетом (13) и (7) получаем:

$$k(t) = \int_t^T \left( \frac{1 + \pi t}{1 + \pi s} \right)^{r/\pi} \frac{b(s)}{1 + \pi s} ds + u \left( \frac{1 + \pi t}{1 + \pi T} \right)^{r/\pi}; \quad (14)$$

$$k(0) = \int_t^T \frac{b(s)}{(1 + \pi s)^{r/\pi+1}} ds + \frac{u}{(1 + \pi T)^{r/\pi}} = 1; \quad (16)$$

$$b(T) = ru. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь подробнее динамику относительных выгод  $b(t)$ . Представляется, что с достаточной точностью функцию  $b(t)$  можно разложить на две составляющие — не зависящую от возраста машины и меняющуюся в зависимости от возраста по экспоненциальному закону. Такое представление адекватно, во всяком случае, для двух ситуаций. В первой ситуации производительность машины в процессе эксплуатации остается примерно постоянной, тогда как эксплуатационные затраты экспоненциально растут. Вторая ситуация в некотором смысле обратная: эксплуатационные затраты по мере старения машины не меняются, тогда как производительность — экспоненциально снижается. С учетом (16) обе указанные ситуации можно описать экспоненциальной моделью, предложенной автором в [6, с.55-56]:

$$b(t) = h \frac{1 - e^{\mu(t-T)}}{\mu} + ru. \quad (13)$$

Первой ситуации при этом отвечают положительные значения параметра  $\mu$ , второй — отрицательные. По нашему мнению, этот параметр является технико-экономической характеристикой машин

рассматриваемой марки и, скорее всего, будет одним и тем же для всех машин одного вида.

Разумеется, возможны и “промежуточные” ситуации, когда производительность машины снижается с возрастом по одному закону, а эксплуатационные затраты растут по какому-то другому закону. Однако, как показывают экспериментальные расчеты, динамика относительных выгод и здесь может быть с достаточной точностью аппроксимирована формулой (17) при надлежаще выбранном значении параметра  $\mu$ .

Входящий в эту формулу множитель  $h$  — не произвольный: его значение можно определить из (15):

$$h = \frac{(1-u)\mu}{\int_0^T \frac{1 - e^{\mu(s-T)}}{(1+\pi s)^{r/\pi+1}} ds}$$

Тогда из (17) и (14) находим:

$$b(t) = (1-u) \frac{1 - e^{\mu(t-T)}}{\int_0^T \frac{1 - e^{\mu(s-T)}}{(1+\pi s)^{r/\pi+1}} ds} + \omega u; \quad (18)$$

$$k(t) = (1-u)(1+\pi t)^{r/\pi} \frac{\int_t^T \frac{1 - e^{\mu(s-T)}}{(1+\pi s)^{r/\pi+1}} ds}{\int_0^T \frac{1 - e^{\mu(s-T)}}{(1+\pi s)^{r/\pi+1}} ds} + u. \quad (19)$$

Входящие сюда интегралы, к сожалению, не выражаются в элементарных функциях, но могут быть вычислены на компьютере. При  $\pi \rightarrow 0$  полученные формулы упрощаются и принимают вид, приведенный в работах [1,6], однако эта ситуация отвечает отсутствию технического прогресса.

Графики соответствующих зависимостей  $k(t)$  и  $b(t)$  для  $T = 12$ ,  $u = 0.05$ ,  $r = 0.1$ ,  $\mu = 0.2$  представлены на рис. 1-2. Они рассчитаны при трех значениях  $\pi$  — 0.14, 0.03 и 0, примерно отвечающих сокращению рационального срока службы машин данной марки вдвое за 5 лет, за 25 лет и отсутствию технического прогресса.

Для применения полученных формул к практической оценке машин необходимо вначале оценить параметр  $\mu$ . В этих целях можно использовать данные о ценах реальных сделок с машинами разных возрастов, подбирая  $\mu$  так, чтобы получающиеся коэффициенты изменения



стоимости машин соответствовали данным о ценах реальных сделок.

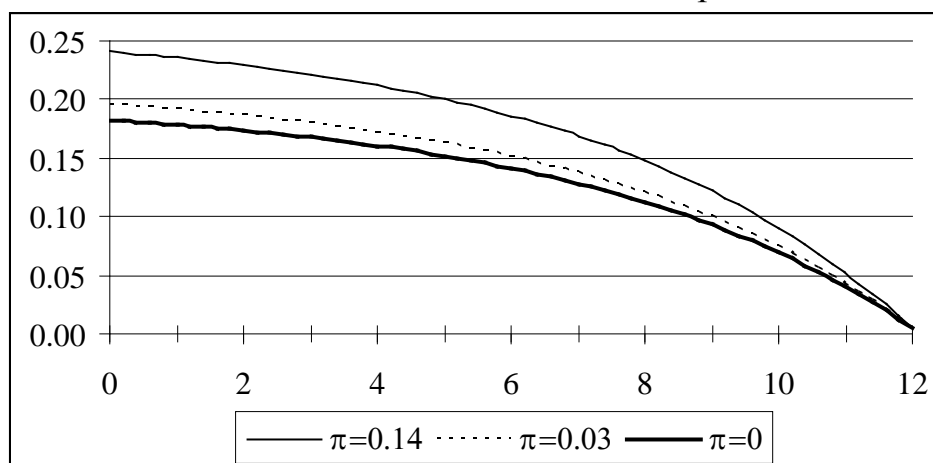


Рис. 1. Зависимость относительных выгод от возраста машины при трех значениях темпа технического прогресса

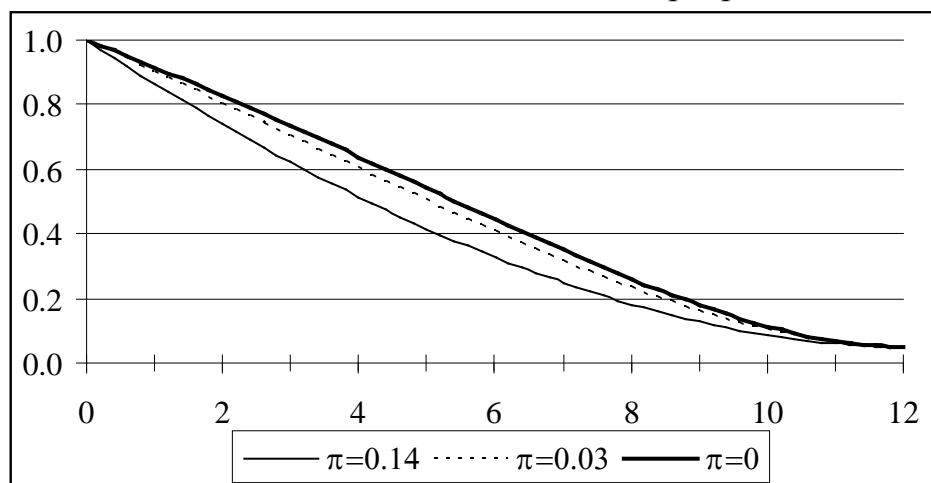


Рис. 2. Зависимость коэффициента годности машины от ее возраста при трех значениях темпа технического прогресса

Представляется, что  $\mu$  можно рассматривать как техническую или технологическую характеристику машин данной марки или вида, не зависящую ни от того, к какому году относятся сделки с ними, ни от того, в каком регионе (а, возможно, и в стране) они совершаются. Поэтому оценку этого параметра достаточно произвести однократно и это будет не слишком трудоемкая работа (по нашим оценкам, для этого потребуется информация о ценах сделок с 20-30 машинами одной марки разного возраста).

Для установления значения  $\pi$  необходим глубокий анализ соответствующего рынка. Здесь мало знать, как часто появляются на рынке новые марки машин, гораздо важнее выяснить, как в связи с этим

меняются сроки службы существующих машин. Некоторое представление об этом может дать динамика средних сроков службы машин разных марок, если ее кто-нибудь оценит. Скорее всего, на сегодня установить то или иное значение  $\mu$  оценщик сможет только экспертно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк С.А. Модели оценки износа машин и оборудования // Сб. “Анализ и моделирование экономических процессов”, вып. 5. М.: ЦЭМИ РАН. 2008.
2. Международные стандарты оценки. Седьмое издание. 2005. М.: ООО “Российское общество оценщиков”, 2005.
3. Оценка стоимости машин, оборудования и транспортных средств / А.П. Ковалев и др. М.: Интерреклама, 2003.
4. Assessors’ Handbook Using Section 581. Equipment Index and Percent Good Factors. January 2005. California State Board of Equalization.
5. Marshall Valuation Service, 2008. Marshall and Swift Publication Company. 915 Wilshire Blvd., 8th Floor, Los Angeles, CA 90017.
6. Смоляк С.А. Дисконтирование денежных потоков в задачах оценки эффективности инвестиционных проектов и стоимости имущества. М.: Наука, 2006.

## МЕХАНИЗМЫ КОМПЕНСАЦИИ РИСКОВЫХ ПОТЕРЬ ПРИ ДОЛЕВОМ УЧАСТИИ В ИНВЕСТИРОВАНИИ ПРОЕКТОВ

Одной из возможных схем инвестирования является доленое инвестирование. Это реализуется, например, при государственно-частном партнерстве или при других видах кооперации. Важным предположением при этом является уверенность в том, что при любом своем доленом участии инвестор уверен, что проект будет реализован и тот факт, что риски проекта не ложатся на одного участника. Предположим, что таких проектов, в которых потенциально может участвовать данный инвестор много и они одновременные. При этом инвестор желает так сформировать план инвестиций, чтобы доходы, получаемые от ранних проектов, реинвестировались в более поздние. Это экономит первоначальный капитал, необходимый для реализации проектов по отдельности.

В данной статье обсуждаются возникающие при этом оптимизационные задачи и механизмы компенсации, связанные с реализацией намеченного плана в условиях неопределенности относительно возможных изменений доходов заявленных проектов в течение планового периода. В Разделе 1 дается описание моделируемой ситуации, в Разделе 2 описана оптимизационная модель, в Разделе 3 рассмотрен детерминированный механизм компенсации, Раздел 4 посвящен вероятностной модели.

Работа носит методологический характер, поэтому рассмотрены простейшие из возможных подходов к обсуждаемой проблеме.

### 1. Моделируемая ситуация

Инвестор может принять доленое участие в  $N$  проектах. Каждый  $i$ -ый проект характеризуется двумя платежами: расходным (инвестиционным) в размере  $I_i > 0$  в момент времени  $t_i$  ( $t_i > 0$ ) и доходным (полученным от реализации проекта в форме продажи) предположительно в размере  $S_i > I_i$  в момент  $\tau_i > t_i$ .

Таким образом, множество проектов дается набором

$$M = \{(I, t, S, \tau)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N\} \quad (1.1)$$

В разделе 2 будем считать все эти данные детерминированными, а затем, в Разделах 3,4 будет учтено влияние факторов риска.

Нумерация проектов будем вести по мере возрастания моментов  $t_i$  их начала. Другими словами, если  $j > i$ , то  $t_j > t_i$ . Но времена окончания различных проектов могут иметь произвольную последовательность, т.е. если  $t_j > t_i$ , то  $\tau_i$  может предшествовать  $t_j$ , а может быть даже больше  $\tau_j$ .

Предполагается, что инвестор может выбрать любую долю инвестирования  $x_i$  ( $0 \leq x_i \leq 1$ ) в  $i$ -й проект, что означает, что он в момент  $t_i$  понесет расходы величины  $x_i \cdot I_i$ , но в момент  $\tau_i$  получит доход в размере  $x_i \cdot S_i$ .

В плановом периоде  $T \leq \max_i(\tau_i)$  инвестор ведет текущий *депозитный* счет в банке, величину которого в момент времени  $t$  обозначим через  $A(t)$ . Все расходные и доходные платежи по выбранным проектам аккумулируются на депозитном счете. Начальное значение текущего счета  $A(0) = I_0$ , образованное собственными средствами инвестора, назовем желаемыми инвестициями, и будем рассматривать как свободный параметр модели. Функцию времени  $A(t)$ ,  $t \geq 0$  будем считать непрерывной справа. Это означает, что величина  $A(t)$  включает денежный поток (инвестиции или доход), относящийся непосредственно к моменту  $t$ . На остатки средств на депозитном счете банк начисляет небольшой процент  $r_0 > 0$ . Другими словами, если в интервале времени  $[t, t + \tau]$  нет денежных потоков, то  $A(t + \tau) = A(t) \cdot (1 + r_0)^\tau$ .

Назовем  $i$ -й проект *рентабельным*, если приведенная к моменту инвестиции прибыль от него (Net Present Value) неотрицательна

$$V_i = S_i \cdot q^{-(\tau_i - t_i)} - I_i \geq 0 \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем, для упрощения записи используется обозначение  $q = 1 + r_0$ . Считаем, что все проекты из набора (1.1) рентабельны.

В общем случае предполагается, что инвестору открыта кредитная линия по ставке сложных процентов  $\rho$  ( $r_0 \ll \rho < 1$ ), но сначала рассмотрим случай, когда инвестор не пользуется кредитом, и реализация проектного плана идет в режиме самофинансирования, т.е. при условии

неотрицательности текущего счета в любой момент времени внутри планового периода.

## 2. Детерминированная модель без привлечения кредитов

Прежде, чем формулировать оптимизационную задачу, рассмотрим простой пример.

**2.1. Пример.** Рассмотрим множество проектов, представленное на рис. 1.

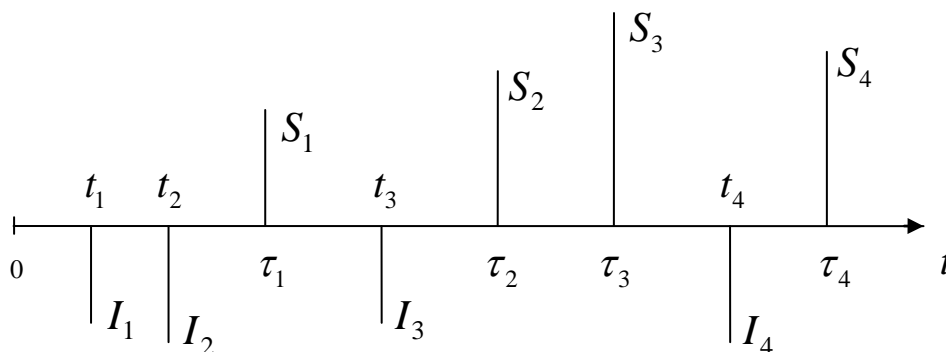


Рис.1. Расходные и доходные платежи для четырех проектов.

Условие неотрицательности текущего счета в плановом периоде является (при ненулевом участии во всех четырех проектах) выполнение восьми неравенств:

$$\begin{aligned}
 A(t_1) &= I_0 \cdot q^{t_1} - x_1 \cdot I_1 \geq 0, & A(t_2) &= [A(t_1)] \cdot q^{(t_2-t_1)} - x_2 \cdot I_2 \geq 0, \\
 A(\tau_1) &= [A(t_2)] \cdot q^{(\tau_1-t_2)} + x_1 \cdot S_1 \geq 0, & A(t_3) &= [A(\tau_1)] \cdot q^{(t_3-t_1-\tau_1)} - x_3 \cdot I_3 \geq 0, \\
 A(\tau_3) &= [A(t_3)] \cdot q^{(\tau_3-t_3)} + x_3 \cdot S_3 \geq 0, & A(\tau_2) &= [A(\tau_3)] \cdot q^{(\tau_2-\tau_3)} + x_2 \cdot S_2 \geq 0, \\
 A(t_4) &= [A(\tau_2)] \cdot q^{(t_4-\tau_2)} - x_4 \cdot I_4 \geq 0, & A(\tau_4) &= [A(t_4)] \cdot q^{(\tau_4-t_4)} + x_4 \cdot S_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Введем удобные для дальнейшего переменные – инвестиции  $J_i$ , прибыль  $v_i$  и текущий счет  $a(t)$ , приведенные к нулевому моменту времени со ставкой приведения (дисконтирования)  $r_0$ :

$$J_i = I_i \cdot q^{-t_i}, \quad v_i = V_i \cdot q^{-t_i}, \quad a(t) = A(t) \cdot q^{-t} \quad . \quad (2.1)$$

Тогда, при условии рентабельности (1.2) всех проектов, из восьми неравенств независимыми являются лишь три, относящиеся к моментам инвестирования  $t_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ):

$$\begin{aligned}
a(t_2) &= I_0 - x_1 \cdot J_1 - x_2 \cdot J_2 \geq 0, \\
a(t_3) &= I_0 + x_1 \cdot v_1 - x_2 \cdot J_2 - x_3 \cdot J_3 \geq 0, \\
a(t_4) &= I_0 + x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 - x_4 \cdot J_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Конец планового периода совпадает с моментом получения последнего дохода, поэтому длительность совокупности четырех проектов в целом равна  $T = \tau_4$ . К этому моменту величина приведенного текущего счета составит

$$a(T) = I_0 + V, \text{ где}$$

$$V = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i \tag{2.3}$$

есть суммарная приведенная (по ставке  $r_0$ ) прибыль от реализации рассматриваемой совокупности проектов.

При заданном уровне  $I_0 \in (0, \sum_{i=1}^4 I_i)$  желаемых инвестиций будем называть план  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  участия в проектах *оптимальным*, если при условиях самофинансирования (2.2) вектор  $x^*$  реализует максимум приведенного текущего счета  $a(T)$  (или, что то же самое – максимум приведенной прибыли  $V$ ). Очевидно, что нахождение  $x^*$  - типичная задача линейного программирования.

**2.2. Формулировка математической задачи.** Перейдем теперь к формулировке оптимизационной задачи в режиме самофинансирования в общем случае  $N$  обсуждаемых проектов. При постановке задачи следует иметь в виду, что в оптимальном плане доли участия в некоторых проектах могут оказаться нулевыми, поэтому горизонт планирования должен вычисляться по формуле

$$T = \max_i \{ \tau_i \mid x_i > 0 \}. \tag{2.4}$$

Формулы для вычисления величин приведенного текущего счета  $a(t_i)$ ,  $a(\tau_i)$  зависят от чередования моментов  $t_i$ ,  $\tau_i$ ; рекурсивная последовательность этих формул должна формироваться аналогично (2.2). В любом случае суммарная приведенная прибыль составит (в обозначениях (2.1)) величину

$$V = \sum_{i=1}^N x_i \cdot v_i \quad . \quad (2.5)$$

При этом желательные вложения инвестора не превосходят максимального значения

$$I_{\max} = \sum_{i=1}^N I_i \quad .$$

Если все исходные параметры проектов являются детерминированными и известными инвестору заранее, то возникает первая задача инвестора.

*Задача 1.* Для множества (1.1) рентабельных проектов и заданного значения начальных вложений  $I_0 \in (0, I_{\max}]$  найти план инвестиций

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ , максимизирующий прибыль (2.5) при условиях

$$a(t_i) \geq 0 \quad \forall t_i \in [0, T], \quad T = (2.4).$$

Максимальное значение критериального функционала (2.5) обозначим  $V^*$ , при этом *финальный* приведенный банковский счет инвестора составит величину

$$a^*(T) = I_0 + V^* \quad . \quad (2.6)$$

**2.3. Обсуждение.** Инвестор может иметь собственную субъективную ставку дисконтирования денежных потоков  $r$ , и оценивать приведенную прибыль оптимального плана Задачи 1 по формуле

$$V(r) = (1+r)^{-T} \cdot A^*(T) - I_0 \quad . \quad (2.7)$$

При  $r = 0$  величина (2.7) отражает номинальное приращение капитала, при  $r = r_0$  (2.7) совпадает с прибылью  $V$ , определенной формулой (2.5).

Естественно,  $r$  больше депозитной ставки  $r_0$ , т.к. субъективная ставка связывается инвестором с возможностью серьезно зарабатывать в результате активной деятельности, отличной от пассивного образа жизни рантье, довольствующегося маленькой депозитной ставкой. В то же время, ставка  $r$  не может использоваться в Задаче 1; это можно было бы сделать, если не рассматривать инвестиционный план замкнуто, в отрыве от другой деятельности, а включить сторонние проекты активной деятельности инвестора во множество проектов (1.1).

С другой стороны, рассматривая  $r$  не как субъективную ставку, а как свободный параметр, и соответственно  $V(r)$  при  $r \geq 0$  как функцию, можно использовать понятие *норма доходности оптимального плана* [1-4]. По определению, норма доходности есть корень  $r^*$  уравнения

$$V(r) = 0, \quad (2.8)$$

а т.к.  $V(r)$  убывает по  $r$ , то этот корень единствен, причем  $r^* > r_0$ .

**2.4. Численные примеры.** Рассмотрим множество  $M$  из четырех проектов ( $N = 4$ ), информация о которых задана таблицей 1, в которой, помимо набора данных (1.1) приведены также значения приведенной прибыли  $v_i$  (см. (3)) при депозитной ставке  $r_0 = 0,02$ .

Таблица 1

Параметры проектов									$r_0 =$	0,02
$t$	0,15	0,35	0,4	0,75	0,9	0,95	1,1	1,35	$v_1$	2,966
$i$	1	2	1	3	3	2	4	4	$v_2$	2,897
$I$	2	4		2			4		$v_3$	0,985
$S$			5		3	7		8	$v_4$	3,875

*Пояснение.* В строке  $t$  приведены, в шкале календарного времени, моменты платежей (расходных  $I_i$  и доходных  $S_i$ ); в строке  $i$  указано к какому индексу эти моменты относятся; в нижних двух строках, под соответствующими индексами показаны значения платежей.

Результаты вычислений для различных величин желаемых инвестиций ( $I_0$ ) представлены в таблице 2. Эти данные дополнены на рис 2. графиками зависимости от параметра  $I_0$  величин  $V^*$ ,  $A^*(T)$  (левая шкала),  $r^*$  (правая шкала) при оптимальном плане инвестирования  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ .

Как и следовало ожидать, функции  $V^*$  и  $A^*(T)$  от  $I_0$  являются непрерывными, кусочно-гладкими и растущими, а норма доходности  $r^*$  кусочно-гладкой и убывающей за исключением небольшой области малых  $I_0$ , в которой она постоянна. Подобное поведение  $r^*$  вполне объяснимо:



Таблица 2

$I_0$	$V^*$	T	$A^*(T)$	$r^*$	$x1^*$	$x2^*$	$x3^*$	$x4^*$
<b>0,25</b>	1,60	<b>1,35</b>	<b>1,90</b>	3,494	0,125	0,000	0,316	0,238
<b>0,50</b>	3,20	<b>1,35</b>	<b>3,80</b>	3,494	0,251	0,000	0,631	0,475
<b>0,75</b>	4,80	<b>1,35</b>	<b>5,70</b>	3,494	0,376	0,000	0,947	0,713
<b>1,00</b>	5,89	<b>1,35</b>	<b>7,08</b>	3,263	0,501	0,000	1,000	0,885
<b>1,25</b>	6,71	<b>1,35</b>	<b>8,18</b>	3,020	0,627	0,000	1,000	1,000
<b>1,50</b>	7,08	<b>1,35</b>	<b>8,82</b>	2,713	0,752	0,000	1,000	1,000
<b>1,75</b>	7,46	<b>1,35</b>	<b>9,45</b>	2,489	0,878	0,000	1,000	1,000
<b>2,00</b>	7,82	<b>1,35</b>	<b>10,09</b>	2,316	1,000	0,001	1,000	1,000
<b>2,25</b>	8,00	<b>1,35</b>	<b>10,53</b>	2,137	1,000	0,064	1,000	1,000
<b>2,50</b>	8,19	<b>1,35</b>	<b>10,98</b>	1,992	1,000	0,127	1,000	1,000
<b>2,75</b>	8,37	<b>1,35</b>	<b>11,42</b>	1,871	1,000	0,190	1,000	1,000
<b>3,00</b>	8,55	<b>1,35</b>	<b>11,86</b>	1,769	1,000	0,253	1,000	1,000
<b>3,25</b>	8,73	<b>1,35</b>	<b>12,31</b>	1,682	1,000	0,316	1,000	1,000
<b>3,50</b>	8,92	<b>1,35</b>	<b>12,75</b>	1,606	1,000	0,379	1,000	1,000
<b>3,75</b>	9,10	<b>1,35</b>	<b>13,20</b>	1,540	1,000	0,442	1,000	1,000
<b>4,00</b>	9,28	<b>1,35</b>	<b>13,64</b>	1,481	1,000	0,505	1,000	1,000

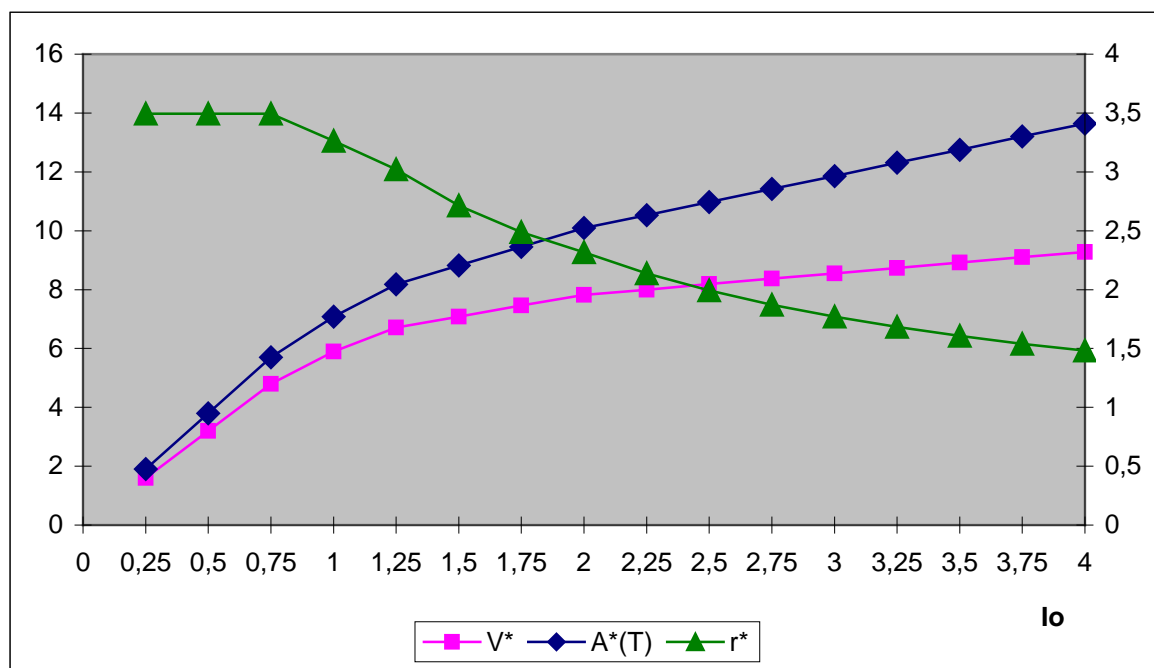


Рис. 2. Зависимости приведенной прибыли, финального депозитного счета (левая шкала) и нормы доходности (правая шкала) от величины желаемых инвестиций.

при малых  $I_0$  оптимальный план выбирает самые прибыльные проекты с максимально возможным участием в них до тех пор, пока доля одного из этих проектов не достигнет единицы. При дальнейшем увеличении  $I_0$  в оптимальный план входят все новые и новые менее прибыльные проекты; соответственно норма доходности плана постепенно падает.

Укажем на еще один возможный эффект – скачкообразное падение  $r^*$ ; это может происходить при скачкообразном увеличении горизонта планирования  $T$  в соответствии с формулой (2.4). Пример такого эффекта дает множество  $M$  с информацией, представленной таблицей 3.

Таблица 3

Параметры проектов									$r_0 =$	0,02
t	0,15	0,35	0,4	0,75	0,9	0,95	1,1	1,35	v1	2,966
i	1	2	1	3	4	3	4	2	v2	0,701
I	2	4		2	3				v3	1,955
S			5			4	4	4,8	v4	0,967

Результаты расчета для этого примера представлены на рис. 3 и в таблице 4.

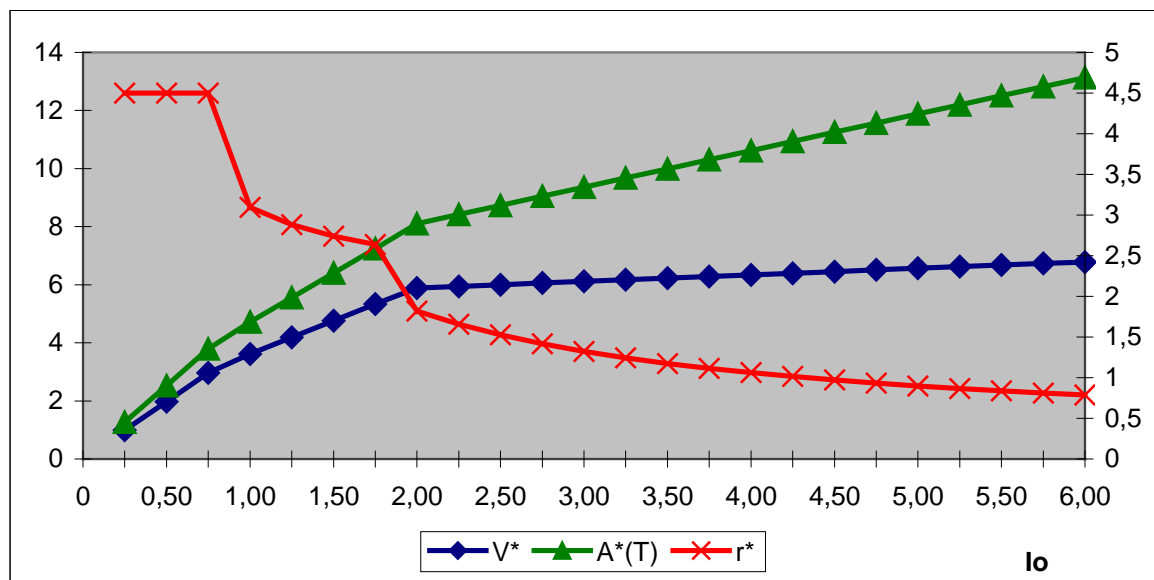


Рис. 3. Скачкообразное увеличение горизонта оптимального плана приводит к падению нормы доходности.

Таблица 4

<b>Io</b>	<b>V*</b>	<b>T</b>	<b>A*(T)</b>	<b>r*</b>	<b>x1*</b>	<b>x2*</b>	<b>x3*</b>	<b>x4*</b>
<b>0,25</b>	0,99	<b>0,95</b>	1,26	4,499	0,125	0,000	0,316	0,000
<b>0,50</b>	1,98	<b>0,95</b>	2,52	4,499	0,251	0,000	0,631	0,000
<b>0,75</b>	2,97	<b>0,95</b>	3,79	4,499	0,376	0,000	0,947	0,000
<b>1,00</b>	3,61	<b>1,1</b>	4,71	3,094	0,501	0,000	1,000	0,175
<b>1,25</b>	4,19	<b>1,1</b>	5,56	2,882	0,627	0,000	1,000	0,387
<b>1,50</b>	4,76	<b>1,1</b>	6,40	2,741	0,752	0,000	1,000	0,598
<b>1,75</b>	5,34	<b>1,1</b>	7,25	2,639	0,878	0,000	1,000	0,809
<b>2,00</b>	5,89	<b>1,35</b>	8,10	1,819	1,000	0,001	1,000	1,000
<b>2,25</b>	5,95	<b>1,35</b>	8,42	1,657	1,000	0,064	1,000	1,000
<b>2,50</b>	6,00	<b>1,35</b>	8,73	1,526	1,000	0,127	1,000	1,000
<b>2,75</b>	6,06	<b>1,35</b>	9,05	1,416	1,000	0,190	1,000	1,000
<b>3,00</b>	6,12	<b>1,35</b>	9,36	1,323	1,000	0,253	1,000	1,000
<b>3,25</b>	6,17	<b>1,35</b>	9,68	1,244	1,000	0,316	1,000	1,000
<b>3,50</b>	6,23	<b>1,35</b>	9,99	1,175	1,000	0,379	1,000	1,000
<b>3,75</b>	6,28	<b>1,35</b>	10,31	1,115	1,000	0,442	1,000	1,000
<b>4,00</b>	6,34	<b>1,35</b>	10,62	1,061	1,000	0,505	1,000	1,000
<b>4,25</b>	6,40	<b>1,35</b>	10,94	1,014	1,000	0,568	1,000	1,000
<b>4,50</b>	6,45	<b>1,35</b>	11,25	0,971	1,000	0,631	1,000	1,000
<b>4,75</b>	6,51	<b>1,35</b>	11,56	0,933	1,000	0,694	1,000	1,000
<b>5,00</b>	6,57	<b>1,35</b>	11,88	0,898	1,000	0,757	1,000	1,000
<b>5,25</b>	6,62	<b>1,35</b>	12,19	0,867	1,000	0,820	1,000	1,000
<b>5,50</b>	6,68	<b>1,35</b>	12,51	0,838	1,000	0,883	1,000	1,000
<b>5,75</b>	6,74	<b>1,35</b>	12,82	0,811	1,000	0,946	1,000	1,000
<b>6,00</b>	6,78	<b>1,35</b>	13,13	0,786	1,000	1,000	1,000	1,000
<b>6,25</b>	6,78	<b>1,35</b>	13,39	0,758	1,000	1,000	1,000	1,000
<b>6,50</b>	6,78	<b>1,35</b>	13,64	0,732	1,000	1,000	1,000	1,000

### 3. Механизмы компенсации при возможном прогнозируемом снижении предстоящих доходов

До сих пор мы предполагали значения параметров всех  $N$  проектов  $(t_i, \tau_i, I_i, S_i)$  и банковский процент приращения инвестиционного счета  $r_0$  известными инвестору в момент принятия решения, и он может подписывать соответствующие договоры о долевом инвестировании. Однако в реальной жизни может возникнуть ситуация, когда договоры о долевом участии в

проектах подписываются в условиях неопределенности относительно будущих доходов (будущей цены продаж готовых проектов).

Другими словами, величины  $S_i$  являются оценочными, а реальные цены продаж могут с некоторой вероятностью отклоняться в сторону уменьшения на величину  $\Delta S_i$ . Предполагается, что даже при условии снижения дохода проекты все же остаются рентабельными, т.е.

$$\Delta S_i < V_i \cdot q^{(\tau_i - t_i)} \quad . \quad (3.1)$$

Оценить возможные риски подобных событий (которые являются критичными для реализации оптимального плана) и продумать механизмы компенсации потерь в доходах, и является второй задачей инвестора.

**3.1. Механизмы компенсации.** Мы предполагаем, что инвестор сначала решает Задачу 1, описанную в разделе 2, и находит тем самым значения выходных параметров  $x^*, T, V^*$ , а также  $a^*(T)$  по формуле (2.6) и  $A^*(T) = q^T \cdot a^*(T)$ ; затем проводит анализ рисков и необходимых компенсационных затрат. При этом не исключается, что анализ рисков может привести к тому, что оптимальный план Задачи 1 будет отвергнут.

Следует различать два принципиально разных случая:

- случай 1, когда речь идет об уменьшении доходов от тех проектов (из вошедших в оптимальный план), после получения дохода от которых не планируются вложения в другие проекты;
- случай 2, когда после получения дохода от данного проекта планируются другие инвестиции.

Первый случай назовем *ординарным*, а второй – *неординарным*.

Расчет рисков в ординарных случаях очевиден, поскольку он приводит к легко вычисляемым изменениям конечного значения депозитного счета  $A^*(T)$  приведенной прибыли  $V(r)$  по формуле (2.7). А для неординарных рисков возможны ситуации, когда выполнение взятых обязательств по финансированию последующих проектов в оговоренных размерах невозможно без предусмотренных механизмов компенсации.

В неординарном случае можно применять два компенсационных механизма:

- 1 – *резервирование* дополнительного капитала,
- 2 – *заимствование* (взятие кредита в момент неординарного уменьшения доходного платежа с последующим погашением кредита в момент окончания плана).

В принципе, возможна комбинация этих двух методов, но в данном разделе мы проведем их сравнение в чистом виде, предполагая, что погашение кредита происходит с депозитного счета  $A^*(T)$  без дополнительного капитала. Кроме того, ограничимся *простейшим неординарным случаем*, который состоит в следующем:

- для некоторого  $k$  в момент  $\tau_k$  поступления доходного платежа  $S_k$ , платеж оказался меньше на величину  $\Delta S_k > 0$ ,
- момент  $\tau_k$  единствен, а снижение  $\Delta S_k$  прогнозируемо и фиксировано, остальные проекты считаются надежными (неизменными).

Механизм резервирования требует дополнительного капитала  $\Delta I_0$  размер которого, с учетом того, что он кладется на депозитный счет, определяется соотношением

$$\Delta I_0 \cdot q^{\tau_k} = x_k^* \cdot \Delta S_k \Rightarrow \Delta I_0 = x_k^* \cdot \Delta S_k \cdot q^{-\tau_k}, \quad (3.2)$$

При заимствовании потребуется кредит в размере  $x_k^* \cdot \Delta S_k$  с его погашением в момент окончания плана  $T$  по кредитной ставке  $\rho$ , что приводит к уменьшению финального депозитного счета на величину

$$\Delta A^*(T) = x_k^* \cdot \Delta S_k \cdot (1 + \rho)^{T - \tau_k} \quad (3.3)$$

Заметим, что из (10), (11) следует

$$\frac{\Delta A^*(T)}{\Delta I_0} = (1 + \rho)^{T - \tau_k} \cdot (1 + r_0)^{\tau_k} \quad (3.4)$$

**3.2. Анализ механизма компенсации.** В случае предполагаемых отклонений дохода возможны четыре варианта исходов

1. дополнительный капитал не резервировался, и доходные платежи оказались на уровне первоначальных ожиданий; ниже этот вариант будет помечен индексом 0;
2. дополнительный капитал резервировался, но доходные платежи оказались на уровне первоначальных ожиданий; ниже этот вариант будет помечен индексом *res* 0;
3. дополнительный капитал резервировался, и реализовалось прогнозировавшееся неординарное понижение дохода; индекс *res* +;

4. резервирование дополнительного капитала не производилось, а понижение дохода реализовалось, и инвестор должен воспользоваться кредитом; индекс  $cr$ .

В неординарном случае, прежде чем принять оптимальный план Задачи 1 (т.е. принять участие в проекте), инвестор должен ответить себе на следующие вопросы (и в этом состоит вторая задача инвестора).

*Задача 2.* Участвовать ли в проекте, и если да, то как поступить – резервировать дополнительный капитал, или воздержаться от этого?

Ниже будет дан ответ на эти вопросы. Ответ существенным образом зависит от субъективной ставки инвестора  $r$ , поэтому необходимо провести полный анализ приведенной прибыли во всех четырех вариантах как функций параметра  $r$  в области  $r > r_0$ . Ответ, конечно, зависит не только от  $r$ , но и от других параметров. Итоговая картина (синтез решения) в пространстве ключевых параметров будет дана ниже на рис. 5. Пока что заметим, что сравнение вариантов только по норме доходности может привести (как будет видно) к ошибочному решению.

Итак, выпишем формулы *модифицированной* приведенной прибыли для указанных четырех вариантов.

В первом варианте приведенная прибыль будет равна вычисленной по формуле (2.7) прибыли для оптимального плана

$$V_0(r) = (1+r)^{-T} \cdot A^*(T) - I_0 ; \quad (3.5)$$

во втором варианте

$$V_{res0}(r) = V_0(r) - \left[ 1 - \left( \frac{1+r_0}{1+r} \right)^T \right] \cdot \Delta I_0 ; \quad (3.6)$$

в третьем варианте

$$V_{res+}(r) = V_0(r) - \Delta I_0 ; \quad (3.7)$$

в четвертом

$$V_{cr}(r) = V_0(r) - (1+r)^{-T} \cdot \Delta A^*(T) . \quad (3.8)$$

Графики этих функций показаны на рис. 4. Корни этих функций (т.е., аналогично (2.8), точки пересечения кривых с осью абсцисс, будем обозначать большой буквой  $R$  с соответствующим индексом) – это нормы доходности вариантов.

Отметим, что при нулевой ставке дисконтирования прибыли упорядочены следующим образом

$$V_{cr}(0) < V_{res+}(0) < V_0(0) < V_{res0}(0).$$

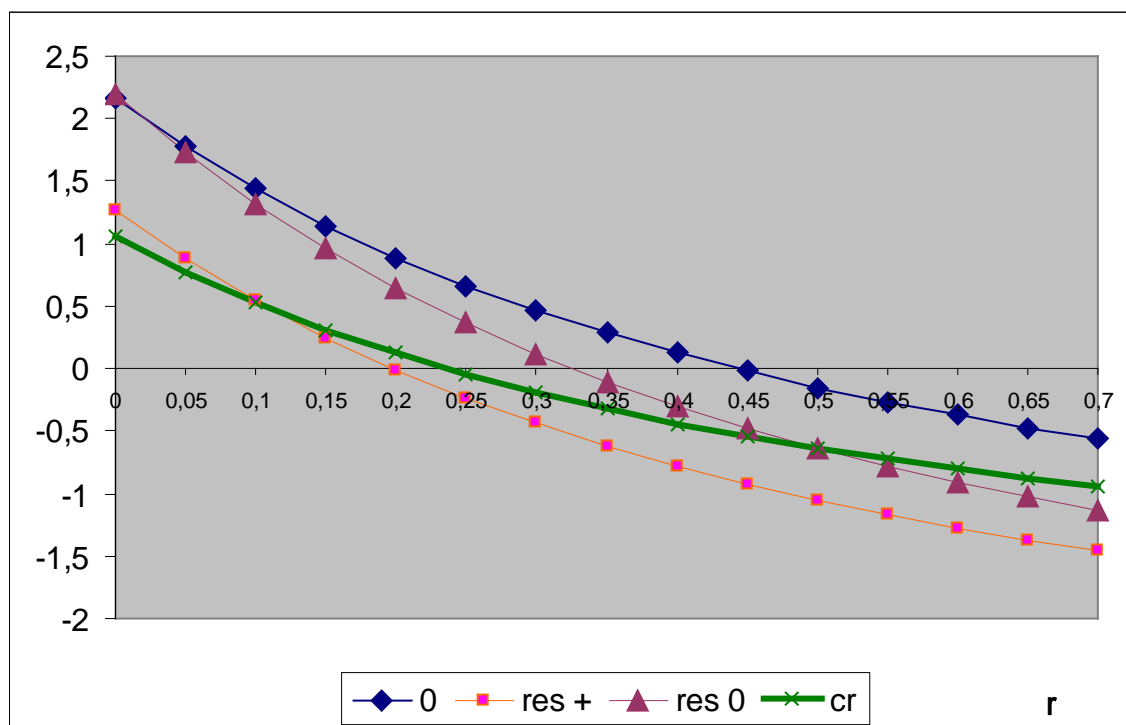


Рис. 4. Графики приведенной прибыли.

Из формул (3.5) - (3.8) вытекает, что при  $r > r_0$  справедливы неравенства

$$V_{res+}(r) < V_{res0}(r) < V_0(r),$$

следовательно, в этой области графики приведенных прибылей для «безкредитных» вариантов не пересекаются. Поэтому большему значению NPV соответствует большая норма доходности:

$$R_{res+} < R_{res0} < R_0 = r^*,$$

и для этих кривых сравнение по приведенной прибыли и по норме доходности дает одинаковые предпочтения.

Что же касается кривой  $V_{cr}(r)$ , то она обязательно пересекается с двумя соседними  $V_{res+}(r), V_{res0}(r)$ , поскольку при больших значениях  $r$  асимптотически приближается к  $V_0(r)$ .

Точки пересечения кредитной кривой с резервирующими принято называть точками Фишера. Согласно формулам (3.6) – (3.8), первая точка Фишера  $r_F$  (пересечение  $V_{cr}(r)$  и  $V_{res+}(r)$ ) определяется равенством

$$1 + r_F = (1 + \rho) \cdot \left( \frac{1 + r_0}{1 + \rho} \right)^\theta, \quad \theta = \frac{\tau_k}{T}; \quad (3.9)$$

из сравнения (13) и (18) следует

$$\Delta A^*(T) = (1 + r_F)^T \cdot \Delta I_0. \quad (3.10)$$

Вторая точка Фишера  $r'_F$  (пересечение  $V_{cr}(r)$  и  $V_{res0}(r)$ ) определяется равенством

$$1 + r'_F = \left[ (1 + r_0)^T + (1 + r_F)^T \right]^{1/T}.$$

Заметим, что согласно этим формулам, точки Фишера зависят лишь от ставок  $r_0, \rho$ , времени реализации рискованного платежа  $\tau_k$  и горизонта оптимального плана  $T$ , в то время как нормы доходности зависят от всех параметров оптимального плана и величины  $\Delta I_0$ .

**3.3. Итоговая картина.** Итоговая картина получается в результате анализа соотношений между величинами  $r_F, R_{res+}, R_{cr}$ . Нетрудно заметить (см., например, рис. 4), что существенным для определения вида компенсаций является знак функции  $V_{cr}(r)$  в первой точке Фишера. Полный подробный анализ описать сложно; приведем конечный результат.

Если ввести новые безразмерные переменные

$$\omega = \left( \frac{1 + r_F}{1 + r_0} \right)^T, \quad h = \frac{\Delta I_0}{I_0}, \quad g = \frac{V^*}{I_0},$$

то все типы принимаемых решений описываются различными областями в плоскости неотрицательных параметров  $(h, g)$ , см. рис. 5.

Прямая G:  $g = \omega \cdot h + \omega - 1$  в этой плоскости определяется условием  $V_{cr}(r_F) = 0$ , и следовательно,  $R_{res+} = R_{cr} = r_F$ . Выше указанной прямой, т.е.



при  $g > \omega \cdot h + \omega - 1$  справедливы неравенство  $V_{cr}(r_F) > 0$  и соотношения

$$r_F < R_{res+} < R_{cr}, \quad \omega_1 = \left( \frac{1 + R_{cr}}{1 + r_0} \right)^T > \omega, \quad g = \omega \cdot h + \omega_1 - 1 \quad . \quad (3.11)$$

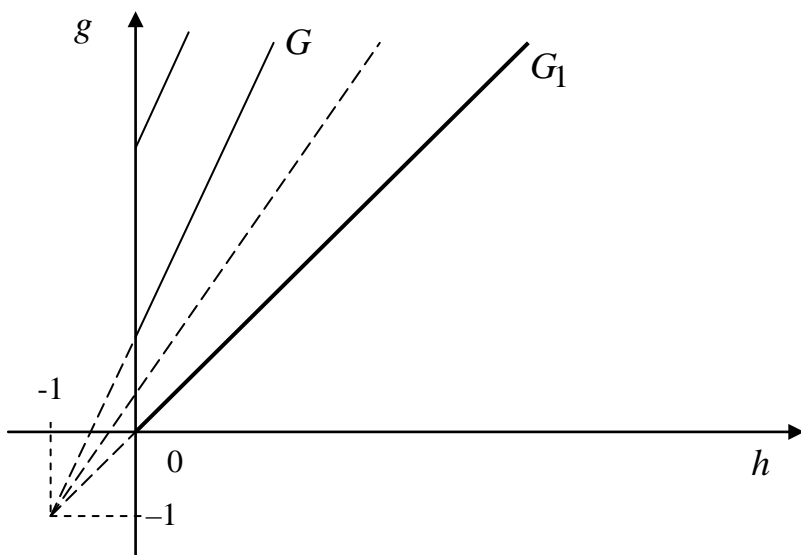


Рис. 5. Три типовые области: выше прямой  $G$  – формула (3.11), между прямыми  $G$  и  $G_1$  – формула (3.12), область ниже прямой  $G_1$  противоречит неравенству (3.1).

Равенство в формулах (3.18) – это переписанное в других обозначениях определение величины  $R_{cr}$ :  $V_{cr}(R_{cr}) = 0$ . В силу неравенства  $\omega_1 > \omega$  оно определяет в плоскости  $(h, g)$  прямую, параллельную прямой  $G$  и лежащую выше нее.

Из (3.17) и (3.18) вытекает справедливость следующих утверждений относительно рентабельности одного из двух механизмов компенсации для всех возможных значений ставок дисконтирования  $r$  при параметрах  $h, g$ , лежащих выше прямой  $G$ :

- при  $r \in (r_0, r_F)$  проект принимается с резервированием дополнительного капитала;
- при  $r \in (r_F, R_{cr})$  проект принимается, капитал не резервируется и при необходимости берется кредит;
- при  $r > R_{cr}$  план не рентабелен: ни один из способов компенсации не обеспечивает рентабельности плана при реализации скачка  $\Delta S_k$ .

В последнем случае инвестору нужно вновь вернуться к Задаче 1, исключив  $k$ -й проект из рассмотрения.

При значениях параметров задачи, находящихся в оставшейся части плоскости  $(h, g)$ , т.е. при

$$g < \omega \cdot h + \omega - 1, \quad g > h$$

выполняются неравенство  $V_{cr}(r_F) < 0$  и соотношения

$$r_0 < R_{cr} < R_{res+} < r_F, \quad 1 < \omega_2 = \left( \frac{1 + R_{res+}}{1 + r_0} \right)^T < \omega, \quad g = \omega_2 \cdot h + \omega_2 - 1 \quad (3.12)$$

Равенство в формулах (3.12) является следствием определения величины  $R_{res+}$  и при указанных в (3.12) ограничениях на  $\omega_2$  соответствующая прямая лежит между прямыми  $G$  и  $G_1$ .

Из (3.19) и (3.20) следует, что при всех значениях параметров  $(h, g)$  в области между прямыми  $G$  и  $G_1$ , справедливы утверждения:

- при  $r \in (r_0, R_{res+})$  преимущество за резервированием,
- при  $r > R_{res+}$  ни один из способов компенсации не приводит к рентабельности плана в целом при реализации скачка  $\Delta S_k$ .

Итак, мы видим, что выбор механизма компенсации неординарного уменьшения доходного платежа на фиксированную величину  $\Delta S_k$  зависит как от параметров оптимального проекта, так и от выбранной ставки дисконтирования. Поэтому при разных ставках дисконтирования лучшими могут быть разные механизмы.

#### 4. Механизм компенсации в вероятностной модели

В предыдущих разделах были подробно рассмотрены неординарные ситуации, возникающие при заданном предполагаемом скачке цен  $\Delta S_k$  в случаях применения механизмов резервирования или кредитования. Если же считать, что величина  $\Delta S_k$  не является детерминированной, а случайна, то тогда естественно переходить к рассмотрению смешанных стратегий – частичного резервирования капитала с кредитованием в случае нехватки средств. Величину частичного резервирования будем обозначать через  $\Delta I_0$ ,

не предполагая, однако, ее количественной связи с отклонением  $\Delta S_k$ , как это было в предыдущем разделе при фиксированном значении  $\Delta S_k$ .

Если при реализации случайной величины  $\Delta S_k$  резервированного капитала не хватает для компенсации, то инвестор прибегает к заимствованию недостающей суммы с последующей выплатой с депозитного счета в конце планового периода. Эту величину выплат представим в форме  $(1+r_F)^T \cdot \Gamma$ , где  $\Gamma \geq 0$  – параметр.

Предположим, что отклонение  $\Delta S_k$  является случайным и имеет нормальный закон распределения с нулевым средним и дисперсией  $\sigma$ . Обозначим соответствующую плотность распределения через  $p(\cdot)$ . Можно показать, что тогда плотность распределения величины приведенной прибыли плана имеет вид:

$$p_{NPV}(z) = \begin{cases} \frac{1}{c_0} \cdot p\left(\frac{-z + a + b_0 \cdot \Delta I_0}{c_0}\right) & z > a \\ \frac{1}{c_F} \cdot p\left(\frac{-z + a + b_F \cdot \Delta I_0}{c_F}\right) & z < a \end{cases} \quad (4.1)$$

где

$$a = V_0(r) - \Delta I_0,$$

$$V_0(r) = (1+r)^{-T} (q^T \cdot (I_0 + V^*)) - I_0,$$

$$b_0 = \left(\frac{1+r_0}{1+r}\right)^T, b_F = \left(\frac{1+r_F}{1+r}\right)^T, c_0 = b_0 \cdot y^*, c_F = b_F \cdot y^*,$$

$$y^* = x_k^* \cdot q^{-(t_k + \tau_k)}.$$

Отсутствие симметрии у функции (4.1) (см. рис. 6.) связано с несимметричной зависимостью приведенной прибыли от факта наличия или отсутствия кредита при  $\rho > r_0$ .

Согласно полученной плотности распределения (4.1) нетрудно вычислить вероятность того, что NPV инвестиционного плана будет больше

некоторой заданной величины. С целью удобства дальнейшего изложения, запишем эту вероятность в виде:

$$P\{NPV > V_0(r) - \Delta I_0 - b_F \cdot \Gamma\} = \Phi\left(\frac{\Delta I_0 + \Gamma}{\sigma \cdot y^*}\right),$$

где  $\Phi(\cdot)$  - функция стандартного нормального распределения.

В удобной форме можно сформулировать следующую третью задачу инвестора.

*Задача 3.* Для ставок дисконтирования  $r \in (0, r^*)$  (что гарантирует положительность величины  $V_0(r)$ ) и заданной величины  $\delta \geq 0$  найти такие значения  $\Delta I_0 \geq 0$ ,  $\Gamma \geq 0$ , которые обеспечат наибольшую величину уровня достоверности  $p \in (0, 1)$  в равенстве  $P\{NPV > V_0(r) \cdot (1 - \delta)\} = \hat{p}$ .

(надо p с крышкой)

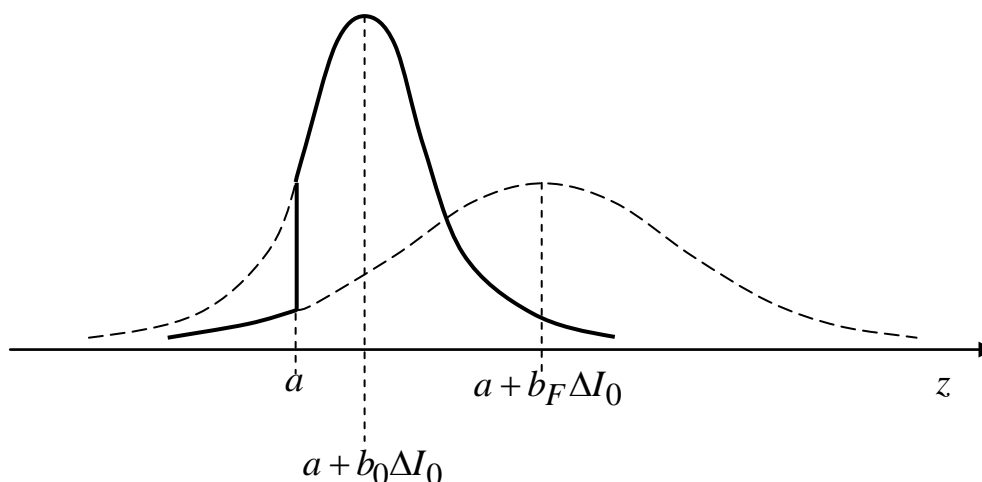


Рис. 6. Плотность распределения (4.1) выделена жирной линией. Область левее  $z=a$  – область использования кредита, правее – область без кредита.

Справедливо следующее утверждение:

при заданных величинах  $\delta \geq 0$  и ставке дисконтирования  $r \in (0, R_0^*)$  всегда существуют такие значения  $\Delta I_0 \geq 0$ ,  $\Gamma \geq 0$ ,  $\hat{p} \in (0, 1)$  удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} V_0(r) \cdot \delta &= \Delta I_0 + b_F \cdot \Gamma, \\ u_p \cdot \sigma \cdot y^* &= \Delta I_0 + \Gamma, \quad \hat{p} = \Phi(u_p). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку максимальному значению  $\hat{p}$  соответствует максимальное значение  $u_p$ , то, согласно равенствам (23) при  $r < r_F$  величина  $b_F > 1$  и, следовательно, максимальному возможному  $u_p$  соответствуют следующие значения

$$\Delta I_0 = V_0(r) \cdot \delta, \quad \Gamma = 0, \quad \hat{p} = \Phi(\Delta I_0 \cdot (\sigma \cdot y^*)^{-1}). \quad (4.3)$$

Это равенство говорит о том, что резервирование дополнительных средств в указанных размерах с полученной вероятностью гарантирует не использование кредитов.

При  $r > r_F$  (если это неравенство не противоречит условию  $r \in (0, r^*)$ ) максимальное значение уровня достоверности  $\hat{p}$  обеспечивают равенства:

$$\Delta I_0 = 0, \quad \Gamma = V_0(r) \cdot \delta \cdot b_F^{-1}, \quad \hat{p} = \Phi(\Gamma \cdot (\sigma \cdot y^*)^{-1}). \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) говорит о том, что резервирование дополнительных средств нецелесообразно, а возникающие отклонения цены с приемлемой вероятностью компенсирует использование кредитов.

Конечно, чем ближе мы хотим приблизиться к уровню NPV для оптимального плана, тем меньше мы берем значение параметра  $\delta$  и тем меньше мы получаем по формулам (4.2), (4.3) уровень достоверности  $\hat{p}$ .

Таким образом, инвестор в зависимости от своей склонности к риску может принять (или отвергнуть) оптимальный инвестиционный план  $x^*$ , соглашаясь на дополнительное (по отношению к величине  $I_0$ ) резервирование  $\Delta I_0$  или полагаясь на кредиты.

И в первом и во втором случае возможности неординарных рисков уменьшают приведенную стоимость плана, но величина этого изменения прогнозируется.

## Заключение

Приведенный в статье анализ долевого участия инвестора во множестве различных проектов позволяет сформулировать следующие положения.

1. Для заданной величины начальных вложений можно найти наилучший (оптимальный) план инвестирования с точки зрения максимума приведенной прибыли плана. Этой задаче посвящены Разделы 2 и 3.
2. Возможные риски уменьшения будущих доходов можно разделить на ординарные и неординарные. Ординарные риски связаны со снижением доходов от тех проектов, после завершения которых не планируется никаких других инвестиций на рассматриваемом горизонте инвестирования. В этом случае никаких компенсационных мероприятий не требуется, надо только подсчитать уменьшение прибыли от таких снижений. Неординарные риски связаны с возможным уменьшениям доходных поступлений от проектов, после завершения которых планируются дальнейшие инвестиции в другие проекты выбранного плана. В неординарном случае для доведения намеченного плана до конца необходимы компенсационные мероприятия.
3. Неординарные риски можно разделить на прогнозируемые, учет которых производится на основе детерминистической модели (этому посвящен Раздел 3), и случайные, обсуждаемые в рамках вероятностной модели (Раздел 4).
4. Во всех случаях постановка задачи дается с единой позиции - максимизации приведенной прибыли при заданной ставке дисконтирования.
5. Инвестору предоставляется возможность самому принимать решения в пользу детерминистической или вероятностной модели.

Приношу благодарность редактору сборника профессору В.З.Беленькому за полезные замечания по тексту и плодотворное обсуждение статьи в целом.

#### Литература

1. Ованесов А.А., Четвериков В.М. Поток платежей: Контур и псевдоконтур финансовых операций. // Журнал РЦБ, 1997, № 11.
2. Поток платежей: МЭНД – мощное оружие аналитика. // Журнал РЦБ, 1997, № 12.
3. Беленький В.З. К дискуссии о понятии «внутренняя норма доходности проекта». – Сб. «Моделирование механизмов функционирования экономики России на современном этапе», вып. 4. М.: ЦЭМИ РАН, 2000.
4. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инновационных проектов: теория и практика. Издание 4-е, М.: Дело, 2008.

**Асимптотики вероятности разорения  
в классической модели страхования  
с фиксированным объемом средств в форме акций<sup>1</sup>**

Данная работа посвящена проблеме исследования вероятности разорения в моделях страхования, включающих возможность инвестирования капитала страховой компании в рисковые активы. Инвестиционная деятельность является чрезвычайно важной областью деятельности страховщика, обеспечивающей формирование достаточного страхового фонда для выполнения обязательств, связанных с выплатами по требованиям. В то же время значительные денежные ресурсы, аккумулируемые страховыми фондами за счет постоянно поступающих страховых премий, служат существенным источником инвестиций в экономику. При этом, как показано в некоторых работах (см., например, [1]), финансовый риск, возникающий в процессе инвестиционной деятельности, может оказаться существенным для страховых компаний и неосторожное использование рисковых активов способно ослабить платежеспособность страховых компаний в не меньшей мере, чем большие выплаты по требованиям. В то же время именно рисковые активы являются финансовым инструментом, призванным эффективно компенсировать собственный риск страховщика, по крайней мере, при не больших размерах капитала. Об этом свидетельствуют, в частности, результаты работ, связанных с исследованием оптимального управления инвестициями в страховании (см., например, [2]-[6]).

В работе [4] изучена классическая модель Крамера-Лундберга в предположении, что капитал компании вкладывается в два вида активов: рисковый - акции, цена которых моделируется геометрическим броуновским движением, и безрисковый - банковский счет с фиксированной процентной ставкой  $r$ . При этом допускаются заимствования по той же процентной ставке. Был получен вид оптимальной стратегии в задаче максимизации вероятности неразорения на бесконечном интервале времени с помощью динамического управления портфелем активов; показано, что оптимальная стратегия зависит от решения некоторого интегро-дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция Беллма-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 10-01-00767, 08-01-00139

на данной задаче. В [5] исследована аналогичная задача при наличии *бюджетного ограничения*, при котором не допускаются заимствования денежных средств, а в [6] также детально исследована структура оптимальной стратегии в случае экспоненциального распределения размера требований. В общем случае в [5] было показано, что при малых значениях капитала оптимальная стратегия состоит во вложении *всех средств* в рискованные активы. При больших же значениях начального капитала в [6] было показано, что в случае экспоненциального распределения требований количество средств, вкладываемых в акции, близко к некоторой постоянной величине. При этом для вероятности разорения как функции начального капитала  $u$  верны экспоненциальные асимптотические (при  $u \rightarrow \infty$ ) представления, улучшающие оценки в классической модели без инвестиций (так называемое неравенство Лундберга).

Оптимальное управление в данной задаче имеет достаточно сложную структуру, не допускающую явное представление и требующую численного решения некоторого интегро-дифференциального уравнения. В то же время в [3] для случая нулевой процентной ставки ( $r = 0$ ) и при наличии конечных экспоненциальных моментов случайных величин, определяющих размеры требований, была получена экспоненциальная оценка вероятности разорения – неравенство типа Лундберга – при использовании стратегии, состоящей во вложении в акции некоторого постоянного количества денежных средств. При этом показатель экспоненты в данной оценке совпадает с показателем экспоненты в асимптотическом представлении вероятности разорения, соответствующей оптимальной стратегии [6]. Этот и другие результаты [3] говорят о том, что при нулевой процентной ставке простая стратегия, состоящая во вложении определенного постоянного количества средств в акции, асимптотически, при  $u \rightarrow \infty$ , является в некотором смысле оптимальной. Целью данной работы является исследование асимптотики вероятности разорения в случае положительной процентной ставки ( $r > 0$ ) и при вложении любого постоянного количества средств в акции. Мы покажем, что асимптотика вероятности разорения (точнее, главный член асимптотического представления) является функцией, скорость стремления к нулю которой не зависит от параметров акций и указанного количества средств, и совпадает (с точностью до постоянного множителя) с аналогичными асимптотиками как для случая оптимальной стратегии, так и для случая полного вложения капитала в банк. Тем самым показывается, что при положительной процентной ставке для «богатых» компаний в ситуации редко возникающих крупных исков («легких хвостов» распределений) акции являются несущественным финансовым ин-



струментом, если используется такой консервативный критерий качества инвестиционной политики, как вероятность разорения.

## 1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad (1)$$

где  $R_t$  - величина капитала страховой компании в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ,  $u$  - величина начального капитала,  $c$  - интенсивность поступления страховых взносов (премий),  $N_t, t \geq 0$ , - пуассоновский процесс с параметром  $\lambda$ , определяющий для каждого  $t$  число предъявленных исков за временной промежуток  $(0, t]$ ;  $Z_1, Z_2, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с некоторой функцией распределения  $F(z)$  ( $F(0) = 0, EZ_1 = m < \infty$ ), представляющих собой величины последовательных страховых выплат, которые, кроме того, не зависят от процесса  $\{N_t\}$ .

Введем обозначение  $\tau = \inf \{t : R_t < 0\}$  - момент разорения; тогда  $P(\tau < \infty)$  - вероятность разорения в течение бесконечного интервала времени. Классический результат теории риска Крамера – Лундберга состоит в утверждении, что если выполнено условие положительности нагрузки безопасности, т.е.  $c > \lambda m$ , то при условии существования константы  $\alpha > 0$  («коэффициента Лундберга»), такой что

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x} (1 - F(x)) dx = \frac{c}{\lambda},$$

вероятность разорения допускает оценку  $P(\tau < \infty) \leq e^{-\alpha u}$  (так называемое неравенство Лундберга). Более того, если распределение величины страховой выплаты экспоненциально, то вероятность разорения может быть представлена в следующей простой форме:

$$P(\tau < \infty) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(-\frac{\theta}{m(1 + \theta)} u\right), \quad (2)$$

где  $\theta = c/(\lambda m) - 1 > 0$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда капитал (полностью, или частично) инвестируется акции, цена которых описывается с помощью геометрического броуновского движения:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dw_t), \quad (3)$$

где  $S_t$  - цена акции в момент  $t$ ,  $\mu$  - ожидаемая доходность акции,  $\sigma > 0$  - волатильность,  $\{w_t\}$  - стандартный винеровский процесс. Будем также считать, что оставшаяся часть капитала вкладывается в банк при постоянной процентной ставке  $r$ ,  $0 \leq r < \mu$ . При этом допускается, что количество денежных средств  $M_t$ , вкладываемых в акции в момент времени  $t$ , больше текущего капитала, что предполагает заимствование дополнительных средств по той же процентной ставке. Тогда, если  $M_t$  - количество денег, вкладываемых в акции в момент времени  $t$ , то изменение капитала описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) (см., например, [4])

$$dX_t = (rX_t + (\mu - r)M_t)dt + \sigma M_t dw_t + dR_t. \quad (4)$$

В частности, если  $M_t = X_t$ , т.е. капитал полностью вкладывается в акции, то последнее уравнение приобретает вид

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t + dR_t. \quad (5)$$

Обозначим  $\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_t \geq 0, t \geq 0\}$  - вероятность неразорения процесса  $\{X_t\}$  как функцию начального капитала  $u$ ,  $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$  - вероятность разорения. Положим  $\rho := 2\mu/\sigma^2$ . В [1] доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $F(x) = 1 - e^{-x/m}$ ,  $m > 0$ , и динамика процесса  $\{X_t\}$  описывается уравнением (5). Тогда:

1) если  $\rho > 1$ , то для некоторого  $K > 0$

$$\psi(u) = Ku^{1-\rho}(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty; \quad (6)$$

2) если  $\rho < 1$ , то  $\psi(u) = 0$  для любого  $u$ .

Таким образом, характеристика платежеспособности, определяемая вероятностью неразорения, значительно ухудшается в случае полного инвестирования капитала в акции по сравнению со случаем отсутствия инвестиций, когда верна экспоненциальная оценка (2) для вероятности разорения – характер ее убывания теперь в лучшем случае становится степенным. То же остается верным, если в акции вкладывается некоторая постоянная доля капитала (такая ситуация сводится к предыдущей с помощью подходящей замены параметров).

В данной работе мы будем исследовать вероятность разорения в случае  $M_t \equiv M$ , где  $M > 0$  - произвольная константа. В работе [3] было показано, что при  $r = 0$  и

$$M = \frac{\mu}{\hat{\alpha} \sigma^2}, \quad (7)$$

где  $\hat{\alpha}$  - положительный корень характеристического уравнения  $\lambda E[e^{\hat{\alpha}Z}] = c\hat{\alpha} + \lambda + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$  (здесь  $Z$  - с.в., определяющая размер одного иска, с конечным экспоненциальным моментом), имеет место аналог неравенства Лундберга для соответствующей вероятности разорения:  $\psi(u) \leq e^{-\hat{\alpha}u}$ , а значит, та же оценка верна и при оптимальной (с точки зрения минимизации вероятности разорения) стратегии. Более того, в [6] в случае экспоненциального распределения размеров требований доказано утверждение о том, что для оптимальной стратегии  $\psi(u) = Ke^{-\hat{\alpha}u}(1+o(1))$ ,  $u \rightarrow \infty$ , где  $K$  - некоторая константа.

Ниже рассмотрим случай  $r > 0$ , для которого исследуем асимптотики вероятности разорения при вложении в акции произвольного постоянного количества  $M$  денежных средств. Кроме того, для случая  $r = 0$  выпишем явное представление для вероятности разорения в экспоненциальном случае и покажем, что при больших значениях капитала минимум ее достигается при значении  $M$  вида (7).

## 2. Дифференциальное уравнение для вероятности неразорения

Обозначим вероятность неразорения, соответствующую случаю вложения постоянного объема средств в акции,  $\varphi^M(u) = P\{X_t^M \geq 0, t \geq 0\}$ , где  $\{X_t^M\}$  - процесс, описываемый СДУ (4) при  $M_t \equiv M$ . Инфинитезимальный оператор, определенный на множестве достаточно гладких функций и соответствующий однородному марковскому процессу  $\{X_t^M\}$ , имеет вид (см., например, [5])

$$(Af)(x) = \lambda E[f(x-Z) - f(x)] + [M(\mu - r) + xr + c]f'(x) + \frac{1}{2}M^2\sigma^2 f''(x). \quad (8)$$

Здесь первое слагаемое соответствует ожидаемому приращению функции  $f(X_t^M)$  на бесконечно малом интервале времени  $[0, dt]$  при  $X_0^M = x$  в случае, если на этом интервале произошел скачок процесса (поступило требование - с вероятностью  $\lambda dt + o(dt)$ ), второе - в случае, если скачка не произошло (с вероятностью  $1 - \lambda dt + o(dt)$ ). Тогда вероятность неразорения  $\varphi(u)$  (для краткости при ее обозначении будем иногда опускать индекс  $M$ ) удовлетворяет уравнению  $(A\varphi)(x) = 0$  (см. [5] и ссылки там), или

$$\lambda \int_0^u \varphi(u-z) dF(z) - \lambda \varphi(u) + \varphi'(u) [c + M(\mu - r) + ru] + \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 \varphi''(u) = 0. \quad (9)$$

При этом, очевидно, должно быть выполнено начальное условие

$$\lambda \varphi(0) = \varphi'(0) [c + M(\mu - r)] + \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 \varphi''(0).$$

Кроме того, так как вложение ненулевого количества денег в акции при нулевом капитале означает разорение в текущий момент времени, то  $\varphi(0) = 0$ , и следовательно,

$$\varphi'(0) [c + M(\mu - r)] + \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 \varphi''(0) = 0. \quad (10)$$

Введем предположение об экспоненциальном распределении размеров требований:  $F(x) = 1 - \exp(-\gamma x)$ ,  $\gamma := 1/m > 0$ . Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\gamma \lambda \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-\gamma x) dx - \lambda \varphi(u) + \varphi'(u) [c + M(\mu - r) + ru] + \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 \varphi''(u) = 0. \quad (11)$$

Обозначим  $g(u) := \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-\gamma x) dx$ . Нетрудно показать, что

$$g'(u) = \varphi(u) - \gamma g(u) \quad (12)$$

(при использовании интегрирования по частям с учетом условия  $\varphi(0) = 0$ ).

Тогда любое решение  $\varphi(u)$  уравнения (11) удовлетворяет уравнению

$$G'(u) + \gamma G(u) = 0, \quad (13)$$

где  $G(u)$  - левая часть уравнения (11). Тогда с учетом соотношения (12) уравнение (13) можно переписать в виде ОДУ третьего порядка

$$\begin{aligned} \varphi'''(u) + \left[ \frac{2c}{M^2 \sigma^2} + \frac{2(\mu - r)}{M \sigma^2} + \gamma + \frac{2r}{M^2 \sigma^2} u \right] \varphi''(u) + \\ + \left[ \frac{2((r - \lambda) + \gamma c + \gamma M(\mu - r))}{M^2 \sigma^2} + \frac{2r\gamma}{M^2 \sigma^2} u \right] \varphi'(u) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Можно показать при этом, что решение уравнения (14) тогда и только тогда является решением уравнения (11), когда выполнено условие (10).

### 3. Исследование асимптотики при $r > 0$

Полагая  $\psi = \varphi'$  и введя обозначения

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{2c}{M^2 \sigma^2} + \frac{2(\mu - r)}{M \sigma^2} + \gamma, \quad a_2 = \frac{2r}{M^2 \sigma^2}, \\ a_3 = \frac{2((r - \lambda) + \gamma c + \gamma M(\mu - r))}{M^2 \sigma^2}, \quad a_4 = \frac{2r\gamma}{M^2 \sigma^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

перепишем ОДУ (14) в виде

$$\phi'' + (a_2u + a_1)\phi' + (a_4u + a_3)\phi = 0, \quad (16)$$

где  $\phi = \phi'$ . Далее, приведем уравнение (16) к системе, полагая  $y_1 = \phi$ ,  $y_2 = \phi'$ . Тогда  $y_1' = y_2$ ,  $y_2' = -(a_2u + a_1)y_2 - (a_4u + a_3)y_1$ , и, следовательно, в матричном виде получаем уравнение

$$y' = (A_1 + A_0u)y, \quad (17)$$

где  $y = (y_1, y_2)^T$ ,  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_4 & -a_2 \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$ .

Перепишем уравнение (17) в виде

$$u^{-1}y' = (A_0 + \frac{A_1}{u})y. \quad (18)$$

Эта система обладает иррегулярной особой точкой на бесконечности ранга 2. Так как матрица  $A_0$  имеет одно нулевое собственное значение (с.з.), то, чтобы найти главный член асимптотического поведения решения на бесконечности, надо найти поправку к нулевому с.з. по теории возмущений с точностью до  $O(1/u^3)$ . Для этого воспользуемся методом асимптотической диагонализации для систем линейных ОДУ (по поводу этого метода и классификации особых точек для ОДУ см. [8] и цитированную там литературу). Сначала найдем матрицу  $T$ , являющуюся диагонализатором матрицы  $A_0$ , т.е.  $T^{-1}A_0T = \tilde{A}_0$ . Нетрудно подсчитать, что такой матрицей является

матрица  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_4/a_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$ . Введем теперь преобразование

$$y = T \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right) w, \quad (19)$$

где  $N_1, N_2$  - некоторые матрицы, которые будут определены ниже. Дифференцируя (19), имеем

$$y' = T \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right) w' - T \left( \frac{N_1}{u^2} + \frac{2N_2}{u^3} \right) w,$$

и из (18) получим уравнение

$$u^{-1}w' = \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right)^{-1} \left[ \left( \tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{u} \right) \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right) + \frac{N_1}{u^3} + \frac{2N_2}{u^4} \right] w, \quad (20)$$

где

$$\tilde{A}_1 = M^{-1}A_1M = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -a_3 - \gamma(\gamma - a_1) & \gamma - a_1 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь матрицы  $N_1, N_2$  таким образом, чтобы уравнение (20) приобрело вид

$$u^{-1}w' = \left( \tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{u} + \frac{\tilde{A}_2}{u^2} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \right) w, \quad (21)$$

где диагональные матрицы  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma - a_1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .

Здесь диагональные элементы первой матрицы совпадают с диагональными элементами матрицы  $\tilde{A}_1$ , а диагональные элементы последней матрицы определим ниже. Приравняем правые части (20) и (21):

$$\left( \tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{u} \right) \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right) + \frac{N_1}{u^3} + \frac{2N_2}{u^4} = \left( E + \frac{N_1}{u} + \frac{N_2}{u^2} \right) \left( \tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{u} + \frac{\tilde{A}_2}{u^2} \right). \quad (22)$$

Приравнивая теперь здесь коэффициенты при  $u^{-1}$ , получим  $\tilde{A}_0 N_1 + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 + N_1 \tilde{A}_0$ , откуда можно определить внедиагональные элементы матрицы  $N_1$ , ее диагональные элементы для определенности положим равными нулю. Тогда

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a_2} \\ \frac{-a_3 - \gamma(\gamma - a_1)}{a_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при этом } \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая теперь в (22) коэффициенты при  $u^{-2}$ , получим

$$\tilde{A}_0 N_2 + \tilde{A}_1 N_1 = \tilde{A}_2 + N_1 \tilde{A}_1 + N_2 \tilde{A}_0,$$

откуда (полагая диагональные элементы для определенности равными нулю) получим:

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a_2^2}(2\gamma - a_1) \\ \frac{n_3}{a_2}(2\gamma - a_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{r} - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda}{r} \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (21), отбросив слагаемые больших порядков малости, заменим асимптотически эквивалентной системой (см. [7, глава 2, теорема 8])

$\tilde{w}' = u \left( \tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{u} + \frac{\tilde{A}_2}{u^2} \right) \tilde{w}$ , которая распадается на два независимых

уравнения  $\tilde{w}'_1 = \left( -\gamma + \frac{r}{u} \right) \tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}'_2 = \left( -\frac{2r}{M^2 \sigma^2} u - \left( \frac{2c}{M^2 \sigma^2} + \frac{2(\mu - r)}{M \sigma^2} \right) + \frac{1 - \lambda}{u} \right) \tilde{w}_2$ .

Решения этих уравнений при  $u \rightarrow \infty$  имеют вид

$\tilde{w}_1 = C_1 e^{-\gamma u} u^{\frac{\lambda-1}{r}} (1+o(1))$ ,  $\tilde{w}_2 = C_2 e^{-\left(\frac{r}{M^2\sigma^2}u^2 + \frac{2(c+(\mu-r)M)}{M^2\sigma^2}u\right)} u^{1-\frac{\lambda}{r}} (1+o(1))$ , где  $C_1, C_2$  - некоторые константы, а следовательно, такие же представления верны для решения системы (21). Учитывая (19), проведем обратные преобразования переменных:

$$y_1 = w_1 + \left(-\frac{M^2\sigma^2}{2ru} + \frac{l_2}{u^2}\right)w_2, \quad y_2 = \left(-\gamma - \frac{r-\lambda}{ru} + \frac{l_3}{u^2}\right)w_1 + \left(1 + \gamma\left(\frac{M^2\sigma^2}{2ru} - \frac{l_2}{u^2}\right)\right)w_2.$$

Таким образом, с учетом введенных обозначений  $\varphi' = C_1 e^{-\frac{1}{m}u} u^{\frac{\lambda-1}{r}} (1+o(1))$  и, следовательно,  $\psi = C_3 e^{-\frac{1}{m}u} u^{\frac{\lambda-1}{r}} (1+o(1))$  для некоторой константы  $C_3 > 0$ . Видно, что данное асимптотическое представление вероятности разорения не зависит от количества  $M$  денежных средств, вкладываемых в акции, и совпадает с представлением вероятности разорения в случае вложения всех средств в банковский счет (см. [6]).

#### 4. Исследование асимптотики при $r = 0$

При  $r = 0$  уравнение (14) приобретает вид

$$\varphi'''(u) + \left[\frac{2c}{M^2\sigma^2} + \frac{2\mu}{M\sigma^2} + \gamma\right]\varphi''(u) + \left[\frac{2(-\lambda + \gamma c + \gamma M\mu)}{M^2\sigma^2}\right]\varphi'(u) = 0. \quad (23)$$

Введем обозначения:  $d_1 = \frac{2(-\lambda + \gamma c + \gamma M\mu)}{M^2\sigma^2}$ ,  $d_2 = \frac{2c}{M^2\sigma^2} + \frac{2\mu}{M\sigma^2} + \gamma$ . Тогда корни характеристического уравнения для линейного ОДУ (23) имеют вид

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1}}{2}, \quad v_3 = \frac{-d_2 - \sqrt{d_2^2 - 4d_1}}{2}$$

(нетрудно убедиться в том, что выражение, стоящее под корнем, всегда положительно).

Рассмотрим здесь сначала случай  $d_1 > 0$ , т.е.  $c - \lambda m + M\mu > 0$ , тогда получаем два отрицательных корня. Последнее равенство верно, если имеется положительная нагрузка безопасности ( $c - \lambda m > 0$ ), обеспечивающая положительный снос процесса, описывающего изменение капитала, а при отрицательной нагрузке – если количество вложений в акции достаточно для обеспечения такого сноса. С учетом условия  $\varphi(0) = 0$ , получаем решение (23) в виде  $\varphi(u) = k_1 + k_2 - k_1 e^{v_2 u} - k_2 e^{v_3 u}$ , где  $k_1, k_2$  - произвольные постоянные. Учитывая также условие (10) и условие  $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1$ , для констант  $k_1, k_2$  можно получить явные выражения. Следовательно, асимптотика вероятности разорения имеет вид  $\psi(u) = k_1 e^{v_2 u} (1+o(1))$ ,  $u \rightarrow \infty$ , где отрицательный

показатель  $\nu_2$  зависит от  $M$ . Нетрудно показать, что при  $M$  вида (7)  $\nu_2$  приобретает значение  $\hat{\alpha}$ .

Рассмотрим теперь другой случай,  $d_1 \leq 0$ , т.е.  $c - \lambda m + M \mu \leq 0$ , когда процесс изменения капитала не имеет положительного сноса. Тогда получаем, что  $\nu_2 \geq 0$ ,  $\nu_3 < 0$ , и любое ограниченное решение (23) (среди которых должна находиться вероятность неразорения) представляется в виде  $\varphi(u) = -k_2 e^{\nu_3 u} + k_2$ , где  $k_2$  - произвольная константа. Учитывая условие (10), получаем, что  $k_2 = 0$  (это нетрудно заметить, учитывая возможные значения  $\nu_3$  в рассматриваемом случае). Следовательно,  $\varphi(u) \equiv 0$ , или  $\psi(u) \equiv 1$ .

### Список литературы

1. Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S. In the Insurance business risky investments are dangerous. – Finance and Stochastics, 2002, v.6, №2.
2. S. Browne Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. – Mathematics of Operations Research, 1995, v. 20, p. 937-958.
3. J. Gaier, P. Grandits, W. Schachermayer Asymptotic ruin probabilities and optimal investment, 2002.
4. Hipp C., Plum M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. - Finance and Stochastics, 2003, v. 7, No 3, p. 299-321.
5. Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования. I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения. – Обзорение прикладной и промышленной математики, 2009, т. 16, вып. 6, с. 961-981; II. Модель Крамера-Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований. – Обзорение прикладной и промышленной математики, 2010, т. 17, вып. 1, с. 3-24.
7. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
8. Конюхова Н.Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 3, с. 629-645.



## О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования капитала в безрисковый актив<sup>1</sup>

Работа относится к проблеме оценки риска разорения в динамических моделях страхования, учитывающих инвестиционную деятельность страховщика как неотъемлемую составляющую в процессе его полноценного функционирования на современном финансовом рынке. С достаточно подробным обзором по этой теме можно ознакомиться в работе [1], см. также цитируемую там литературу.

Анализ многих моделей страхования показывает, что инвестиции являются важным источником аккумуляции резервов, достаточных для ведения основной деятельности, компенсируя в случае необходимости недостаточность собираемых премий. Это находит выражение в том, что наличие возможности инвестирования резерва в безрисковые или рискованные активы позволяет назначать страховые премии и без соблюдения требования положительности нагрузки безопасности<sup>2</sup>, обеспечивающей положительный снос процесса риска - процесса, описывающего изменение капитала с учетом поступающих премий и выплат по требованиям. Возможность назначения пониженных премий, естественно, является привлекательной для страхователей, а "безопасность" страховщика, выражаемая в положительности сноса процесса риска, обеспечивается за счет правильной инвестиционной политики.

В данной работе исследуется вероятность разорения в модели с дискретным временем, рассматриваемой в предположении, что резерв хранится на банковском счету при фиксированной процентной ставке. Вероятность разорения на конечных интервалах времени в этой модели исследовалась в [2], вероятность разорения на бесконечном интервале времени рассматривалась как предел вероятностей на конечных интервалах, связанных между собой рекуррентным интегральным соотношением. Вычисление указанного предела производилось в [2], на наш взгляд,

---

<sup>1</sup>Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 10-01-00767, 08-01-00139.

<sup>2</sup>Нагрузка безопасности связана с назначением таких страховых взносов, или премий, поступающих в единицу времени, которые превышают значение ожидаемых страховых выплат за то же время, и тем самым обеспечивают положительность ожидаемого чистого дохода страховщика.

достаточно сложным и громоздким способом. В настоящей работе будем искать вероятность разорения непосредственно на бесконечном интервале времени как решение интегрального уравнения с заданным предельным условием на бесконечности; такая задача сводится к сингулярной задаче Коши (ЗК) для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) с отклоняющимся аргументом. Основным результатом данной работы был представлен в [3] (допущенная там по вине редакции опечатка здесь исправлена).

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается динамическая модель страхования в дискретном времени, в которой исходный процесс риска имеет вид (см. [1])

$$R_n = u + cn - \sum_{k=1}^n Z_k,$$

где  $R_n$  – капитал компании в момент времени  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $u$  – начальный капитал, число  $c > 0$  определяет размер страховых взносов в единицу времени,  $Z_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с функцией распределения (ф.р.)  $F(z)$ , определяющих размеры страховых выплат. При инвестировании всего капитала в безрисковый актив при процентной ставке  $r > 0$  динамика капитала описывается уравнением

$$X_n = (1 + r)X_{n-1} + c - Z_n, \quad X_0 = u. \quad (1)$$

Для дальнейшего, с целью упрощения формул, будем иногда использовать обозначение

$$\rho := 1 + r. \quad (2)$$

Вероятность разорения  $\psi(u)$  как функция начального капитала для процесса  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  на бесконечном интервале времени определяется формулой

$$\psi(u) = \mathbf{P}\{X_n < 0 \text{ при некотором } n\},$$

тогда для соответствующей вероятности неразорения  $\varphi(u)$  имеем

$$\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_n \geq 0 \text{ для любого } n\};$$

функция  $\varphi(u)$  удовлетворяет уравнению  $(\mathcal{A}\varphi)(u) = 0$ , где  $(\mathcal{A}f)(x) = \mathbf{E}(f(X_1) - f(X_0)|X_0 = x)$  - "производящий" оператор, соответствующий однородной марковской цепи (1). Указанный оператор определяется равенством  $(\mathcal{A}f)(x) = \mathbf{E}f(\rho x + c - Z) - f(x)$ , где  $Z$  - с.в. с ф.р.  $F(z)$ . В случае экспоненциального распределения выплат, т.е. когда  $F(z) = 1 - \exp(-\lambda z)$ , функция  $\varphi(u)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(u) = \lambda \int_0^{(r+1)u+c} \varphi((r+1)u+c-z) \exp(-\lambda z) dz, \quad u \geq 0, \quad (3)$$

и предельному условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1. \quad (4)$$

## 2. СВЕДЕНИЕ К СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДУ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Дифференцируя уравнение (3) и используя интегрирование по частям, с учетом обозначения (2) получим:

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= \lambda \rho \left( \varphi(0) \exp[-\lambda(\rho u + c)] - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\rho u+c} \varphi'_z(\rho u + c - z) \exp(-\lambda z) dz \right) = \\ &= \lambda \rho \left( \varphi(\rho u + c) - \lambda \int_0^{\rho u+c} \varphi(\rho u + c - z) \exp(-\lambda z) dz \right) = \\ &= \lambda \rho \left( \varphi(\rho u + c) - \varphi(u) \right). \end{aligned}$$

В результате получаем сингулярную ЗК для ОДУ с отклоняющимся аргументом:

$$\varphi'(u) = \lambda(r+1) \left[ \varphi((r+1)u+c) - \varphi(u) \right], \quad u \geq 0, \quad (5)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1. \quad (6)$$

*Замечание 1.* Всякое решение уравнения (3) удовлетворяет (5). Обратное неверно:  $\varphi(u) \equiv const \neq 0$  удовлетворяет (5), но не является

решением (3). В частности,  $\varphi(u) \equiv 1$  является решением задачи (5), (6), но не является решением задачи (3), (4). ■

**Лемма 1.** Решение  $\varphi(u)$  уравнения (5) тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (3), когда выполняется условие

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^c \varphi(c-z) \exp(-\lambda z) dz = \lambda \exp(-\lambda c) \int_0^c \varphi(y) \exp(\lambda y) dy. \quad (7)$$

**Доказательство.** Необходимость (7), с учетом предыдущего вывода ОДУ (5), очевидным образом следует из (3) при  $u = 0$ . Докажем теперь достаточность. Для этого предположим, что  $\varphi(u)$  является решением (5) и для него справедливо (7). Покажем, что  $\varphi(u)$  удовлетворяет (3). Действительно, ОДУ (5) эквивалентно интегральному соотношению

$$\varphi(u) = A \exp(-\lambda \rho u) + \lambda \rho \int_0^u \exp(-\lambda \rho(u-s)) \varphi(\rho s + c) ds, \quad u \geq 0, \quad (8)$$

где  $A$  - произвольная постоянная. Соотношение (7) влечет

$$A = \lambda \int_0^c \exp(-\lambda z) \varphi(c-z) dz. \quad (9)$$

Тогда из (8), (9) получаем

$$\varphi(u) = J_1(u) + J_2(u), \quad (10)$$

где

$$J_1(u) = \lambda \exp(-\lambda \rho u) \int_0^c \exp(-\lambda z) \varphi(c-z) dz,$$

$$J_2(u) = \lambda \rho \int_0^u \exp(-\lambda \rho(u-s)) \varphi(\rho s + c) ds.$$

Полагая в  $J_1(u)$ :  $x = \rho u + z$ , а в  $J_2(u)$ :  $x = \rho(u-s)$ , получим

$$J_1(u) = \lambda \int_{\rho u}^{\rho u + c} \exp(-\lambda x) \varphi(\rho u + c - x) dx,$$

$$J_2(u) = \lambda \int_0^{\rho u} \exp(-\lambda x) \varphi(\rho u + c - x) dx;$$

подставляя эти выражения в (10), получаем уравнение (3). Лемма доказана. ■

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ

**Лемма 2.** Пусть в (5) параметры  $\lambda > 0$ ,  $r > 0$ ,  $c > 0$  таковы, что выполняется условие

$$r^{-1} \exp(-\lambda c(r+1)) = q < 1. \quad (11)$$

Тогда задача (5), (6) обладает однопараметрическим семейством решений  $\varphi(u, \gamma)$ , где  $\gamma \in \mathbb{R}$  - параметр:

$$\begin{aligned} \varphi(u, \gamma) = & 1 - \gamma \left[ \exp\left(-\lambda[(r+1)u + c]\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp\left(-\lambda\left[(r+1)u^k + c \sum_{i=0}^{k-1} (r+1)^i\right]\right)}{\prod_{j=1}^{k-1} [(r+1)^j - 1]} \right], \quad u \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Ряд в правой части (12) сходится абсолютно и равномерно на  $\mathbb{R}_+$ : он мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\exp(-\lambda c) \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \exp(-\lambda c)q/(1-q),$$

что влечет оценку

$$|\varphi(u, \gamma) - 1| \leq |\gamma| \exp(-\lambda c)/(1-q) \quad \forall u \geq 0.$$

**Доказательство.** В задаче (5), (6) представим  $\varphi(u)$  в виде

$$\varphi(u) = 1 - \gamma \mu(u) \exp[-\lambda((r+1)u + c)], \quad u \geq 0, \quad (13)$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$ , а  $\mu(u)$  - функция, удовлетворяющая, в силу (5), (6), однородному дифференциальному уравнению

$$\mu'(u) = \lambda(r+1)\mu(u(r+1) + c) \exp[-\lambda(r+1)(ur + c)], \quad u \geq 0, \quad (14)$$

и предельному условию на бесконечности

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mu(u) = 1. \quad (15)$$

Будем рассматривать функцию  $\mu$  как элемент банахова пространства  $\mathbb{C}[0, \infty)$  непрерывных ограниченных на  $[0, \infty)$  функций с нормой

$$\|\mu\| = \sup_{u \in [0, \infty)} |\mu(u)|. \quad (16)$$

Введем в этом пространстве оператор  $V : \mathbb{C}[0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}[0, \infty)$ , определяемый соотношением

$$(V\mu)(u) = 1 - \lambda\rho \int_u^\infty \exp(-\lambda\rho(sr + c))\mu(s\rho + c)ds, \quad u \geq 0. \quad (17)$$

Тогда решение сингулярной задачи (14), (15) есть неподвижная точка оператора  $V$ :

$$\mu = V\mu. \quad (18)$$

Для дальнейшего доказательства основной Леммы 2 нам потребуются две следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 3.** Пусть выполнено предположение Леммы 2, т.е.  $q < 1$ . Тогда оператор  $V$  является сжимающим с коэффициентом сжатия  $q$ .

**Доказательство.** Для любых  $\mu, \tilde{\mu} \in \mathbb{C}[0, \infty)$  имеем при любом  $u \geq 0$

$$\begin{aligned} |(V\mu - V\tilde{\mu})(u)| &= \\ &= \lambda\rho \left| \int_u^\infty \exp[-\lambda\rho(sr + c)] [\mu(s\rho + c) - \tilde{\mu}(s\rho + c)] ds \right| \leq \\ &\leq \lambda\rho \|\mu - \tilde{\mu}\| \int_0^\infty \exp[-\lambda\rho(sr + c)] ds = q \|\mu - \tilde{\mu}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Следствие.** В силу теоремы о сжимающих отображениях (см., например, [4]) существует, и притом единственная, неподвижная точка  $\hat{\mu} \in \mathbb{C}[0, \infty)$  отображения  $V$ , т.е. уравнение (18) (и, следовательно, задача (14), (15)) имеет единственное решение  $\hat{\mu}$ , которое может быть найдено как предел

$$\hat{\mu} = \lim_{k \rightarrow \infty} V^k(\mu_0)$$

для любого начального  $\mu_0 \in \mathbb{C}[0, \infty)$ , и для скорости сходимости справедлива оценка

$$\|V^k(\mu_0) - \hat{\mu}\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|V(\mu_0) - \mu_0\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Лемма 4.** Пусть выполнено неравенство (11). Тогда решение задачи (14), (15) представимо в виде

$$\mu(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^k [(r+1)^j - 1]} \times$$

$$\times \exp\left(-\lambda c \sum_{i=1}^k (r+1)^i\right) \exp\left(-\lambda(r+1)[(r+1)^k - 1]u\right), \quad u \geq 0. \quad (19)$$

Здесь ряд в правой части (19) сходится абсолютно и равномерно на  $\mathbb{R}_+$ : он мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q/(1-q),$$

откуда следует оценка

$$\|\mu\| \leq 1/(1-q).$$

**Доказательство.** Существование и единственность решения сингулярной ЗК (14), (15) следуют из Леммы 3. Осталось доказать представление (19).

Полагая  $\mu^{(0)}(u) \equiv 1$ , используем метод последовательных приближений:  $\mu^{(k)} = V\mu^{(k-1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $V$  определено в (17). Тогда можно показать по индукции, что

$$\mu^{(k)}(u) = \mu^{(k-1)}(u) + (-1)^k I_k(u), \quad k = 1, 2, \dots$$

где, с учетом обозначения (2),

$$I_k(u) = \frac{\exp(-\lambda c \sum_{i=1}^k \rho^i)}{\prod_{j=1}^k (\rho^j - 1)} \exp\left(-\lambda \rho (\rho^k - 1)u\right),$$

отсюда легко видеть, что верно (19). Лемма 4 доказана.

Доказательство Леммы 2 теперь следует из Леммы 4 и замены переменных (13).

*Замечание 2.* При  $q < 1$  уравнение (14) не имеет других ограниченных на бесконечности решений, кроме однопараметрического семейства решений  $\tilde{\mu}(u, \gamma) = \gamma \mu(u)$ , где  $\mu(u)$  определяется в (19),  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Но при любых наборах параметров это уравнение имеет также семейство неограниченных при  $u \rightarrow \infty$  решений вида

$$\tilde{\mu}(u, C) = C \exp\left(\lambda(r+1)u\right), \quad u \geq 0,$$

где  $C$  - произвольная постоянная. При переходе к  $\varphi(u)$  из ( ) получаем

$$\varphi(u, C) = 1 - C \exp(-\lambda c) = \text{const.}$$

Эти решения удовлетворяют (5), но не удовлетворяют (3). Интересно отметить, что при  $q < 1$  мы имеем двухпараметрическое семейство решений уравнения (14), что невозможно в случае стандартного ОДУ 1-го порядка, не включающего отклоняющихся аргументов. ■

#### 4. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Чтобы дать окончательное представление для решения задачи (3), (4), надо найти значение  $\gamma$  в (12), исходя из требования (7). Подставляя (12) в (7), получим:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma \left[ \exp(-\lambda c) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\exp\left(-\lambda c \sum_{i=0}^k \rho^i\right)}{\prod_{j=1}^k (\rho^j - 1)} \right] = \\ = \lambda \int_0^c \left\{ 1 - \gamma \left[ \exp(-\lambda[(c-z)\rho + c]) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\exp\left(-\lambda[(c-z)\rho^{k+1} + c \sum_{i=0}^k \rho^i]\right)}{\prod_{j=1}^k (\rho^j - 1)} \right] \right\} \exp(-\lambda z) dz. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислив интеграл в правой части (20) и проведя некоторые несложные преобразования, получим явное выражение для  $\gamma$ :

$$\gamma = \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp\left(-\lambda c \sum_{i=0}^{k-1} (r+1)^i\right)}{\prod_{j=1}^k [(r+1)^j - 1]} \right]^{-1}. \quad (21)$$

В результате мы доказали, что справедлива следующая

**Теорема.** Пусть выполнены предположения Леммы 2. Тогда решение  $\varphi(u)$  сингулярной задачи (3), (4) существует и единственно и представляется сходящимся рядом (12), где  $\gamma$  определено формулой (21). Это решение является монотонно возрастающей на  $\mathbb{R}_+$  функцией, удовлетворяющей требованию  $0 < \varphi(u) < 1$ ,  $u \in [0, \infty)$ .



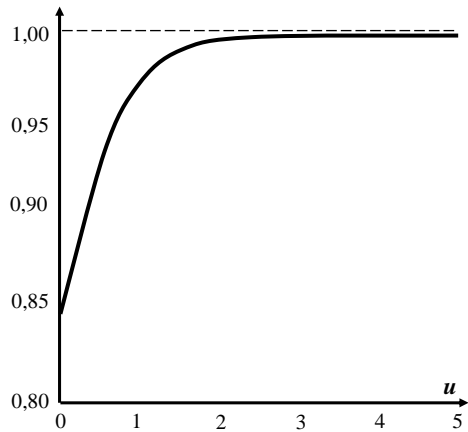


Рис. 1

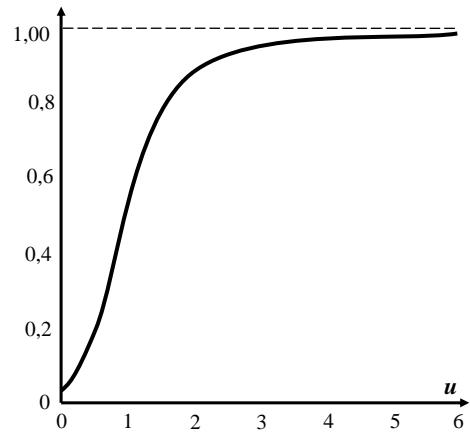


Рис. 2

Результаты расчетов по полученным формулам приведены на рис. 1,2. На рис. 1 изображен график вероятности неразорения в зависимости от начального капитала для следующих параметров:  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$ ,  $r = 0.7$ ; на рис. 2 – то же для  $\lambda = 1$ ,  $c = 0.3$ ,  $r = 0.7$ . В первом случае нагрузка безопасности положительна:  $c - \mathbf{E}Z_1 = c - 1/\lambda > 0$ , во втором же случае  $c - 1/\lambda < 0$ , т.е. собираемые премии меньше ожидаемых выплат, и здесь инвестиции необходимы для того, чтобы избежать разорения с вероятностью единица при любом начальном капитале. В этом случае, как показывает рис.2, вероятность неразорения является выпуклой функцией в некоторой окрестности нуля. В расчетах также получили: для первого случая  $\gamma \approx 1.234453$ ,  $\varphi(0) \approx 0.840887$ ; для второго случая  $\gamma \approx 4.116134$ ,  $\varphi(0) \approx 0.0186157$ .

Авторы выражают благодарность С.А.Коробицыной за помощь в проведении расчетов.

## Список литературы

- [1] *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения. — *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2009, т. 16, вып. 6, с. 961-981; II. Модель Крамера-Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований. — *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2010, т. 17, вып. 1, с. 3-24.
- [2] *Мельников А.В.* Риск-менеджмент. Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. М.:АНКИЛ, 2003.
- [3] *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б.* О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования. — *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2009, т. 16, вып. 6, с. 1022-1023.
- [4] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

## Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при наличии случайных факторов<sup>1</sup>

Ценообразование в результате взаимодействия спроса и предложения является одним из важнейших экономических процессов. Рассмотрение взаимосвязи и динамики этих показателей составляет неотъемлемую часть их анализа. Наряду со спросом и предложением, во времени изменяются и обуславливающие их факторы, на которые можно воздействовать (например, путем изменения качественных характеристик производства или потребления). При управлении различными экономическими переменными ключевую роль играет стремление приблизиться (в долгосрочной перспективе) к их "равновесному" "плановому" "эталонному" уровню, минимизируя при этом потери из-за отклонения от этого желаемого значения. Такие потери (издержки) часто учитываются в квадратичном виде [1], [8]. Эмпирические исследования [9], [10] показывают, что экономические агенты обладают индивидуальными предпочтениями при оценке распределенных во времени денежных потоков. Это проявляется в дисконтировании, то есть в уменьшении субъективных оценок будущего при их рассмотрении в настоящем. Математически дисконтирование учитывается путем введения в критерий качества дисконтирующей функции. В работе рассматривается модель управления ценой, учитывающая, помимо традиционной величины избыточного спроса, также и влияние случайных факторов. Далее, в качестве "долговременного плана" вводится равновесная цена из соответствующей детерминированной модели. Так как речь идет о намерении приблизиться к равновесному уровню цены в долгосрочном периоде, будем рассматривать задачу управления системой на бесконечном интервале времени, описываемая модель системы управления представляет собой стохастический линейно-квадратический регулятор с дисконтированием. В работе получен вид оптимального в среднем управления и исследованы его вероятностные свойства. Помимо этого, изучен вопрос сходимости оптимальной ценовой траектории к равновесному значению.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 10-01-00767

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая система управления ценой основывается на детерминированной модели в дискретном времени, предложенной в [1]. Модель ценообразования в экономике со случайными возмущениями в непрерывном времени строится путем перехода от зависимостей в дискретном времени к соответствующим соотношениям в непрерывном. Как и в [1], предположим, что изменение цены  $p_t$  пропорционально (согласно закону Вальраса) разнице между спросом  $D_t$  и предложением  $S_t$

$$p_{t+1} - p_t = \lambda(D_t - S_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$\lambda > 0$  - константа, зависящая от выбранной единицы времени. В то же время и спрос, и предложение сами зависят от текущего значения цены. Мы будем рассматривать случай линейной связи, предполагая, что соблюдены классические законы спроса и предложения, а влияние случайных факторов учитывается путем включения в уравнение "шума". Для динамики спроса такой вид уравнения приводится, например, в [6]. По аналогии можно написать соответствующее уравнение и для предложения. Система, описывающая взаимосвязь текущего значения цены, спроса и предложения будет иметь, таким образом, вид

$$\begin{aligned} D_t &= \alpha - a^D p_t + \sigma^D \xi_t \quad \alpha, a^D > 0 \\ S_t &= \beta + a^S p_t + \sigma^S \xi_t \quad \beta, a^S > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a^D, a^S, \sigma^D, \sigma^S, \alpha > \beta$  - константы,  $\{\xi_t\}$  - последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Отметим, что в дальнейшем  $\alpha, \beta$  будут рассматриваться как управляющие параметры. Учитывая (1),(2) получаем стохастическое разностное соотношение, описывающее эволюцию цены

$$p_{t+1} - p_t = \lambda(\alpha - \beta) - \lambda a p_t + \sigma \xi_t, \quad (3)$$

где  $a = a^D + a^S > 0, \sigma = \sigma^D - \sigma^S$ .

В случае непрерывного времени аналогом (3) является следующее стохастическое дифференциальное уравнение ценообразования:

$$dp_t = \lambda(\alpha - \beta)dt - \lambda a p_t dt + \sigma dW_t, \quad p_0 - \text{задано}, \quad (4)$$

где  $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$  - стандартный одномерный винеровский процесс. Далее, разность  $\alpha - \beta$  будем считать управляющим параметром в предположении, что управление может осуществляться, например, со стороны производителя или потребителя. Тогда (4) становится управляемым случайным процессом, управляющие параметры обозначим как  $\alpha_t, \beta_t$ . Если в уравнении (4)  $\sigma = 0$ , а параметры  $\alpha_t = \alpha, \beta_t = \beta$ , то при  $t \rightarrow \infty p_t \rightarrow \hat{p} := \frac{\alpha - \beta}{a} > 0$ , то есть  $\hat{p}$  - равновесная цена для детерминированного случая.

Перейдем к описанию самой модели. Пусть на вероятностном пространстве  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$  задана фильтрация  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , описывающая накопление информации о состоянии экономической среды. На пространстве с фильтрацией  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F}\}$  определим процесс эволюции цены  $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$  в экономике со случайными возмущениями как решение следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dp_t = -\lambda a p_t dt + \lambda u_t dt + \sigma dW_t, \quad p_0 - \text{задано}, \quad (5)$$

где  $u_t$  - неупреждающее управление. В качестве допустимых управлений будем рассматривать процессы  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ , согласованные с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ , такие что уравнение (5) имеет решение. Множество допустимых управлений обозначим как  $\mathcal{U}$ .

Задача заключается в асимптотическом приближении процесса  $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$  к состоянию  $\hat{p}$ , а управление  $u_t$  при этом желательно поддерживать вблизи уровня  $\hat{u} := a\hat{p}$ . Потери из-за отклонения  $p_t$  от  $\hat{p}$  и  $u_t$  от  $\hat{u}$  в момент времени  $t$  учтем в виде  $q(p_t - \hat{p})^2 + r(u_t - \hat{u})^2$ , где  $q, r > 0$  - константы. Для экономического агента суммы, относящиеся к разным моментам времени, неравнозначны, поэтому вместо  $q(p_t - \hat{p})^2 + r(u_t - \hat{u})^2$  в реальности он будет использовать дисконтирующую функцию  $f_t$ . Свойства, которым должна удовлетворять  $f_t$ , приведены ниже. Таким образом, за плановый период  $[0, T]$  совокупные потери составят

$$J_T(u^T) = \int_0^T f_t [q(p_t - \hat{p})^2 + r(u_t - \hat{u})^2] dt, \quad (6)$$

где  $T$  - конечный момент времени,  $u^T = \{u_t\}_{t \leq T} \in \mathcal{U}^T$  - управление на интервале  $[0, T]$ .

Предполагается, что функция  $f_t$  обладает следующими свойствами: 1)  $f_t > 0$  для  $t \geq 0$ ,  $f_0 = 1$ ; 2)  $f_t$  - невозрастающая и дифференцируемая на  $[0, \infty)$ ; 3) темп убывания функции  $f_t$  ограничен ( $|(\ln f_t)'| < const$ ).

Например, при  $f_t \equiv 1$  модель (5)-(6) соответствует стохастическому линейно-квадратическому регулятору. Если  $f_t = e^{-\gamma t}$  ( $\gamma > 0$ ), то это задача с обычным дисконтированием, при  $f_t = \frac{1}{(1 + \theta t)^{\theta_1/\theta}}$  ( $\theta_1, \theta > 0$ ) получаем общий вид задачи гиперболического дисконтирования, а в случае  $f_t = m_1 e^{-\alpha_1 t} + (1 - m_1) e^{-\alpha_2 t}$  ( $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $0 < m_1 < 1$ ) возникает задача с двойным дисконтированием. Такие дисконтные множители традиционно применяются в экологических, экономических и поведенческих моделях [2], [7].

Для случая  $\sigma = 0$ ,  $f_t \equiv 1$  (отсутствие случайных возмущений и дисконтирования) в задаче с (5),(6) с критерием  $J_\infty(u)$  в [1] был получен вид оптимального управления; оно обеспечивало асимптотическое стремление ценовой траектории  $p_t^*$  к равновесному значению  $\hat{p}$ . В нашей ситуации, когда на систему воздействуют случайные факторы, естественная постановка - минимизация совокупных средних потерь (6) за период  $[0, T]$ , то есть

$$E J_T(u^T) \rightarrow \inf_{u^T \in \mathcal{U}^T} . \quad (7)$$

В случае, когда горизонт планирования  $T$  неограниченно возрастает ( $T \rightarrow \infty$ ), будем искать управление  $u^*$ , *оптимальное в среднем на бесконечном интервале времени*

*Определение 1.* Управление  $u^* \in \mathcal{U}$  будем называть *оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени*, если оно является решением задачи

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) E J_T(u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} \quad N(T) := \frac{1}{\int_0^T f_t dt} . \quad (8)$$

( $N(T)$  - *осредняющий множитель*). ■

В [3] исследовалась задача управления диффузионным процессом с критерием качества  $\liminf_{T \rightarrow \infty} N(T) E \int_0^T f_t c(x_t, u_t) dt$ , где  $c(x, u)$  - неко-

торая функция, а дисконтирующая функция  $f_t$  обладает свойствами  $f_T \rightarrow 0$ ,  $N(T) \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . В частности, были получены условия существования так называемых "overtaking" оптимальных в среднем управлений. Мы же станем рассматривать задачу поиска управления, оптимального в смысле (8). Отдельный интерес представляет исследование вероятностных свойств такого управления. Помимо этого, возникает вопрос: позволяет ли применение стратегии  $u^*$  асимптотически приблизиться к равновесной цене  $\hat{p}$  в каком-либо смысле?

## 2. СВЕДЕНИЕ К СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА

Задача (5)-(7) не удовлетворяет условиям существования решения на бесконечном интервале времени: отделимости от нуля коэффициентов  $f_t q$  и  $f_t r$  в функционале (6) (см. [4]). Для сведения этой задачи к стандартному стохастическому линейно-квадратическому регулятору сделаем замену переменных

$$X_t := \sqrt{f_t}(p_t - \hat{p}), \quad U_t := \sqrt{f_t}(u_t - \hat{u}). \quad (9)$$

С учетом равенства  $-a\hat{p} + \hat{u} = 0$ , динамика процесса  $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  будет описываться уравнением

$$dX_t = G_t X_t dt + \lambda U_t dt + \sigma \sqrt{f_t} dW_t \quad X_0 = x, \quad (10)$$

где  $G = (G_t := -\lambda a + \frac{f'_t}{2f_t}, t \geq 0)$  - ограниченная функция,  $x := p_0 - \hat{p}$ .

Функционал (6) в новых обозначениях примет вид

$$J_T(U^T) = \int_0^T (qX_t^2 + rU_t^2) dt. \quad (11)$$

Дадим ряд вспомогательных определений.

*Определение 2.* Пусть  $A = (A_t, t \geq 0)$  - кусочно-непрерывная функция, зададим  $\Phi_{(A)}(t, s)$  как функцию, являющуюся решением следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{(A)}(t, s)}{\partial t} = A_t, & \Phi_{(A)}(t, t) = 1 \\ \frac{\partial \Phi_{(A)}(t, s)}{\partial s} = -A_s, & \Phi_{(A)}(s, s) = 1 \end{cases} \quad t, s \geq 0. \quad \blacksquare \quad (12)$$

*Определение 3.* Скажем, что функция  $\Phi_{(A)}(t, s)$  допускает экспоненциальную оценку, если существуют константы  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ , такие что справедлива оценка

$$|\Phi_{(A)}(t, s)| \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-s)} \quad s \leq t. \quad \blacksquare \quad (13)$$

Хорошо известно [4], что управление, являющееся решением задачи минимизации среднего значения функционала (11) для процесса (10), линейно зависит от функции  $\Pi_t^T$ , которая удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t^T + 2G_t \Pi_t^T - \frac{\lambda^2 (\Pi_t^T)^2}{r} + q = 0 \quad (14)$$

с граничным условием  $\Pi_T^T = 0$ .

Выясним, существует ли неотрицательная, ограниченная предельная функция  $\Pi_t := \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_t^T, t \geq 0$ . Известно [5], что для этого достаточно, чтобы функция  $\Phi_{(G)}(t, s)$  допускала экспоненциальную оценку вида (13). Нетрудно проверить, что решением уравнения (12) при  $A = G$  является функция  $\Phi_{(G)}(t, s) = e^{-\lambda a(t-s)} \sqrt{f_t/f_s}$ . Из свойства невозрастания функции  $f$  получаем, что  $f_t \leq f_s$  для  $s \leq t$  и (13) выполняется с  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = \lambda a$ . Таким образом, указанная функция  $\Pi_t$  существует. Факт ограниченности  $\Pi_t$  означает, что существует число  $\Pi > 0$ , такое что  $\Pi_t \leq \Pi$  для любого  $t \geq 0$ .

### 3. ЗАДАЧА НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

#### 3.1 Решение задачи

Теперь мы можем рассмотреть управление вида

$$U_t^* = -\frac{\lambda \Pi_t}{r} X_t^*, \quad (15)$$

где процесс  $\{X_t^*\}_{t=0}^\infty$  задается уравнением

$$dX_t^* = (G_t - \frac{\lambda^2 \Pi_t}{r}) X_t^* dt + \sigma \sqrt{f_t} dW_t \quad X_0^* = x. \quad (16)$$



Пусть  $G_t^* := G_t - \frac{\lambda^2 \Pi_t}{r}$ . Очевидно, что  $\Phi_{(G^*)}(t, s) = \Phi_{(G)}(t, s) e^{-\int_s^t \frac{\lambda^2 \Pi_x}{r} dx}$  и при этом  $\Phi_{(G^*)}(t, s) \leq \Phi_{(G)}(t, s)$ . Следовательно, для  $\Phi_{(G^*)}(t, s)$  выполняется (13). Кроме того [5], при заданных  $b, b_1, q, r > 0$  существует константа  $c_0 > 0$ , такая что для любой пары  $(x_t, v_t)_{t \leq T}$ , удовлетворяющей системе

$$dx_t = G_t x_t dt + \lambda v_t dt, \quad t \in [0, T] \quad x_0 = 0 \quad (17)$$

справедлива оценка

$$bx_T^2 + b_1 \int_0^T x_t^2 dt \leq c_0 \int_0^T (qx_t^2 + rv_t^2) dt. \quad (18)$$

Покажем, что управление  $u_t^* = \frac{U_t^*}{\sqrt{f_t}} + \hat{u}$  является решением (8). Пусть  $u \in \mathcal{U}$  - произвольное допустимое управление. Будем рассматривать управляемую систему (10)-(11). Обозначим

$$x_t := X_t - X_t^*, \quad v_t := U_t - U_t^*. \quad (19)$$

Отметим, что динамика  $(x_t, v_t)_{t \leq T}$  определяется (17). Из (14)-(17) получаем соотношение  $d(\Pi_t x_t X_t^*) = -(qX_t^* x_t + rU_t^* u_t) + \sigma \Pi_t \sqrt{f_t} x_t dW_t$ , тогда разность функционалов можно представить в виде

$$\begin{aligned} J_T(U^*) - J_T(U) &= \int_0^T (-qx_t^2 - ru_t^2) dt - \int_0^T (2qX_t^* x_t + 2rU_t^* u_t) dt = \\ &= \int_0^T (-qx_t^2 - ru_t^2) dt + 2\Pi_T X_T^* x_T - 2\sigma \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} x_t dW_t. \end{aligned}$$

Применив оценку (18), получим

$$J_T(U^*) - J_T(U) \leq \frac{c_0}{b} \Pi_T^2 (X_T^*)^2 - \frac{b_1}{c_0} \int_0^T x_t^2 dt - 2\sigma \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} x_t dW_t. \quad (20)$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей (20), учтем свойства функции  $\Pi_t$  и построим оценку

$$EJ_T(U^*) \leq EJ_T(U) + \frac{c_0}{b} \Pi_T^2 E(X_T^*)^2 \leq EJ_T(U) + \frac{c_0}{b} \Pi^2 E(X_T^*)^2. \quad (21)$$

По формуле Ито находим, что процесс  $\{(X_t^*)^2\}_{t=0}^\infty$  удовлетворяет уравнению

$$d(X_t^*)^2 = (2G_t^*(X_t^*)^2 + \sigma^2 f_t) dt + 2\sigma X_t^* \sqrt{f_t} dW_t, \quad (X_0^*)^2 = x^2. \quad (22)$$

Из (22) получаем выражение для математического ожидания процесса

$$E(X_T^*)^2 = \Phi_{(G^*)}^2(T, 0) E x^2 + \sigma^2 \int_0^T \Phi_{(G^*)}^2(T, s) f_s ds. \quad (23)$$

Воспользовавшись (13), окончательно имеем

$$E(X_T^*)^2 \leq \kappa_1^2 e^{-2\kappa_2 T} E x^2 + \sigma^2 \kappa_1^2 \int_0^T e^{-2\kappa_2(T-s)} f_s ds. \quad (24)$$

Откуда (в силу правила Лопиталья) следует

$$N(T) E(X_T^*)^2 \rightarrow 0 \quad T \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где  $N(T)$  - осредняющий множитель (см. (8)).

Используя это, осредним обе части (21) и тогда получим

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) E J_T(U^*) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) E J_T(U). \quad (26)$$

Теперь найдем выражение для левой части (26). Для этого запишем представление

$$d(\Pi_t (X_t^*)^2) = -(q(X_t^*)^2 + r(U_t^*)^2) dt + \sigma^2 \Pi_t f_t dt + 2\sigma \Pi_t \sqrt{f_t} X_t^* dW_t,$$

затем выразим

$$J_T(U^*) = -\Pi_T (X_T^*)^2 + \Pi_0 x^2 + \sigma^2 \int_0^T \Pi_t f_t dt + 2\sigma \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} dW_t. \quad (27)$$

В силу (25) и ограниченности функции  $\Pi_t$  имеем  $\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) E J_T(u^*) =$

$$= N(\infty) \Pi_0 E x^2 + \sigma^2 \limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) \int_0^T \Pi_t f_t dt \leq \Pi (N(\infty) E x^2 + \sigma^2 \Pi). \quad (28)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение

**Теорема 1.** Управление, оптимальное в среднем на бесконечном интервале времени в задаче (5)-(6),(8), имеет вид

$$u_t^* = -\frac{\lambda \Pi_t}{r} (p_t^* - \hat{p}) + a \hat{p}, \quad (29)$$

где  $\Pi_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_t^T$  определяется из (14), процесс  $\{p_t^*\}_{t=0}^\infty$  является решением уравнения

$$dp_t^* = -\lambda \left( a + \frac{\lambda \Pi_t}{r} \right) (p_t^* - \hat{p}) dt + \sigma dW_t, \quad p_0^* = p_0. \quad (30)$$

При этом значение левой части (28) является конечным числом. ■

### 3.2. Вероятностные свойства оптимального в среднем управления

Известно [5], что более сильным (в вероятностном смысле) видом оптимальности является так называемая  $g$ -оптимальность почти наверное.

*Определение 4.* Пусть  $g_T$  - положительная невозрастающая функция. Управление  $u^* \in \mathcal{U}$  называется  $g$ -оптимальным почти наверное, если  $\limsup_{T \rightarrow \infty} g_T (J_T(u^*) - J_T(u)) = 0$  с вероятностью единица при любом  $u \in \mathcal{U}$ . ■

Естественным образом возникает вопрос поиска функции  $g_T$ , при которой управление  $u^*$ , определенное в Теореме 1, будет  $g$ -оптимальным почти наверное. В [5] было показано, что при  $f_t \equiv 1$  указанная оптимальность имеет место для  $g_T = o\left(\frac{1}{\ln T}\right)$ . Для задачи с дисконтирующей функцией  $f_t$  ниже будет доказана следующая теорема

#### Теорема 2.

1. Если  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_T \ln T = c < \infty$ , то  $g_T = o(1)$ .
2. Если  $f_T \ln T \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$ , то  $g_T = o\left(\frac{1}{f_T \ln T}\right)$ .

*Доказательство.* Снова будем рассматривать систему (10)-(11) при замене переменных (9). Вернемся к представлению (20). Учитывая ограни-

ченность функции  $\Pi_t \sqrt{f_t}$ , имеет место оценка

$$-\frac{b_1}{c_0} \int_0^T x_t^2 dt - 2\sigma \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} x_t dW_t \leq R_T, \quad (31)$$

где  $R_T := -c_1 \int_0^T \sigma^2 \Pi_t^2 f_t x_t^2 dt - 2\sigma \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} x_t dW_t$  с некоторой положительной константой  $c_1$ , то есть теперь (20) можно преобразовать к оценке вида

$$J_T(U^*) - J_T(U) \leq \frac{c_0}{b} \Pi^2(X_T^*)^2 + R_T. \quad (32)$$

В [5] было показано, что  $\limsup g_T R_T \leq 0$  для любой функции  $g_T = o(1)$ , поэтому нам осталось рассмотреть вероятностное поведение процесса  $\{(X_t^*)^2\}_{t=0}^\infty$ .

Заметим, что  $X_t^* = \sqrt{f_t} Y_t^*$ , где  $Y_t^* = p_t^* - \hat{p}$ , а процесс  $\{Y_t^*\}_{t=0}^\infty$  задается уравнением

$$dY_t^* = H_t Y_t^* dt + \sigma dW_t \quad Y_0^* = p_0 - \hat{p}, \quad (33)$$

где  $H_t := -\lambda(a + \frac{\lambda \Pi_t}{r})$ . При этом очевидно, что функция  $\Phi_{(H)}(t, s)$  допускает оценку вида (13). Для таких процессов в [5] было доказано, что  $\limsup_{T \rightarrow \infty} \{(Y_T^*)^2 / \ln T\} < C$ , то есть  $(Y_T^*)^2 \leq c_2 \ln T$  при больших  $T$  ( $c_2 > 0$  - константа). Поэтому

$$(X_T^*)^2 \leq c_2 f_T \ln T \quad \text{при } T > T_0(\omega). \quad (34)$$

Следовательно, если  $f_T \ln T \rightarrow 0$ , то с вероятностью единица имеет место сходимость  $(X_T^*)^2 \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$  и для  $g$ -оптимальности управления  $u^*$  выбираем  $g_T = o(1)$ . При  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_T \ln T = c$  для  $g$ -оптимальности снова можно взять функцию  $g_T = o(1)$ . В случае, когда  $f_T \ln T \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$  рассмотрим вместо  $(X_T^*)^2$  процесс  $g_T (X_T^*)^2$  с некоторой положительной невозрастающей функцией  $g_T$ . Из (34) легко видеть, что для  $g$ -оптимальности управления  $u^*$  достаточно положить  $g_T = o(\frac{1}{f_T \ln T})$  и Теорема 2 доказана. ■

Теперь попытаемся ответить на вопрос, в каких случаях управление  $u^*$ , оптимальное в среднем, будет решением задачи  $\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)J_T(u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}$  в смысле почти наверное. Для ситуации  $N(\infty) > 0$  о такого рода переходе говорить нельзя, так как в (32) верхний предел  $\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)R_T \rightarrow 0$ . Пусть теперь  $N(T) \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Тогда воспользуемся следующей леммой

**Лемма.** Если при  $T \rightarrow \infty$   $N(T) \rightarrow 0$ , то  $N(T)f_T \ln T \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Имеем

$$f_T \ln T = \int_{t_0}^T \frac{f_t}{t} dt + f_{t_0} \ln t_0 + \int_{t_0}^T f'_t \ln t dt \leq \int_{t_0}^T \frac{f_t}{t} dt + f_{t_0} \ln t_0 \quad t_0 > 1. \quad (35)$$

Умножая это неравенство на  $N(T)$ , получаем (с применением правила Лопиталя) утверждение леммы. ■

Применяя эту лемму к неравенству (34), находим, что с вероятностью единица  $N(T)(X_T^*)^2 \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Воспользовавшись этим фактом, перейдем в (32) к верхнему пределу и получим, что для любого  $U \in \mathcal{U}$  неравенство  $\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)J_T(U^*) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)J_T(U)$  выполняется с вероятностью единица.

Далее, вернемся к представлению (27). Можно показать, что  $\lim_{T \rightarrow \infty} N(T) \int_0^T \Pi_t \sqrt{f_t} dW_t = 0$ , поэтому осредним (27), перейдем к верхнему пределу этого выражения и получим соотношение

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)J_T(u^*) = \sigma^2 \limsup_{T \rightarrow \infty} N(T) \int_0^T \Pi_t f_t dt \leq \sigma^2 \Pi \quad (36)$$

Зафиксируем полученные результаты в виде утверждения.

**Теорема 3.** Если  $N(T) \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ , то управление  $u^*$ , задаваемое (29), является решением задачи  $\limsup_{T \rightarrow \infty} N(T)J_T(u) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}$  с вероятностью

единица. При этом значение функционала ограничено величиной  $\sigma^2\Pi$ . ■

Наконец, рассмотрим вопрос о том, будет ли выполнена задача асимптотического достижения состояния  $\hat{p}$  при применении управления  $u^*$ . Для этого выпишем решение уравнения (33)

$$Y_t^* = \Phi_{(H)}(t, 0)Y_0^* + \sigma \int_0^t \Phi_{(H)}(t, s)dW_s. \quad (37)$$

Из (37) легко видеть, что в детерминированном случае ( $\sigma = 0$ ) существование оценки вида (13) для функции  $\Phi_{(H)}(t, s)$  обеспечит сходимость  $Y_t^* \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , то есть  $p_t^* \rightarrow \hat{p}$  при  $t \rightarrow \infty$ . В более общей ситуации наличия случайных возмущений ( $\sigma \neq 0$ ) можно проанализировать разные виды сходимостей.

Сначала рассмотрим *сходимость в среднем квадратическом*, то есть проверим, будет ли равен нулю предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(Y_t^*)^2$ . Воспользуемся ранее полученным выражением (23) для  $E(X_t^*)^2$  и найдем

$$E(Y_t^*)^2 = \Phi_{(H)}^2(t, 0)E(Y_0^*)^2 + \sigma^2 \int_0^t \Phi_{(H)}^2(t, s) ds.$$

Затем, учитывая, что  $\Phi_{(H)}^2(0, t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ , применим правило Лопиталя для нахождения предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi_{(H)}^2(t, s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi_{(H)}^2(0, s) ds / \Phi_{(H)}^2(0, t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(a + \lambda\Pi_t/r)} \neq 0,$$

таким образом

$$E(Y_t^*)^2 \nrightarrow 0 \quad (38)$$

и нет сходимости в среднем квадратическом.

Далее, проверим, будет ли иметь место *сходимость по вероятности*, то есть выполняться соотношение  $P(|Y_t^*| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  при произвольном  $\epsilon > 0$ . Используя (38) и неравенство Чебышева

$$P(|Y_t^*| \geq \epsilon) \leq \frac{E(Y_t^*)^2}{\epsilon^2} \nrightarrow 0. \quad (39)$$

Это свидетельствует об отсутствии сходимости по вероятности. При этом очевидно, что  $EY_t^* \rightarrow 0$  и  $Er_t^* \rightarrow \hat{p}$ , когда  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, имеет место лишь стремление *среднего значения* оптимальной ценовой траектории  $Er_t^*$  к равновесной цене  $\hat{p}$ .

#### 4. ПРЕДМЕТ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В работе была рассмотрена задача управления ценой в экономике при наличии случайных факторов и временных предпочтений агентов при учете ими потерь, возникающих из-за отклонения ценовой траектории от равновесного значения, являющегося для них желаемым. При этом равновесное значение определялось как стационарное состояние аналогичной детерминированной модели эволюции цены при фиксированных управляющих воздействиях. В качестве направления дальнейшего анализа рассмотренной в работе модели предполагается исследование ситуации, когда вместо "равновесной цены" вводится понятие "эталонной траектории" как случайного процесса, определяемого экономическими субъектами, исходя из различных соображений. Отдельный интерес вызывает случай быстро убывающей дисконтирующей функции ( $N(\infty) > 0$ ), в рамках которого возникает вопрос изучения дополнительных характеристик управления, оптимального в среднем на бесконечном интервале, например, "оптимальности по распределению".

### Список литературы

- [1] Halanay A., Samuel J. Differential equations, discrete systems, and control: Economic models. Springer, 1997, 380 p.
- [2] Handbook of contemporary behavioral economics: foundations and developments. Edited by Morris Altman. ed. M.E. Sharpe, 2006, 768 p.
- [3] Leizarowitz A. Controlled Diffusion Processes on Infinite Horizon with the Overtaking Criterion. Applied Mathematics Optimization, 17, 1988
- [4] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. : Наука, 1977, 650 с.

- [5] Белкина Т. А., Кабанов Ю. М, Пресман Э. Л. О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. - Теория вероятностей и ее применения. 2003,
- [6] Chen X., Simchi-Levi D. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Finite Horizon Case. *Operations Research*, Vol. 52, 2004
- [7] Karp L. Global warming and hyperbolic discounting. *Journal of Public Economics*. Vol. 89, 2005
- [8] Sengupta J. K. Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function. *The Review of Economic Studies*, Vol. 37, No. 1, 1970
- [9] Ainslie G. Derivation of 'Rational' Economic Behavior from Hyperbolic Discount Curves. *American Economic Review*, Vol. 81, 1991
- [10] Cline W. R. Discounting for the Very Long Term. в кн. *Discounting and Intergenerational Equity*, edited by P. R. Portney and J. P. Weyant. Resources for the Future, Washington, DC, 1999, 202 p.



**О дальнейших путях развития  
математических методов оптимизации дозовых полей  
для внутритканевой лучевой терапии**

Статья продолжает наши разработки методов оптимизации дозовых полей для внутритканевой лучевой терапии злокачественных опухолей. В работах [1,2] рассмотрена и решена задача построения дозовых полей (создаваемых в облучаемой области  $G$  заданным конечным числом точечных источников излучения), оптимальных по минимаксному критерию Чебышева – максимизировался минимальный локальный уровень облучения. Полученное чебышевское поле действия обладает серьезным недостатком – оно оптимально **внутри** области  $G$  и достаточно для подавления пораженных участков ткани, но при этом имеет нежелательные участки высоких доз ("языки") **вне** области облучения, что может приводить к возникновению трудноизлечимых лучевых некрозов в нормальных органах и тканях, окружающих очаг опухолевого заболевания.

Ясно, что устранить указанный недостаток (т.е. сгладить граничную неоднородность чебышевского поля) можно (если это вообще возможно !) только ценой понижения достигнутого уровня облучения, несколько углубив размещенные источники внутрь области  $G$ .

В работе [3] был рассмотрен вопрос о возможности такой коррекции; рассматривались плоские области кругового и эллиптического типа с различным числом источников. Был сделан вывод о том, что неоднородность граничного чебышевского поля может быть снижена только для достаточно овальных областей; **для вытянутых областей это принципиально невозможно**. Это заключение справедливо и для (объемных) трехмерных областей.

Для овальных областей снижение неоднородности возможно, но это уже не задача оптимизации, а поиск компромисса, устраивающего лучевого терапевта, между максимизируемым уровнем облучения и минимизируемой неоднородностью получаемого при этом граничного поля.

В [3] эта задача полностью решена для круговой области с количеством источников от трех до шести: составлены соответствующие таблицы, которыми лечащий врач может руководствоваться. Для эллиптических областей найден "пороговый" (критический) показатель овальности, ниже которого область приходится считать "вытянутой", и, соответственно, снижение неоднородности невозможно; этот показатель задается отношением осей эллипса  $\hat{\varepsilon} = 0.571$ . Для  $\varepsilon > \hat{\varepsilon}$  снижение возможно, но провести аналитический расчет компромиссного решения не удастся. **Задача может быть решена только с помощью соответствующих программных комплексов, работающих в интерактивном режиме;** то же относится, разумеется, и к овальным областям произвольной формы.

Итак, мы приходим к необходимости **совершенствования имеющихся и разработки новых программных комплексов как средства компьютерной поддержки в работе врача для эффективного планирования лучевой терапии злокачественных опухолей.** Данная публикация посвящена обсуждению состояния дел по этой проблеме и возможных путей ее решения.

## 1. ПОЛОЖЕНИЕ ДЕЛ ПО ОБСУЖДАЕМОЙ ПРОБЛЕМЕ

В настоящее время наиболее распространенной схемой планирования внутритканевой лучевой терапии является т.н. "Парижская система", см. [4-6]. Опыт ее практического применения показал, что она существенно облегчает труд оператора при формировании допустимого терапевтического дозового поля, избавляя его от грубых ошибок в размещении источников.

1.1. *Парижская система.* В Парижской системе используются **линейные** источники излучения. Линейный источник может быть с повышенной активностью на одном конце ("булава") или на обоих концах ("гантель"), а также структурированный источник штырькового типа ("интрастат"), образуемый как результат перемещения высокодозного точечного микроисточника (с одинаковой или разной длительностью экспозиции) вдоль оси интрастата.

При размещении линейных источников выбирается *центральное сечение* объема мишени, и источники центрируются относительно этого сече-

ния, располагаясь параллельно друг другу перпендикулярно плоскости сечения. Точки, через которые проходят источники в плоскости центрального сечения, являются узлами сетки, образованной из **правильных треугольников или четырехугольников** (квадратов).

Парижская система не дает никаких рекомендаций относительно выбора типа линейных источников и ориентации центрального сечения. Этот важный этап планирования приходится решать самому оператору; в случае интрастата шаг сетки (0.8 – 1.5 см) следует подбирать в зависимости от длины его активной зоны, которая (при равномерном распределении радионуклида) должна быть на 30-40% больше глубины терапевтического объема.

Выбор количества источников и **особенности их размещения в приграничной зоне** мишени – эти вопросы также решаются оператором вручную, методом проб и ошибок; в результате при Парижском способе размещения источников в подавляющем большинстве случаев формируемое дозовое поле выходит за границы опухоли и может привести к значительным лучевым нагрузкам на нормальные органы и ткани.

Пример 1. На Рис. 1 представлено терапевтическое дозовое поле в центральном сечении опухоли, имеющей невыпуклую форму с полостью. Дозовое поле было сформировано по Парижской системе с треугольной сетью источников в начальном количестве 18 источников. **Уровень терапевтического поля в целом определяется по минимальному локальному уровню дозы в опухолевом очаге.**

Задача размещения источников в приграничной области решалась методом проб и ошибок. Если при удалении некоторого источника уровень дозового поля снижался незначительно, то этот источник считался избыточным и исключался. Таким способом были исключены три избыточных источника, и осталось 15.

Изолиния на Рис. 1, соответствующая минимальному уровню итогового дозового поля, выделена жирной линией. Однородность дозового поля определяется тем, насколько эта изолиния близка к контуру сечения опухоли. Ниже будет показано, что распределение источников, полученное в результате решения специальной экстремальной задачи, дает более однородное дозовое поле, чем на Рис. 1.

1.2. *Авторские разработки.* В работах [7,8] нами была сформулирована математическая задача оптимизации дозового поля в опухоли. Было показано, что критерием оптимальности дозового поля может служить максимизация минимального уровня дозового поля; такой критерий называется *чебышевским*.

В упомянутых выше работах [1-3] использовалась именно эта чебышевская постановка оптимизационной задачи и было проведено, насколько это возможно, ее аналитическое исследование в случае выпуклых областей простейшей формы. В [9] описан был программный комплекс "АГАТ-ВТ", основанный на эвристическом алгоритме решения поставленной задачи в общем случае.

Пример 2. Для сравнения с Парижской системой, с помощью комплекса "АГАТ-ВТ" было получено оптимальное распределение чебышевского поля пяти источников в той же опухолевой области, которая рассмотрена в Примере 1. Это поле показано на Рис. 2; жирной линией выделена изолиния, соответствующая минимальному значению дозы в опухоли. Можно считать, что она идеально охватывает контур опухоли и повторяет изгиб полости. Сравнение с Рис. 1 показывает, что при том же уровне облучения площадь нормальных тканей, охватываемая минимальной изолинией, намного меньше, чем при Парижской системе.

## 2. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ НАМЕЧАЕМОГО ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ

Опыт применения описанных в Разделе 1 схем планирования позволяет наметить пути дальнейшего развития и совершенствования методов математического моделирования и разработки компьютерных программных комплексов для лучевой терапии. Охарактеризуем здесь вкратце принципиальные основы этого пути.

2.1. *Оптимизация по Чебышеву как ядро программного комплекса.* Вне всякого сомнения, чебышевский критерий при постановке **оптимизационной** задачи является наилучшим; получаемое при этом решение дает максимально возможный уровень облучения. Это означает, что ядром программного комплекса должна стать **программа решения чебышевской**

**задачи для очага поражения произвольной формы.** В настоящее время нами ведется разработка такой программы.

2.2. *Возможность сведения объемной (трехмерной) задачи к плоскому случаю.* Опыт подтверждает, что линейные источники облучения могут быть заменены в математических моделях точечными источниками в центральном сечении, как это было описано выше в Парижской системе (п. 1.1). Это обстоятельство существенным образом упрощает задачу математического моделирования.

2.3. *Разработка алгоритма сглаживания граничной неоднородности.* Чебышевское поле, как отмечалось, требует корректировки для устранения "языков" высокой дозы облучения, выступающих вовне очага поражения и вторгающихся в область нормальных тканей. Математически, задача состоит в сглаживании неоднородности граничного поля, измеряемой как отношение его максимума к минимуму. Как указывалось во вводной части статьи, такое снижение возможно лишь для достаточно округлых (невытянутых) областей. В таких областях корректировка касается, прежде всего, источников, располагающихся в приграничной полосе опухолевой ткани, и требует их заглубления внутрь области поражения. Эвристическая идея построения соответствующего алгоритма состоит в том, что приграничные источники, порождающие "языки", должны быть заглублены **ГОМОТЕТИЧНО** в некотором смысле.

В заключение еще раз подчеркнем, что поскольку всякая корректировка чебышевского поля приводит к неизбежному снижению уровня облучения, окончательное решение не может быть формализовано, и должно приниматься врачом-терапевтом как **компромисс между максимизируемым уровнем облучения и минимизируемой граничной неоднородностью.**

## Литература

1. Клеппер Л.Я. Оптимизация поля действия конечного числа источников в непрерывной среде. // *Экономика и мат. методы*, 2009, вып. 2.
2. Беленький В.З., Клеппер Л.Я. Собственные геометрические конфигурации оптимального по Чебышеву размещения точечных источников. // Сб. "Анализ и моделирование экономических процессов", вып. 5. М.: ЦЭМИ РАН, 2008.
3. Беленький В.З., Клеппер Л.Я. О сглаживании неоднородности оптимального по Чебышеву поля обслуживания. // Сб. "Анализ и моделирование экономических процессов", вып. 6. М.: ЦЭМИ РАН, 2009.
4. Pierquin B., Dutreix A., Paine C.H. e.a. The Paris system in interstitial radiation therapy. // *Acta Radiol. Oncol.*, 1978, v. 17, № 1, pp. 33 – 41.
5. Клеппер Л.Я. Формирование дозовых полей радиоактивными препаратами и аппликаторами. М.: Энергоатомиздат, 1983.
6. Контактная лучевая терапия. Учебное и методическое пособие. М.: Медицина, 2002.
7. Клеппер Л.Я. Образование оптимального дозного поля на отрезке с помощью двух составных источников излучения. // *Мед. радиология*, 1980, №8, с. 53-58.
8. Клеппер Л.Я. Формирование дозовых полей радиоактивными препаратами и аппликаторами. М.: Энергоатомиздат, 1983.
9. Клеппер Л.Я. , Ушкова В.Л., Рыбина Т.В. Оптимизация планов облучения в контактных методах лучевой терапии злокачественных опухолей с помощью радиационного комплекса "АГАТ-ВТ". // *Медицинская физика*, 2002, № 4, с. 27-40.

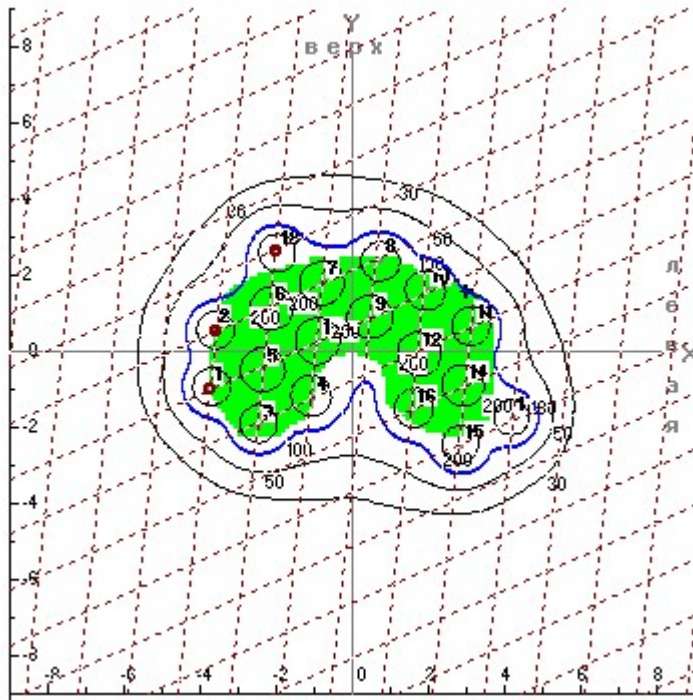


Рис. 1. Размещение 15 источников по Парижской Системе в опухоли, имеющей невыпуклую форму с полостью. Три источника из первоначальных 18 удалены. Изолиния минимальной дозы в опухоли (принятой за 100%) выделена жирно; она имеет три точки касания с границей опухоли.

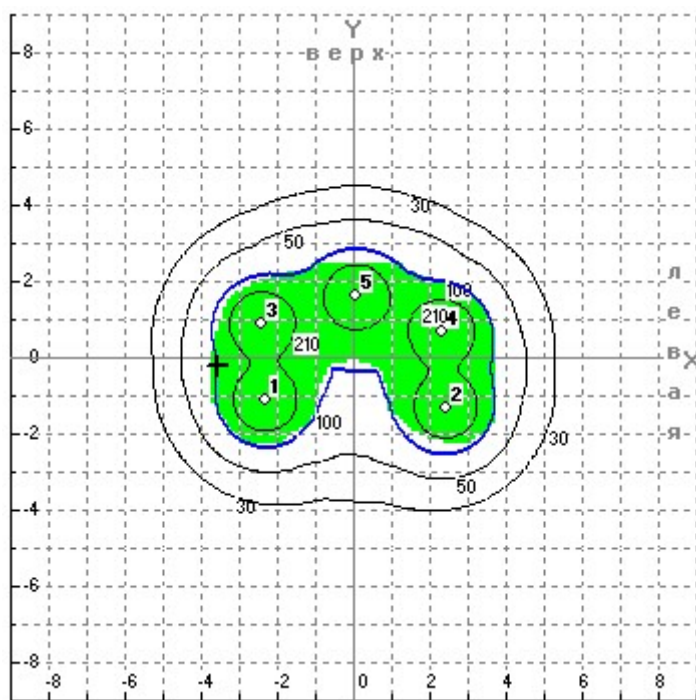


Рис. 2. Оптимальное размещение 5 источников в той же опухоли, полученное с помощью комплекса «АГАТ-ВТ». Минимальная изолиния идеально охватывает контур опухоли, имея с ее границей общие участки.



**Некоторые замечания и дополнения  
к теории однородных случайных процессов  
с независимыми приращениями**

В теории вероятностей выделен важный класс марковских стохастических процессов (на вещественной прямой  $R$ , в непрерывном времени) – однородные (во времени) процессы с независимыми приращениями. Всякий такой процесс порождается некоторой безгранично делимой функцией распределения  $Q$ . Если распределение  $Q$  имеет конечную дисперсию (в статье мы будем иметь дело с таким случаем), то в описании процессов основополагающую роль играет теорема Колмогорова, дающая их полную характеристику: всякий такой процесс представим как сумма (более точно – интеграл) пуассоновских потоков различной интенсивности плюс винеровский процесс (*каноническое представление* логарифма характеристической функции распределения  $Q$  [1, §§45,56]); при этом единственным процессом с непрерывными траекториями является винеровский процесс (в широком смысле – с линейным сносом и постоянной дисперсией), описывающий броуновское движение.

Если в каноническом представлении процесса количество пуассоновских потоков конечно или счетно (т.е. представление действительно является суммой), такой процесс назовем *регулярным*; в противном случае – *сингулярным*. Для задач, возникающих в различных областях естествознания, типичными являются регулярные процессы, и они хорошо изучены. Сингулярные процессы теоретически описаны, но примеров реальных (**физических**) процессов автор в литературе не нашел.

Как дополнение к теории, в данной статье выделен класс **однородных** процессов с независимыми **неотрицательными** приращениями; такие процессы, монотонно возрастающие во времени, названы *процессами роста*<sup>1</sup>. В каноническом представлении процесса роста винеровская компонента отсутствует (поскольку процесс броуновского движения немонотонен), и траектории процесса разрывны, скачкообразны.

---

<sup>1</sup>Процессы роста отличаются от т.н. *возрастающих* процессов условием однородности.

У регулярного процесса скачки изолированы (дискретны), у *чисто* сингулярного процесса (без дискретных скачков) они образуют непрерывный спектр.

В статье предложен пример чисто сингулярного процесса роста. Пример построен как обобщение (на непрерывное пространство состояний) времени ожидания для ординарного пуассоновского потока (множество состояний которого дискретно) и назван *инверсным пуассоновским процессом*; свойства этого процесса частично проанализированы. Повторная инверсия приводит к понятию квазипуассоновского потока с непрерывным множеством состояний ("квазижидкость").

## 1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РОСТА

Однородный стохастический процесс на вещественной прямой с неотрицательными независимыми приращениями (процесс роста)  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  описывается функцией распределения приращений

$$\Phi_t(y) := P[\xi_{\tau+t} < x + y | \xi_\tau = x] \quad t \geq 0, y > 0 \quad (1)$$

(правая часть не зависит от  $\tau$  и  $x$ ); при  $y \leq 0$   $\Phi_t(y) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ . Переменная  $t$  интерпретируется как время, значение  $\xi_t$  – как состояние системы.

**Лемма 1.** Для того, чтобы некоторое семейство функций распределения  $\{\Phi_t\}$ , сосредоточенных на положительной полуоси вещественной прямой, определяло процесс роста, необходимо и **достаточно**, чтобы для него выполнялось полугрупповое свойство относительно *операции свертки* [2, §6.4]

$$\Phi_t * \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad (2)$$

где

$$[\Phi_t * \Phi_s](y) := \int_{u=0}^y \Phi_t(y-u) d\Phi_s(u) \quad \forall t, s, y > 0 \quad ; \quad (3)$$

соотношение (2) называется *уравнением Маркова*.

*Доказательство.* . Выполнение уравнения Маркова – необходимое и достаточное условие всякого марковского процесса, [1, §53]. По построению процесс, определяемый семейством функций  $\Phi_t$  – это однородный

процесс с независимыми приращениями. Его монотонность следует из того, что носителем семейства является положительная полуось. ♠

*Замечание 1.* В силу монотонности процесса роста, из (1) следует, что функция распределения  $\Phi_t$  должна убывать по  $t$ . Это свойство вытекает из соотношения свертки (2): согласно (3), имеем

$$\Phi_{t+s}(y) \leq \int_{u=0}^y \Phi_t(y) d\Phi_s(u) = \Phi_t(y) \int_{u=0}^y d\Phi_s(u) \leq \Phi_t(y) \quad y > 0 \quad ,$$

т.е.  $\Phi_{t+s} \leq \Phi_t \quad \forall s > 0$ . ♠

Мы будем иметь дело с процессами роста трех типов, когда шкала времени  $\mathcal{T}$  и/или пространство состояний  $X$  могут быть непрерывными (неотрицательная полуось  $R_+$ ) или дискретными (множество целых неотрицательных чисел  $\mathbf{N} := \{0, 1, \dots\}$ ), причем, если пространство состояний непрерывно, предполагается существование плотности вероятности  $\varphi_t(y) := \frac{\partial}{\partial y} \Phi_t(y)$ .

1.1. *Тип 1 – дискретный процесс в непрерывном времени.* Если с.в.  $\xi_t$  принимает только целочисленные значения ( $X = \mathbf{N}$ ), то процесс роста в непрерывном времени задается, вместо (1), вероятностями

$$p_t(k) := P[\xi_t = k] \quad k \in \mathbf{N}, t \geq 0 \quad ,$$

которые должны удовлетворять необходимым условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{j=0}^{\infty} p_t(j) &= 1 \quad \forall t \geq 0 \\ \text{б) } p_t(k) &= \sum_{j=0}^k p_s(j) p_{t-s}(k-j) \quad \forall (k \in \mathbf{N}, s \in (0, t)) \end{aligned} \quad ; \quad (4.1)$$

а) – условие нормировки, б) – уравнение Маркова.

1.2. *Тип 2 – процесс в дискретном времени с непрерывным пространством состояний.* Процесс в дискретном времени ( $\mathcal{T} = \mathbf{N}$ ) принято называть *цепью*. Цепь роста с непрерывным пространством состояний описывается семейством плотностей  $\{\varphi_k(y), k \in \mathbf{N}, y \in R_+\}$ , и необходимые

условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \int_{y=0}^{\infty} \varphi_k(y) dy = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N} \\
 & \text{б) } \varphi_k(y) = \int_{z=0}^y \varphi_i(z) \varphi_{k-i}(y-z) dz \quad \forall (y > 0, i \in [0, k])
 \end{aligned} \quad . \quad (4.2)$$

1.3. *Тип 3 – процесс в непрерывном времени с непрерывным пространством состояний.* Такой процесс описывается семейством плотностей вероятности  $\{\varphi_t(y), t \geq 0, y \geq 0\}$ , и необходимые условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \int_{y=0}^{\infty} \varphi_t(y) dy = 1 \quad \forall t \geq 0 \\
 & \text{б) } \varphi_t(y) = \int_{z=0}^y \varphi_s(z) \varphi_{t-s}(y-z) dz \quad \forall (y > 0, s \in (0, t))
 \end{aligned} \quad . \quad (4.3)$$

## 2. ИНВЕРСНЫЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

2.1. *Пуассоновский поток событий.* Простейшим процессом роста первого типа ( $\mathcal{T} = R_+, X = \mathbf{N}$ ) является пуассоновский поток событий.

События потока имеют различную интерпретацию: в физике обычно – это появление очередной частицы, регистрируемой детектором (например, счетчиком Гейгера); в теории массового обслуживания – это поступление очередного требования (заявки). Мы будем придерживаться физической интерпретации и обозначим через  $\nu_t$  случайную величину, равную количеству частиц, зарегистрированных детектором за промежуток времени  $[0, t]$ . Вероятности пуассоновского потока даются формулами

$$p_t(k) := P[\nu(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k \in \mathbf{N}, t \geq 0 \quad ; \quad (5)$$

здесь параметр  $\lambda > 0$  [1/сек] (считаем, что время измеряется секундах) представляет собой *интенсивность потока*. Дополнительно полагаем формально  $0^0 = 0! = 1$ , так что  $p_0(0) = 1$ .

Необходимые условия (4.1), как нетрудно проверить, выполняются.

*Замечание 2.* Обосновывая в своем учебнике пуассоновский процесс, Б.В.Гнеденко принимает предположение [1, стр. 299], которое мы выделим специально:

$$\begin{aligned} &\text{за конечный промежуток времени} \\ &\text{не может происходить бесконечно много событий.} \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (6), интенсивность потока  $\lambda$  является конечной величиной. ♠

*2.2. Неудачная попытка перехода от дискретного множества состояний к непрерывному.* Конкретизируем физическую интерпретацию следующим образом. Представим себе, что приходящие частицы имеют форму круглого диска (подобного хоккейной шайбе) некоторого фиксированного диаметра и толщины  $h$  [см], а регистрирующий их детектор – это высокий круговой цилиндр ("стакан") того же (чуть большего) диаметра; частицы попадают в этот цилиндр, ложась друг на друга в порядке поступления и образуя вертикальный столб. Если количество частиц равно  $k$ , то высота столба в стакане равна  $H = kh$  [см].

Мы можем переформулировать пуассоновский поток в безразмерных переменных. Пусть  $\theta := \lambda t$  – безразмерное время,  $k$  – безразмерная высота детекторного столба (принимаяющая дискретные значения  $k \in \mathbf{N}$ ); паре  $(\theta, \nu)$  в безразмерной модели соответствуют фактическое время  $t = \theta/\lambda$  [сек] и показание детектора  $H = \nu h$  [см], где  $(\lambda, h)$  – константы физической модели.

Вероятности (5) пуассоновского потока запишем в безразмерной модели в виде

$$p_\theta(k) := P[\nu_\theta = k] = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{\Gamma(k+1)} \quad k \in \mathbf{N}, \theta \geq 0, \quad (7)$$

где

$$\Gamma(z) := \int_{s=0}^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds \quad z > 0 \quad (8)$$

– гамма-функция Эйлера (при  $k \in \mathbf{N}$   $\Gamma(k+1) = k!$ ).

Форма записи (7) прямо наводит на мысль обобщить понятие пуассоновского потока, перейдя от дискретного пространства состояний к непрерывному, когда с.в.  $\nu_\theta$  – высота детекторного столба – может принимать не только дискретные значения  $k \in \mathbf{N}$ , но любые вещественные

значения  $\rho \geq 0$ . При этом надо заменить дискретные вероятности (7) на плотность вероятности (по  $d\rho$ )

$$\varphi_\theta(\rho) := N(\theta) \cdot \frac{\theta^\rho e^{-\theta}}{\Gamma(\rho + 1)} \quad \rho \geq 0, \theta \geq 0, \quad (9)$$

где

$$N(\theta) := \left[ \int_{z=0}^{\infty} \frac{\theta^z e^{-\theta}}{\Gamma(z + 1)} dz \right]^{-1}$$

– нормирующий множитель, обеспечивающий условие нормировки (4.3,а) (в дискретной модели этот множитель равен единице).

Будет ли семейство с.в.  $\{\nu_\theta\}$ , заданное плотностями (9), образовывать процесс роста, т.е. будет ли выполняться уравнение Маркова (4.3,б); ответ отрицателен. В самом деле, при каждом фиксированном  $\theta$  плотность (9) ограничена в окрестности нуля (и даже на всей полуоси  $\rho \geq 0$ ), поэтому, если бы уравнение (4.3,б) выполнялось, должно быть  $\varphi_\theta(0) = 0$ , в то время как в (9)  $\varphi_\theta(0) = N(\theta)e^{-\theta} > 0$ .

2.3. *Инверсное описание – марковская цепь времени ожидания*  $\{\mu_k, k \in \mathbf{N}\}$ . Монотонность пуассоновского потока, заданного вероятностями (7), позволяет дать его описание в инверсной форме с помощью семейства с.в.  $\{\mu_k, k \in \mathbf{N}\}$ , где  $\mu_k$  – случайное **время ожидания** прихода заданного количества частиц  $k$ .

Функция распределения  $\Psi_k$  случайной величины  $\mu_k$  находится из равенства событий  $\{\mu_k \leq \theta\} = \{\nu_\theta \geq k\}$   $k \in \mathbf{N}$ . Это дает

$$\begin{aligned} \Psi_k(\theta) &:= P[\mu_k < \theta] = 1 - P[\nu_\theta \leq k - 1] = \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P[\nu_\theta = j] = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_\theta(j) \quad \theta > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(при  $k = 0$  сумму справа считаем равной нулю); кроме того, полагаем  $\Psi_k(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ .

Плотности вероятности, отвечающие (10), вычисляются в явном виде; имеем

$$\pi_k(\theta) := \frac{d}{d\theta} \Psi_k(\theta) = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(j) =$$

$$= p_\theta(0) + \sum_{j=1}^{k-1} [p_\theta(j) - p_\theta(j-1)] = p_\theta(k-1) \quad k \geq 1 \quad ; \quad \theta \geq 0 \quad .$$

Таким образом,

$$\pi_k(\theta) = p_\theta(k-1) = \frac{\theta^{k-1} e^{-\theta}}{\Gamma(k)} \quad k \geq 1, \theta \geq 0 \quad . \quad (11)$$

Кроме того, необходимо дополнить (11) для  $k = 0$ :

$$\pi_0(\theta) = \delta(\theta) \quad (\delta - \text{функция}) \quad . \quad (12)$$

*Замечание 2.* Обратим внимание на сдвиг в равенстве (11) индекса  $k$  на единицу, а также на **инверсию** ролей переменных. Теперь  $k \in \mathbf{N}$  надо считать дискретным временем, а  $\theta \geq 0$  состоянием процесса. ♠

**Лемма 2.** Семейство плотностей  $\{\pi_k, k \in \mathbf{N}\}$ , определенное формулами (11),(12), задает процесс роста второго типа  $\{\mu_k\}$  (т.е. монотонно растущую марковскую цепь с независимыми приращениями).

*Доказательство.* Выполнение нормирующего условия (4.2,а)

$$\int_{s=0}^{\infty} \pi_k(s) ds = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

очевидно.

Уравнение Маркова (4.2,б) имеет вид

$$\pi_k(\theta) = \int_{s=0}^{\theta} \pi_i(s) \pi_{k-i}(\theta-s) ds \quad \theta > 0 \quad , \quad \forall i \in [0, k] \quad . \quad (13)$$

Для  $i = 0, k$  равенство (13) выполняется в силу (12). При  $k \geq 2$  для промежуточных значений  $i$  интеграл  $J$  в правой части (13) равен

$$\begin{aligned} J &= \int_{s=0}^{\theta} p_s(i-1) p_{\theta-s}(k-i-1) ds = \int_{s=0}^{\theta} \frac{s^{i-1} e^{-s}}{\Gamma(i)} \cdot \frac{(\theta-s)^{k-i-1} e^{-(\theta-s)}}{\Gamma(k-i)} ds = \\ &= \frac{\theta^{k-1} e^{-\theta}}{\Gamma(i) \Gamma(k-i)} \cdot \int_{z=0}^1 z^{i-1} (1-z)^{k-i-1} dz \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

Оставшийся интеграл есть бета-функция  $B(u, v)$  с параметрами  $u = i$ ,  $v = k - i$ , где

$$B(u, v) := \int_{\xi=0}^1 \xi^{u-1} (1 - \xi)^{v-1} d\xi = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \quad u, v > 0 \quad (15)$$

(см. [3, 853.21]). Поэтому

$$J = \frac{\theta^{k-1} e^{-\theta}}{\Gamma(k)} = p_{\theta}(k-1) = \pi_k(\theta) \quad ; \quad (16)$$

равенство (13) тоже выполнено. ♠

2.4. *Инверсный пуассоновский процесс.* В п. 2.2 была предпринята попытка обобщения дискретного пуассоновского процесса на процесс с непрерывным множеством состояний  $\nu_{\theta} = \rho$ ,  $\rho > 0$ . В этой попытке переход от дискретного к непрерывному происходил в пространстве состояний, и она оказалась неудачной. Попытаемся теперь обобщить марковскую цепь  $\{\mu_k\}$  с **дискретным** множеством аргументов  $k \in \mathbf{N}$  (играющих роль дискретного времени) на процесс с **непрерывным аргументом** ("временем")  $\{\mu_{\rho}, \rho \geq 0\}$ , где роль времени будет играть высота столба  $\rho$  в стакане детектора; пространством состояний в этом процессе будет, как и в цепи, временная полуось  $\theta \geq 0$ .

Для такого обобщения достаточно обратиться к формулам (11) и заменить в них дискретный параметр  $k$  на непрерывный  $\rho$ ; полагаем, в соответствии с (11),

$$\pi_{\rho}(\theta) := p_{\theta}(\rho - 1) = \frac{\theta^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} e^{-\theta} \quad \theta > 0, \rho > 0 \quad , \quad (17)$$

и при каждом фиксированном  $\rho$  интерпретируем функцию  $\pi_{\rho}(\cdot)$  как плотность вероятности **по  $d\theta$**  (значения  $\rho = 0$  и  $\theta = 0$  теперь необходимо отбросить). Такая интерпретация корректна, поскольку интеграл по  $\theta \in (0, \infty)$  функции (17) равен единице  $\forall \rho > 0$  (**в отличие от (9)!**). Тем самым определено семейство случайных величин  $\{\mu_{\rho}, \rho > 0\}$  с пространством состояний  $\theta > 0$  и плотностью вероятности (по  $d\theta$ )  $\pi_{\rho}(\cdot)$ .

**Теорема 1.** Семейство плотностей (17) задает процесс роста  $\{\mu_{\rho}\}$  третьего типа.



*Доказательство.* В силу Леммы 1, необходимо только проверить групповое свойство (2), т.е. уравнение Маркова (4.3,б); оно имеет форму (13) с заменой в нем  $k$  на  $\rho$ , причем промежуточный индекс  $i$  может принимать любое значение в открытом интервале  $(0, \rho)$ . Выкладки (14)-(16), доказывающие (13), полностью переносятся на непрерывную модель. Теорема доказана. ♠

Итак, поставленная цель достигнута: построен процесс роста  $\{\mu_\rho, \rho > 0\}$  **времени ожидания непрерывно возрастающей высоты  $\rho$  детекторного столба**, инверсный пуассоновскому потоку  $\{\nu_\theta, \theta > 0\}$  накопления частиц во времени  $\theta$ .

Процесс  $\{\mu_\rho\}$  назовем *инверсный пуассоновский процесс*.

*Примечания.*

1. Формула (11) получена в [2, §1.3] как плотность вероятности суммы  $k$  независимых с.в., каждая из которых есть время ожидания появления одной частицы с плотностью  $\pi_1(\theta) = p_\theta(0) = e^{-\theta}$ .

2. Распределение с плотностью (17) называется гамма-распределением (или распределением Эрланга). Групповое свойство эрланговского семейства отмечено [2, §2.2]. ♠

### 3. АНАЛИЗ ИНВЕРСНОГО ПРОЦЕССА

3.1. *Характеристическая функция (х.ф.).* Процесс роста  $\{\mu_\rho\}$ , будучи безгранично делимым, однозначно определяется плотностью вероятности  $\pi_1(\theta) = e^{-\theta}$ , отвечающей значению  $\rho = 1$ . Характеристическая функция этой плотности хорошо известна ([2, §15.2]) ( $i$  – комплексная мнимая единица,  $v$  – формальная переменная)

$$f(v) := \int_0^\infty e^{iv\theta} \cdot e^{-\theta} d\theta = \int_0^\infty e^{-(1-iv)\theta} d\theta = \frac{1}{1-iv} \quad v \geq 0 \quad ; \quad (18)$$

произвольному значению  $\rho > 0$  отвечает х.ф.  $f^\rho(v)$ .

3.2. *Каноническое представление.* По теореме Колмогорова о безгранично делимых законах распределения [1, §45], логарифм х.ф. представим в *канонической форме*

$$\ln f(v) = i\gamma v + \int_0^\infty \frac{e^{iv\theta} - (1 + iv\theta)}{\theta^2} dG(\theta) \quad v \geq 0 \quad , \quad (19)$$

где  $\gamma$  – вещественная постоянная,  $G(\theta)$ ,  $\theta \geq 0$  – неубывающая ограниченная функция ( $dG(\theta)$  называется *канонической мерой*). Для функции (18) (см. [2, §17.3])

$$\ln f(v) = \int_0^{\infty} \frac{e^{iv\theta} - 1}{\theta} e^{-\theta} d\theta = iv + \int_0^{\infty} \frac{e^{iv\theta} - (1 + iv\theta)}{\theta} e^{-\theta} d\theta \quad v \geq 0 \quad , \quad (20)$$

так что в (19)

$$\gamma = 1 \quad , \quad dG(\theta) = g(\theta)d\theta \quad g(\theta) := G'(\theta) = \theta e^{-\theta} \quad . \quad (21)$$

**3.3. Интерпретация канонического представления.** По построению, (19) есть каноническое представление для плотности  $\pi_1(\theta)$ , отвечающей высоте столба детектора  $\rho = 1$ . Разделим процесс роста до высоты  $\rho = 1$  на  $n$  малых интервалов высоты  $\rho = 1/n$ . В [1, §56] показано, что

$$N(\theta) := \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{s^2} dG(s) \quad (22)$$

представляет собой предел

$$N(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \cdot \int_{\theta}^{\infty} \pi_{1/n}(s) ds \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [nP(\mu_{1/n} > \theta)] \quad ; \quad (23)$$

выражение в квадратных скобках справа есть математическое ожидание числа малых интервалов, время роста которых превосходит  $\theta$ . Согласно [2, стр. 365], можно строго обосновать следующее

**Утверждение.** Величина  $N(\theta)$  (т.е. предел (23)) может интерпретироваться как математическое ожидание количества значений  $\rho \in (0, 1)$  таких, что скачки  $\mu_{\rho+} - \mu_{\rho-}$  превосходят  $\theta$ . ♠

Соответственно, функция  $N(\theta)$ ,  $\theta > 0$  называется *функцией скачков*, а  $dN(\theta) = dG(\theta)/\theta^2$  называют *мерой Леви*.

Для ординарного пуассоновского потока  $\nu_{\theta}$  (7), рассматриваемого в непрерывном пространстве состояний  $\rho \geq 0$ , мера Леви  $dN(\rho)$  – *атомарна*: она равна нулю всюду, кроме точки (атома)  $\rho = k = 1$ , в которой  $N(\rho)$  имеет скачок высоты единица. Для процесса  $\{\mu_{\rho}\}$   $dN(\theta) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} d\theta$ ; эта

мера не имеет атомов, поэтому инверсный пуассоновский процесс не содержит атомарных пуассоновских компонент, он **чисто сингулярен**.

Наконец, поскольку  $N(\theta) > 0$ , траектории процесса  $\{\mu_\rho\}$  разрывны.

3.4. *Повторная инверсия, квазипуассоновский поток.* В п. 2.2 была предпринята неудачная попытка перехода от дискретного потока частиц, когда столб детектора  $H = \nu h$  наращивался частицами-дисками скачкообразно, к непрерывной переменной  $\rho$ . Теперь, когда построен процесс  $\{\mu_\rho\}$ , мы можем применить к нему повторную инверсию и перейти к непрерывному множеству состояний  $\rho > 0$  процесса  $\{\nu_\theta\}$ , определив событие  $\{\nu_\theta < \rho\}$  как равносильное событию  $\{\mu_\rho > \theta\}$ .

Определим функцию распределения с.в.  $\mu_\rho$ :

$$\Psi_\rho(\theta) = \begin{cases} 1 & \rho = 0 \\ \int_{s=0}^{\theta} \pi_\rho(s) ds = \int_{s=0}^{\theta} \frac{s^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} \cdot e^{-s} ds & \rho > 0 \end{cases} \quad \theta \geq 0. \quad (24)$$

Соответственно, функция распределения  $\Phi_\theta$  с.в.  $\nu_\theta$  дается формулой

$$\Phi_\theta(\rho) := P[\nu_\theta < \rho] = P[\mu_\rho > \theta] = 1 - \Psi_\rho(\theta) \quad \rho \geq 0, \quad (25)$$

где  $\Psi_\rho(\cdot)$  – функция распределения (24) с.в.  $\mu_\rho$ .

*Примечание.* Возрастание  $\Phi_\theta(\rho)$  по  $\rho$  следует из убывания по  $\rho$   $\Psi_\rho(\theta)$  (см. Замечание 1). ♠

Дифференцируя (25) по  $\rho$ , находим плотность вероятности с.в.  $\nu_\theta$ :

$$\varphi_\theta(\rho) := \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_\theta(\rho) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_\theta(\rho) = -\int_{s=0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{s^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} \right] e^{-s} ds \quad \rho > 0. \quad (26)$$

Мы видим, что плотность (26) никак не похожа на плотность (9), полученную в п. 2.2. "лобовой" попыткой обобщения.

Можно считать, что теперь мы имеем дело не с пуассоновским квантованным потоком частиц, а с *квазипуассоновским потоком* некоей прерывистой субстанции (поскольку процесс  $\{\mu_\rho\}$  разрывен) – "квазижидкости". **Формула (26) задает квазипуассоновский поток, который физически интерпретируется как квазижидкость.** Для квазижидкости предположение Гнеденко (6) не выполняется.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. *Удивительный вопрос.* Вызывает удивление, что введенный в статье процесс  $\{\mu_\rho\}$  (вполне естественный) не был **явным образом** описан в литературе. В учебнике [2], фактически сделано все необходимое для определения этого процесса (см. Примечания в конце Раздела 2):

- получены формулы (11) для дискретных вероятностей  $\mu_k$ ;
- для их обобщения (гамма-распределений) доказано свойство (2), эквивалентное уравнению Маркова (4.3,б).

Оставалось совсем немного – определить сам процесс !

4.2. *Двойственные процессы роста.* В формуле (25)  $\Psi_\rho$  – это ф.р. построенного процесса  $\{\mu_\rho\}$ . Но она может восприниматься и более широко – как ф.р. произвольного процесса роста (и тогда  $\Psi_\rho(\theta)$  возрастает по  $\theta$  и убывает по  $\rho$ ); семейство  $\{\nu_\theta\}$ , порожденное ф.р.  $\Phi_\theta$  (определяемой с помощью (25)), порождает процесс, который можно назвать *двойственным* к исходному процессу  $\{\mu_\rho\}$ . Записав (25) в форме  $\Phi_\theta(\rho) + \Psi_\rho(\theta) = 1$ , видим, что соотношение двойственности взаимно.

**По идее** процесс, двойственный к процессу роста, сам должен быть однородным случайным процессом с независимыми положительными приращениями (т.е. процессом роста); для этого необходимо, чтобы выполнялось уравнение Маркова (4.3,б). К сожалению, эта идея ошибочна: процесс  $\{\nu_\theta\}$  неоднороден ввиду наличия скачков у процесса  $\{\mu_\rho\}$ .

В заключение приношу глубокую благодарность А.Д.Сластникову (ведущий научный сотрудник ЦЭМИ, специалист по теории вероятностей), консультации которого существенным образом отразились на содержании данной статьи (в частности, им было указаны Замечание 1 и неоднородность процесса  $\{\nu_\theta\}$ , двойственного к  $\{\mu_\rho\}$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965.
- 2 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967.
- 3 Двайт Г.Б. Таблица интегралов и другие математические формулы. М.: ГРФМЛ, 1983.

## Лист аннотаций

**О.А. Андриюшкевич, И.М. Денисова.** Особенности становления в России государственно–частного партнерства / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 7–38.

Статья продолжает публикацию авторов в вып. 6. Анализируются проблемы и особенности процесса становления в России современных форм делового партнерства государства и частного бизнеса.

**С.В. Буравлев, Н.А. Трофимова.** Риск потери деловой репутации: его значение и методы управления / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 39–56.

В связи с мировым финансовым кризисом и процессами глобализации остро встал вопрос о деловой репутации крупных экономических игроков; статья посвящена анализу риска ее потери.

**И.В. Роговина.** Применение трехкомпонентного индекса Тейла для оценки экономического неравенства субъектов РФ / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 57–68.

Индекс Тейла применен к оценке экономического неравенства субъектов РФ в трехступенчатой иерархии регионы (субъекты РФ)–группы–классы. Проведены расчеты на реальной информации за 2005–2008 гг.

**С.А. Смоляк.** Модели оценки износа машин и оборудования – II / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 69–82.

Продолжение публикации по этой теме в вып. 5. Полученные ранее результаты обобщены на более реалистичную ситуацию, с учетом современных подходов.

**В.М. Четвериков.** Механизмы компенсации рискованных потерь при долевом участии в инвестировании проектов / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 83–102.

Рассмотрена методологическая модель долевого участия в инвестировании портфеля простейших проектов однократного вложения. Обсуждаются механизмы компенсации возможных потерь, связанных с неопределенностью будущих доходов.

**Т.А. Белкина, М.А. Гаврилова** Асимптотики вероятности разорения в классической модели страхования с фиксированным объемом средств в форме акций / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 103–112.

Получены асимптотики вероятности разорения для классической модели страхования в предположении, что объем капитала, хранимого в форме акций, постоянен (с учетом динамики их цен).

**Т.А. Белкина, Н.Б. Конюхова.** О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования капитала в безрисковый актив / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 113–122.

Предложено новое, более простое и наглядное (чем имевшееся в литературе) доказательство аналитической формулы вероятности разорения начального капитала.

**Е.С. Паламарчук.** Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при наличии случайных факторов / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 123–136.

Классический подход Вальраса, описывающий динамику рыночной цены, распространен на стохастическую среду. Построена и проанализирована соответствующая математическая модель, получено оптимальное уравнение как функция текущей цены.

**В.З. Беленький, Л.Я. Клеппер.** О дальнейших путях развития математических методов оптимизации дозовых полей для внутритканевой терапии злокачественных опухолей / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 137–144.

Продолжение серии работ авторов. По названной теме дается обзор текущего состояния и дальнейших путей развития.

**В.З. Беленький.** Некоторые замечания и дополнения к теории однородных случайных процессов с независимыми приращениями / Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под ред. В.З. Беленького, вып. 7. — М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 1145–156.

Однородные процессы с независимыми приращениями, функция скачков которых в каноническом представлении непрерывна, теоретически изучены, но примеров реальных физических процессов такого типа автором в литературе не найдено; в работе построен такой пример.

## List of abstracts

**O.A. Andryushkevich, I.M. Denisova.** Evolution features of state-private partnership in Russia.

The paper continues the publication of authors from Issue 6 of 2009. The problems and evolution features of modern state-private business partnership in Russia are analyzed.

**S.V. Buravlev, N.A. Trofimova.** Risk of business reputation loss: its importance and methods of control.

In connection with the world financial crisis and with the globalization processes, the business reputation of key economic players becomes especially important; the paper analyzes the risks of its loss.

**I.V. Rogovina.** Application of the three-component Theil's index for estimating the economic inequality between the regions of the Russian Federation.

The Theil index is used to estimate the economic inequality between the regions of the Russian Federation in the framework of the three-stage hierarchy "regions–groups–classes". Some numerical results based on the real information over the period of 2005–2008 are presented and discussed.

**S.A. Smolyak.** Estimation models for machines and equipment wear – II.

The paper continues the publication of the author from Issue 5 of 2008. The previous results are generalized to a more realistic situation and some modern approaches are taken into account.

**V.M. Chetverikov.** Mechanisms for compensation of risk loss under shared investments in projects portfolio.

It is considered a methodological model of shared investments for a portfolio of the simplest projects with one-time input. The risks associated with future income uncertainty are taken into account.

**T.A. Belkina, M.A. Gavrilova.** Ruin probability asymptotics in the classical insurance model with a fixed amount of capital held in shares.

Ruin probability asymptotics are obtained for the classical insurance model under the assumption that the amount of capital held in shares is constant (with taking into account the dynamics of share costs).

**T.A. Belkina, N.B. Konyukhova.** On the ruin probability in an insurance model with consideration of capital investment in a risk-free assets.

A new proof of an analytical formula for the ruin probability as a function of initial capital function is proposed. This proof is simpler and more descriptive than the previous available in the literature.

**E.S. Palamarchuk.** Control of price convergence to its equilibrium value in the presence of random factors.

The classical Walras approach describing the market price dynamics is extended to the case of a stochastic environment. The corresponding mathematical model is constructed and analyzed. The optimal equation is derived as a current price function.

**V.Z. Belenky, L.Ya. Klepper.** On further development lines for the mathematical methods of optimizing the dose fields in the interstitial therapy of malignant tumors.

The previous authors' studies are continued to review the current state of the art in the topic under consideration and to discuss the further development lines.

**V.Z. Belenky.** Some remarks and supplements to the theory of homogeneous random processes with independent increments.

The homogeneous processes with independent increments, whose jump function in canonical representation is continuous, are theoretically studied. In the literature, however, the author was not able to find any examples of actual physical processes of this type; such an example is proposed in this paper.



## ОБ АВТОРАХ

**Андрюшкевич Ольга Анатольевна**

кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

**Беленький Виталий Зиновьевич**

доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ЦЭМИ

**Белкина Татьяна Андреевна**

кандидат физ.-мат. наук, доцент, зав. лабораторией ЦЭМИ

**Буравлев Сергей Валерьевич** – выпускник 2008 г. ГАУГН,  
сотрудник коммерческого банка "Евразия"

**Гаврилова Мария Александровна**

выпускница 2010 г. кафедры мат. экономики МГИЭМ

**Денисова Ирина Михайловна**

кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

**Клеппер Лев Яковлевич**

доктор экон. наук, главный научный сотрудник ЦЭМИ

**Конюхова Надежда Борисовна**

ведущий научный сотрудник ВЦ РАН

**Паламарчук Екатерина Сергеевна**

младший научный сотрудник ЦЭМИ

**Роговина Инна Вадимовна**

старший преподаватель кафедры мат. экономики МГИЭМ

**Смоляк Сергей Абрамович**

доктор экон. наук, главный научный сотрудник ЦЭМИ

**Трофимова Наталия Аристарховна**

кандидат экон. наук, доцент, старший научный сотрудник ЦЭМИ

**Четвериков Виктор Михайлович** – доктор физ.-мат. наук,  
профессор, зав. кафедрой мат. экономики МГИЭМ

Объем 10 п.л.

Тираж 120 экз.