

An aerial photograph of a freight train yard. The top half shows several freight trains with various colored containers (red, blue, green, white) and railcars. The bottom half shows multiple parallel rail tracks with gravel ballast and overhead power lines. The text is overlaid on a dark blue rectangular area in the middle.

Н.К. Хачатрян

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Н.К. Хачатрян

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ
ГРУЗОПЕРЕВОЗОК**

Монография



МОСКВА - 2023

УДК 519.8:656.2
ББК 22.18:39.2
Х29



<https://elibrary.ru/wixoqr>

Рецензенты:

А.В. Гасников – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой
математических основ управления школы ФПМИ МФТИ;

И.У. Зулкарнай – д.э.н., заведующий лабораторией современных проблем
региональной экономики Центрального аппарата
Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Хачатрян, Нерсес Карленович.

Х29 **Моделирование процесса организации железнодорожных
грузоперевозок** : монография / Н.К. Хачатрян. – Москва :
МАКС Пресс, 2023. – 168 с. : ил.
ISBN 978-5-317-07005-2
<https://doi.org/10.29003/m3443.978-5-317-07005-2>

Монография посвящена исследованию нового подхода в описании процесса грузовых железнодорожных перевозок, основанного на его представлении в виде динамических моделей, описывающих взаимодействие произвольной станции с соседними станциями (предыдущей и последующей). Результатом этого взаимодействия является формирование грузопотока в рамках спроса на грузоперевозки и технического потенциала станций. Изучены установившиеся режимы грузоперевозок и соответствующие им режимы грузопотоков. Монография предназначена для специалистов в области железнодорожного транспорта, а также студентов и исследователей, интересующихся данной проблематикой.

Ключевые слова: железнодорожный транспорт, моделирование грузоперевозок, дифференциальные уравнения, стационарные режимы, численная реализация.

УДК 519.8:656.2
ББК 22.18:39.2

ISBN 978-5-317-07005-2

© Н.К. Хачатрян, 2023
© Оформление. МАКС Пресс, 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК НА КРУПНЕЙШИХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЛИНИЯХ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ.....	12
1.1. Модель транснациональных грузоперевозок: технологии организации грузопотока, правило контроля. Основные результаты.....	13
1.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций. Случай неограниченной емкости зон временного хранения грузов.....	18
1.3. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в случае ограниченной емкости зон временного хранения грузов.....	28
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК МЕЖДУ УЗЛОВЫМИ СТАНЦИЯМИ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ.....	39
2.1. Два способа корректировки системы организаций грузоперевозок	39
2.2. Корректировка технологий грузоперевозок.....	41
2.3. Корректировка системы контроля.....	55
2.4. Корректировка технологий грузоперевозок и системы контроля	81
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПРИ ОТСУТСТВИИ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ	94
3.1. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций.....	95

3.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций с учетом случайных воздействий.....	110
3.3. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (случай идентичных станций).....	117
3.4. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (общий случай).....	129
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Формулировка некоторых определений и теорем	140
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Доказательства основных теорем и лемм ...	145
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	155
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	158

ВВЕДЕНИЕ

Одной из крупнейших базовых отраслей экономики любого государства является транспорт. Он обеспечивает географическую связанность территорий страны и координацию работы всех отраслей экономики. Транспорт создает условие для эффективного функционирования государства, а его развитие является важнейшим условием модернизации экономики. Кроме того, транспорт помогает развитию международных экономических отношений, освоению новых экономических районов, обеспечению обороноспособности страны. Эффективное развитие транспорта невозможно без оптимального планирования сетей, улучшения организации движения и ряда других задач требующих применения математических методов и моделей. Математическое моделирование транспорта можно разделить на две большие группы:

первая группа – моделирование транспортных сетей и их загрузку;

вторая группа – моделирование динамики транспортного потока (Швецов, 2003).

Первая группа представлена моделями расчета корреспонденций, такими как гравитационная модель (Carrothers, 1956; Wilson, 1971), энтропийная модель (Wilson, 1970; Harris, Wilson, 1978; Popkov, 1995), модели семейства конкурирующих центров (Fotheringham, 1983, 1986), а также моделями распределения потоков по сети, такими как модель равновесного распределения потоков и его расширения и модель оптимальных стратегий (Shvetsov, 2009; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973; Lo, Chen, 2000; Bar-Gera, 2002; Spiess, Florian, 1989).

Вторая группа представлена основными классами динамических моделей: макроскопическими (гидродинамическими), кинетическими (газодинамическими) и микроскопическими. Макроскопические модели (Gazis, 1974; Daganzo, 1994, 1995; Kuhne, 1984; Kerner, 2009; Гасников и др., 2013; Сухинова и др., 2009; Иносэ, Хамада, 1983), описывающие усредненные характери-

ки транспортного потока, также называют гидродинамическими, потому что в них сам поток уподобляется движению сжимаемой жидкости. Микроскопические модели явно описывают движение каждого транспортного средства. Они точнее макроскопических моделей описывают движение на отдельных участках транспортной сети, однако требуют гораздо больших вычислительных мощностей при практической реализации. Первые микроскопические модели были предложены в 50-х годах прошлого столетия (Pipes, 1953; Швецов, 2003). Примерами таких моделей являются модели следования за лидером (Gazis et al., 1961; Brackstone, McDonald, 1999), модели оптимальной скорости (Bando et al., 1994, 1995, 1998; Newell, 1961; Tomer et al., 2000), модель Трайбера (Treiber, Hennecke, Helbing, 2000), а также модели клеточных автоматов (Cremer, Ludwig, 1986; Chowdhury, Santen, Schadschneider, 2000). Кинетические модели занимают промежуточное место между макроскопическими и микроскопическими моделями. В них поток задается плотностью распределения транспортных средств в фазовом пространстве, при этом динамика фазовой плотности описывается кинетическим уравнением. Оно получается в результате усреднения эффектов взаимодействия индивидуальных транспортных средств (Prigogine, Herman, 1971; Lampis, 1978; Helbing, 1996; Helbing, Treiber, 1998; Nelson, 1995).

Перейдем к классификации математических моделей, применяемых для анализа транспортных сетей, основываясь на их функциональной роли, т.е. к группировке в зависимости от задач, для решения которых они предназначены. Такая группировка приводит к трем основным классам моделей: прогнозным, имитационным и оптимизационным (Швецов, 2003).

Прогнозные модели предназначены для оценки транспортных потоков в сети в предположении, что известны как конфигурация транспортной сети, так и ее характеристики. Такие модели позволяют прогнозировать ряд усредненных характеристик движения, такие как объемы межрайонных корреспонденций, распределение транспортных средств по тем или иным участкам транспортной сети, интенсивность потоков и т.д. Одна из основных целей по-

строения таких моделей – оценить последствия от изменений в транспортной сети и размещения в ней новых объектов.

Имитационные модели предназначены для подробного описания процесса дорожного движения вплоть до воспроизведения всех его деталей. Исходными данными для таких моделей являются усредненные значения потоков и их распределение по отдельным участкам транспортной сети. Эти модели позволяют оценить такие важные характеристики процесса дорожного движения как задержки на перекрестках, неравномерность транспортных потоков во времени, протяженности дорожных заторов и динамики их образования и т.п. Применение таких моделей целесообразно при разработке проектов организации дорожного движения, оптимизации светофорных циклов регулирования и т.п. (Якимов, 2013). Примером такой модели является разработанная в ЦЭМИ РАН в 2009 году агент-ориентированная модель автомобильных пробок Москвы (Макаров, Житков, Бахтизин, 2009), позволяющая решать задачи масштаба городской агломерации, связанные с оценкой работы всей транспортной системы в результате изменения следующих ее элементов: введение новых радиальных или кольцевых автомагистралей; временное закрытие или ликвидация какого-либо элемента транспортной системы; введение экономических санкций (плата за проезд по магистрали, за въезд в зону центра и т. п.).

Еще один большой класс моделей предназначен для оптимизации деятельности транспортных сетей. Такие модели позволяют определять оптимальные маршруты перевозок, формировать оптимальные конфигурации сети и т.д. (Lu, Wang, 2022; Veluscek et al., 2015; Стенбринк, 1981; Галабурда, 1985; Авен, Ловецкий, Моисеенко, 1985; Васильева, Игудин, Лившиц, 1987; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973).

Одним из наиболее востребованных для грузоперевозок видов транспорта в России является железнодорожный. Публикации, посвященные железнодорожной логистике, по типу исследуемых задач можно разбить на три основные группы.

Первая группа представлена задачами проектирования инфраструктуры железнодорожной сети (Pyrgidis, 2016; Murray,

1997; Higgins, Ferreira, Kozan, 1995; Kraay, Barker, Chen, 1991; Ferreira, Murray, 1997; LeBlanc 1976).

Вторая группа представлена задачами управления парком локомотивов и вагонов (Fügenschuh et al., 2008; Ahuja et al., 2005; Forbes, Holt, Watts, 1991; Beaujon, Turnquist, 1991; Sherali, Suharko, 1998; Sherali, Tuncbilek, 1997; Turnquist, Markowicz, 1989; Ziarati et al., 1997). В зависимости от особенностей регулирования и рынка, для каждого конкретного региона могут быть построены свои модели, учитывающие ту или иную специфику. В качестве примера можно рассмотреть работу Р. Фукасава и др. (Fukasawa et al., 2002), в которой представлена модель, применяемая одним из крупнейших железнодорожных транспортных операторов на территории Латинской Америки. Другим примером является работа А. Чезелли и др. (Ceselli et al., 2008), в которой рассматривается сразу несколько моделей оптимизации доставки грузов швейцарской железнодорожной грузовой компанией Cargo Express Service of Swiss Federal Railways. Ряд публикаций посвящен моделям, спроектированным с учетом особенностей рынка грузовых перевозок в Италии (Lulli, Pietropaoli, Ricciardi, 2011; Campetella et al., 2006). В некоторых работах представлены модели минимизации издержек транспортировки грузов по железнодорожной сети, покрывающей несколько европейских стран (Andersen, 2009; Jeong, Lee, Bookbinder, 2007). Также существуют модели, созданные для российского рынка железнодорожных перевозок (Sadykov et al., 2013; Лазарев, Садыков, 2014).

Третья группа представлена задачами железнодорожного планирования, основная доля которых посвящена формированию расписания движения грузовых поездов и организации грузовых потоков (Лазарев и др., 2012; Brannlund et al., 1998; Cai, Goh, 1994; Cai, Goh, Mees, 1998; Carey, Lockwood, 1995; Higgins, Kozan, Ferreira, 1996; Jovanovic, Barker, 1991; Kraay, Barker, Chen, 1991; Oliveira, Smith, 2000; Sahin, 1999; Sauder, Westerman, 1983; Szpigel, 1973).

В данной монографии представлен новый подход к решению задач железнодорожного планирования, согласно которому процесс организации железнодорожных грузоперевозок представля-

ет собой формирование грузопотока на основе взаимодействия произвольной станции с соседними станциями (предыдущей и следующей) с учетом их технических характеристик и спроса на грузоперевозки. Это позволяет строить модели, прогнозирующие динамику загруженности станций и потоков, возникающих на железнодорожной сети, при заданной процедуре организации грузопотока.

Рассматривается несколько конфигураций участка железнодорожной сети. Первая конфигурация представляет собой протяженную линию, состоящую из большого количества станций и подходит для описания транснациональных перевозок (например, перевозки по транссибирской железнодорожной магистрали протяженностью более 9000 км). Вторая конфигурация представляет собой замкнутую цепочку станций, а третья – железнодорожная линия между двумя узловыми станциями.

В зависимости от характера спроса используется два подхода к организации грузоперевозок. Первый подход целесообразно применять при наличии стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этом случае важно максимально задействовать потенциал всех станций. Для этого необходимо обеспечить загрузку определенного количества путей на станциях, которое представляет собой максимально возможное число задействованных путей на станциях, при котором гарантированно можно организовать бесперебойный грузопоток. Для исключения ситуаций, приводящих к сбою в системе грузоперевозок, при загрузке станций сверх указанного уровня необходимо часть грузов отправить на временное хранение. Для этого предполагается наличие специальных зон хранения между станциями. Для данного подхода одной из важных задач является организация системы контроля, обеспечивающая вывод грузов из зон временного хранения. Процедура организации грузопотока использует две технологии, единые для всех станций, а сам грузопоток состоит из двух составляющих: стационарного и переменного. Задача технологий – обеспечить загрузку всех станций (приблизить число задействованных путей к оптимальному значению). Это достигается за счет увеличения переменного потока (стационарный поток обеспечивается

автоматически). Отметим, что увеличение переменного потока может позволить выделить из него дополнительную стационарную составляющую. Первая технология основана на взаимодействии соседних станций и формируется по определенному правилу. Согласно этому правилу каждая станция должна принимать груз с предыдущей станции, если число задействованных путей на ней меньше, чем на предыдущей станции, и отправлять на следующую станцию, если число задействованных путей на ней больше, чем на следующей станции. При этом интенсивность приема и интенсивность отправки грузов пропорциональны разности чисел задействованных путей на соседних станциях. Вторая технология использует технические возможности самой станции и основана на взаимодействии станции с соседними зонами временного хранения грузов.

Второй подход целесообразно применять в случае, когда нет стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этом случае нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере и, соответственно, в наличии специальных зон между станциями для временного хранения части грузов. В такой ситуации важно описать динамику грузопотока в зависимости от технического потенциала станций. В случае движения по круговой цепочке станций важно определить установившийся уровень грузопотока при заданных правилах взаимодействия станций, а также выявить его зависимость от технического потенциала станций. В случае движения между двумя узловыми станциями грузопоток формируется поступившими на начальную узловую станцию грузами с учетом технического потенциала станций. Поэтому, главной задачей является организация бесперебойного функционирования системы грузоперевозок с учетом интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и технического потенциала станций. При этом основной характеристикой станций является степень несогласованности между приемом и отправкой грузов, которая представляет собой разницу между объемом входных и выходных грузов за единицу времени. Для бесперебойной организации грузоперевозок важно, чтобы указанная характеристика со временем имела небольшие значения на всех станциях.

По своей функциональной роли, модели, представленные в данной работе, являются прогнозными. Они позволяют прогнозировать динамику загруженности станций и потоков, возникающих в железнодорожной сети, при заданной процедуре организации грузопотока. По способу описания транспортных потоков они близки к моделям следования за лидером.

Работа состоит из трех глав.

Первая глава посвящена описанию процесса организации грузоперевозок в рамках первой и второй конфигураций участка железнодорожной сети в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки. Напомним, что процедура организации грузопотока использует две технологии, единые для всех станций, а также систему контроля. Описаны возможные режимы грузоперевозок, исследованы на устойчивость стационарные режимы.

Вторая глава посвящена описанию процесса организации грузоперевозок в рамках третьей конфигурации участка железнодорожной сети в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки. Обозначена проблема, которая возникает при переходе к описанию процесса организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации участка железнодорожной сети (между узловыми станциями). Представлено несколько вариантов ее преодоления, которые заключаются как в корректировке технологий грузоперевозок, так и в ослаблении системы контроля.

Третья глава посвящена описанию процесса организации грузоперевозок в рамках второй и третьей конфигурации участка железнодорожной сети при отсутствии стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В случае движения по круговой цепочке станций исследована динамика грузопотока, а также ее зависимость от технического потенциала станций. В случае движения между узловыми станциями исследованы режимы грузоперевозок, позволяющие организовать бесперебойное функционирование системы грузоперевозок с учетом интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и технического потенциала станций.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК НА КРУПНЕЙШИХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЛИНИЯХ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ

Данная глава посвящена построению динамических моделей организации железнодорожных грузоперевозок в условиях стабильно высокого спроса на них, что предполагает скоординированную работу станций с целью использования их потенциала в полной мере. Такой режим работы станций чреват перебоями в системе грузоперевозок, связанными с чрезмерной загрузкой станций. Для предотвращения таких ситуаций необходимо установить предельно допустимую загруженность станций, позволяющую организовать бесперебойный грузопоток и, при необходимости, освобождать чрезмерно загруженные станции путем отправки части грузов в зону временного хранения. Предполагается, что такие зоны существуют между произвольными двумя соседними станциями. Рассматриваются две конфигурации железнодорожной сети: первая – протяженная линия, состоящая из большого количества станций (например, Транссибирская магистраль), вторая – замкнутая цепочка станций. Организация эффективного грузопотока в рамках таких конфигураций железнодорожной сети в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки во многом зависит от правильной организации процесса взаимодействия промежуточных станций. Для детального описания и анализа указанного процесса в моделях, описываемых в данной главе, узловые станции не присутствуют и их влияние на систему грузоперевозок не учитывается.

1.1. Модель транснациональных грузоперевозок: технологии организации грузопотока, правило контроля. Основные результаты

Данная модель описывает движение грузопотока в рамках первой конфигурации железнодорожной сети. Для того чтобы описать процедуру грузоперевозок без учета влияния на нее узловых станций будем считать линию железнодорожной сети неограниченной. Движение грузопотока осуществляется в одном направлении. Схема движения грузопотока представлена на рис. 1. Кругами на нем обозначены станции, а квадратами – зоны временного хранения грузов.

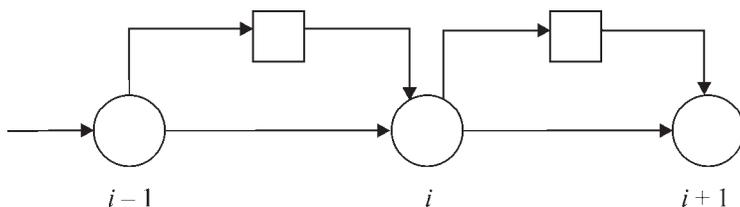


Рис. 1. Схема движения грузопотока

Данная модель была подробно исследована в ранних работах автора (Хачатрян, 2003; Хачатрян, 2004; Beklaryan, Khachatryan, 2006). Приведем ее описание и основные содержательные результаты. Точные формулировки основных теорем приведены в приложении 1.

На каждой станции существует определенное число путей (так называемые станционные пути). Каждая станция с номером i в произвольный момент времени t характеризуется числом задействованных путей $z_i(t)$. Это число отождествляется с объемом грузов на станции. Опишем процесс организации грузоперевозок, определяющий формирование грузопотока, содержащего две составляющие: постоянный и переменный. Постоянный поток формируется автоматически, однако, его уровень может быть достаточно низким и как следствие не полностью удовлетворить высокий спрос на грузоперевозки. Простое увеличение постоянного потока до оптимальных значений невозможно в силу

неравномерной загруженности станций. В связи с этим параллельно с постоянным потоком запускается переменный поток, с помощью которого можно увеличить грузопоток за счет выравнивания загруженности станций. Организация переменного потока осуществляется посредством двух технологий. Первая технология осуществляет взаимодействие соседних станций, а вторая – взаимодействие станции с соседними зонами временного хранения грузов. Опишем эти технологии.

Согласно первой технологии, каждая станция i должна:

- 1) принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$, если $z_{i-1} > z_i$,
- 2) и отправить его на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если $z_i > z_{i+1}$.

При нарушении первого условия станция с номером i отправляет груз в зону временного хранения с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, а при нарушении второго – принимает груз с зоны временного хранения с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$. Параметр $\alpha > 0$ является нормативом правила взаимодействия соседних станций. Таким образом, произвольная станция принимает груз с предыдущей станции, если число задействованных путей на ней меньше, чем на предыдущей станции, и отправляет на следующую станцию, если число задействованных путей на ней больше, чем на следующей станции. Интенсивность как приема, так и отправки грузов с произвольной станции пропорциональна разности чисел задействованных путей на данной станции и соседних станциях. Коэффициент пропорциональности является единым для всех станций и характеризует возможность перегонных путей в целом по всей железнодорожной сети.

Для всех станций существует единый критический уровень числа задействованных станционных путей, при превышении которого необходимо экстренное освобождение путей (отправка части грузов в зоны временного хранения). Экстренное освобождение путей проводится с помощью второй технологии. Ее используют также и для приема грузов с зоны временного хране-

ния, расположенного до станции (если число задействованных путей на станции меньше критического уровня числа задействованных путей). График функции, задающей скорость изменения числа задействованных путей в рамках данной технологии, представлен на рис. 2.

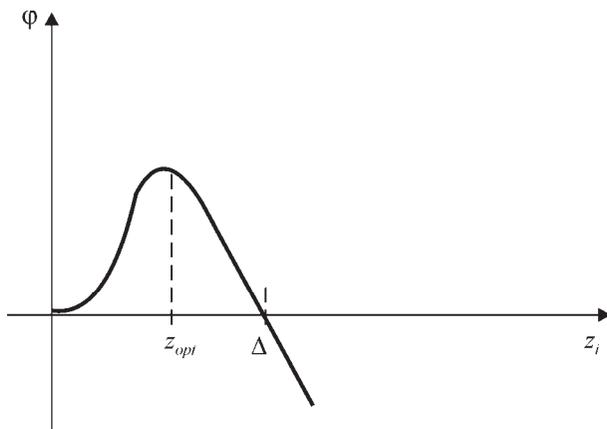


Рис. 2. Скорость изменения числа задействованных станционных путей в рамках второй технологии

Как видно из рис. 2, до тех пор пока число задействованных путей на станции не больше критического значения Δ , вторая технология применяется для приема грузов с зоны временного хранения, расположенного до станции. Так как данная технология является дорогостоящей, то применяется она активно лишь при определенной загрузке станций (близкой к z_{opt}), при которой уменьшается грузопоток в рамках первой технологии, а загруженность станций не близка к критической. Как только число задействованных путей на станции превышает значение Δ , то вторая технология применяется для экстренного вывоза части грузов в зону временного хранения, расположенную после станции. Отметим, что функция $\Phi(\cdot)$ на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей и следовательно вывоз грузов в зону временного хранения осуществляется с интенсивностью прямо пропорциональной превышению числа задействованных путей критического значения.

Организация подобных грузоперевозок с использованием зон временного хранения грузов должна включать в себя систему контроля. В данной модели используется простая система контроля. Она заключается в том, что объемы грузов на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$, называемым характеристикой системы контроля. В нашей интерпретации она формулируется следующим образом: число задействованных путей на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$.

Таким образом, динамика числа задействованных путей, определяемая описанными выше двумя технологиями, задается бесконечномерной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i) - \alpha(z_i - z_{i+1}) + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

После простейшего преобразования данная система приобретает следующий вид

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Система контроля задается следующими нелокальными линейными ограничениями

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2)$$

Возникает вопрос, существуют ли режимы грузоперевозок, осуществляемые с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющие заданной системе контроля. Если такие режимы существуют, то для какого диапазона изменения характеристики системы контроля. Дело в том, что диапазон изменения характеристики системы контроля τ должен быть актуальным. Слишком малые значения τ неактуальны, так как они значительно меньше времени перегона грузов со станции i на станцию $i+1$. Слишком большие значения τ также неактуальны, так как они не соизмеримы с временными лагами реальных процессов.

Итак, нам надо получить ответы на следующие вопросы. Имеет ли система дифференциальных уравнений (1) решения, удовлетворяющие нелокальным линейным ограничениям (2)?

Для какого диапазона изменения характеристики τ системы контроля такие решения существуют?

Прежде чем ответить на них дадим точное определение решения системы дифференциальных уравнений (1).

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i \in Z}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением системы дифференциальных уравнений (1), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют этой системе. ■

Решение системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2) (решения системы (1)–(2)) называются *решениями типа бегущей волны*, или солитонными решениями.

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$, $\bar{i} \in Z$, $\bar{z} \in R$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$ система (1)–(2) с фиксированным начальным значением $z_i(\bar{t}) = \bar{z}$ имеет решение. Такое решение является единственным (точная формулировка данного результата (теорема 6) приведена в приложении 1).

Таким образом, существует такой диапазон изменения характеристик системы контроля, что для каждого значения характеристики системы контроля из этого диапазона имеется единственный режим грузоперевозок, осуществляемый с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющий заданной системе контроля. Значение $\bar{\tau} > 0$ зависит от параметра α и константы Липшица $\varphi(\cdot)$, т.е. функции, отражающей возможности второй технологии по приему грузов с зон временного хранения. С увеличением как параметра α , так и константы Липшица значение $\bar{\tau}$ уменьшается.

Напомним, что задача указанных выше технологий – обеспечить дополнительную загрузку станций и по возможности увеличить интенсивность постоянного потока.

Возникает вопрос: можно ли настолько увеличить интенсивность постоянного потока, чтобы только за счет него обеспечить оптимальную загрузку станций? Отметим, что в нашей интерпретации интенсивность потока прямо пропорциональна загруженности станций обеспечивающих такой поток (числу задейство-

ванных стационарных путей). Для ответа на данный вопрос нужно исследовать стационарные решения системы (1)–(2) (в случае их наличия) на устойчивость.

Система (1)–(2) имеет два стационарных решения: $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$. Доказано, что стационарное решение $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ является устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ – неустойчивым (точная формулировка данного результата (теорема 7, теорема 8) приведена в приложении 1). Таким образом, в рамках описанной модели можно организовать стационарный поток, в котором потенциал всех станций будет максимально использован.

1.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций. Случай неограниченной емкости зон временного хранения грузов

Рассмотрим модель транспортных грузоперевозок по замкнутой цепочке станций, изображенной на следующем рисунке (Бекларян, Хачатрян, 2013).

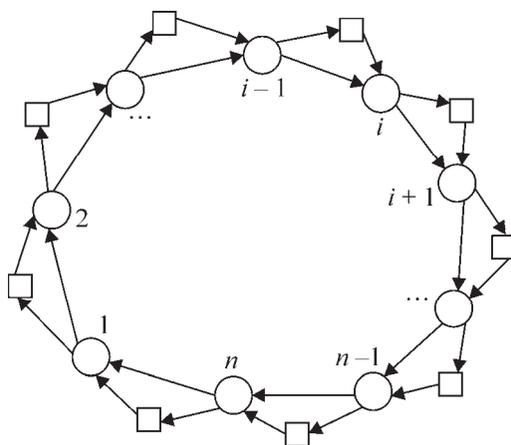


Рис. 3. Схема замкнутой цепочки станций

На рис. 3 представлена замкнутая цепочка, состоящая из n станций (нумерованные кружки). Как и в случае транснациональных грузоперевозок между произвольными двумя соседними станциями расположена зона временного хранения грузов (квадраты), так что на произвольную станцию груз может поступать из предыдущей станции или из зоны временного хранения, расположенной до станции и отправляться на следующую станцию или в зону временного хранения грузов, расположенную после станции. Организация грузопотока осуществляется точно так же, как и в предыдущей модели. Формально такую модель можно рассматривать как частный случай модели транснациональных грузоперевозок, и для ее исследования нам необходимо изучить решения системы (1)–(2), удовлетворяющие следующему дополнительному условию

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

Таким образом, данная модель описывается следующей системой

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \quad (3)$$

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (5)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является решением системы (3)–(5), то для произвольного $i \in Z$ функция $\bar{z}_i(\cdot)$ периодическая с периодом τn .

Доказательство. Пусть $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является решением системы (3)–(5). Тогда из условия бегущей волны (соотношение (5)) следует, что для произвольных $i \in Z, t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_{i+n}(t + \tau n)$. Из условия (4) следует, что $\bar{z}_{i+n}(t + \tau n) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, следовательно, $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, т.е. $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ является периодическим с периодом τn . ■

Несложно заметить, что систему (3)–(5) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \quad (6)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (7)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \quad (8)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (9)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \quad (10)$$

$$z_{i+kn}(t) = z_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (11)$$

Наряду с системой (6)–(11) рассмотрим конечномерную систему

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \quad (12)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (13)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \quad (14)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (15)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty). \quad (16)$$

Лемма 2. Если $\{z_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ является решением системы (6)–(11), то $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением системы (12)–(16). Если $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ – решение системы (12)–(16), то $\{z_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $z_{i+kn}(t) = z_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}$ является решением системы (6)–(11).

Доказательство очевидно. ■

Таким образом, разрешимость исходной системы (3)–(5) зависит от разрешимости конечномерной системы (12)–(16).

Итак, согласно леммам 1 и 2, если система (12)–(16) имеет решение, то оно будет периодическим с периодом τ . Одним из таких решений является стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. Для выявления других решений (если они существуют) изучим все

решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (15)–(16)).

Напомним, что функция $\varphi(\cdot)$ на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей и имеет вид

$$\varphi(z_i) = -\delta(z_i - \Delta), \quad i = 1, \dots, n, \text{ где } \delta > 0.$$

На полупрямой $(-\infty, \Delta]$ имеет место неравенство

$$\varphi(z_i) \leq -\delta(z_i - \Delta), \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, всюду на прямой $(-\infty, \infty)$ имеет место следующая оценка

$$\varphi(z_i) \leq -\delta z_i + \Delta\delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Рассмотрим систему (18)–(20), полученную из (12)–(14) в результате подстановки вместо функции $\varphi(\cdot)$ значений $-\delta z_i + \Delta\delta$.

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta)z_1 + \alpha z_2 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty), \quad (18)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta)z_i + \alpha z_{i+1} + \Delta\delta, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (19)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta)z_n + \alpha z_1 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty). \quad (20)$$

Замечание 1. Несложно заметить, что правая часть неравенства (17) является линеаризацией функции $\varphi(\cdot)$ в окрестности точки Δ . Следовательно, после линеаризации функции $\varphi(\cdot)$ в окрестности точки Δ система дифференциальных уравнений (12)–(14) преобразуется в систему дифференциальных уравнений (18)–(20). ■

С помощью замены $\bar{z}_i \rightarrow z_i - \Delta$ система дифференциальных уравнений (18)–(20) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta)z_1 + \alpha z_2, \quad t \in [0, +\infty), \quad (21)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta)z_i + \alpha z_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \quad (22)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta)z_n + \alpha z_1, \quad t \in [0, +\infty). \quad (23)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (21)–(23) имеет единственное стационарное решение $(0, 0, \dots, 0)$. Запишем систему (21)–(23) в матричной форме

$$\dot{z}(t) = Az, \quad (24)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{pmatrix},$$

$$\text{а } z(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots, z_n(\cdot))^T.$$

Лемма 3. Для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ собственные числа матрицы A являются отрицательными.

Доказательство приведено в приложении 2. ■

Лемма 4. Для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы (18)–(20) является глобально устойчивым.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ стационарное решение $(0, 0, \dots, 0)$ линейной системы (24) является глобально устойчивым. Напомним, что линейная система (24) была получена из линейной системы (18)–(20) с помощью замены $\bar{z}_i \rightarrow z_i - \Delta$. Сделав обратную замену, мы получим, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы (18)–(20) глобально устойчиво. ■

Теорема 1. Стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14) локально устойчиво по Ляпунову по первому приближению.

Доказательство следует из замечания 1 и глобальной устойчивости стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ линейной системы дифференциальных уравнений (18)–(20). ■

Установим связь между свойствами решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) и линейной системы дифференциальных уравнений (18)–(20).

Лемма 5. Если $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением нелинейной системы (12)–(14), а $\{\bar{\bar{z}}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением линейной системы (18)–(20) и для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняется условие $\bar{z}_i(t_0) = \bar{\bar{z}}_i(t_0)$ то для каждого $i = 1, \dots, n$, $t > t_0$ имеет место неравенство $\bar{z}_i(t) \leq \bar{\bar{z}}_i(t)$.

Доказательство следует из структуры правых частей систем дифференциальных уравнений (12)–(14), (18)–(20) и неравенства (17). ■

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) является ограниченным сверху.

Лемма 6. Всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) ограничено сверху. Более того, асимптотически оно ограничено значением Δ .

Доказательство следует из леммы 4 и леммы 5. ■

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) является также ограниченным снизу.

Лемма 7. Пусть $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14), причем, $\bar{z}_i(\bar{t}) \geq 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного $t > \bar{t}$ имеют место неравенства $\bar{z}_i(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство следует из структуры правых частей системы дифференциальных уравнений (12)–(14). Действительно, пусть в некоторый момент времени одна из компонент решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) первой оказалась равной нулю, т.е. для некоторого $\tilde{t} > \bar{t}$ выполняются условия: существует $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $\bar{z}_m(\tilde{t}) = 0$ и при этом

$\bar{z}_i(\tilde{t}) \geq 0$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда из (12)–(14) следует, что $\dot{\bar{z}}_m(\tilde{t}) \geq 0$ и, следовательно, $\bar{z}_m(t) \geq 0$ при $t > \tilde{t}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для случаев, когда равными нулю становятся одновременно несколько компонент решения системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (в том числе когда равными нулю становятся одновременно все компоненты решения). ■

Итак, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2. *Для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения ограничено. Более того, каждая координата решения снизу ограничена нулем, а сверху асимптотически значением Δ .*

Доказательство следует из леммы 6 и леммы 7. ■

Перейдем к исследованию области притяжения стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14). Для решения данной задачи система дифференциальных уравнений (12)–(14) была решена численно с помощью метода Рунге–Кутты 4-ого порядка. Результаты численных экспериментов сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ всякое решение системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$.* ■

Таким образом, если координаты начального значения меньше нуля, то график решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) имеет вид

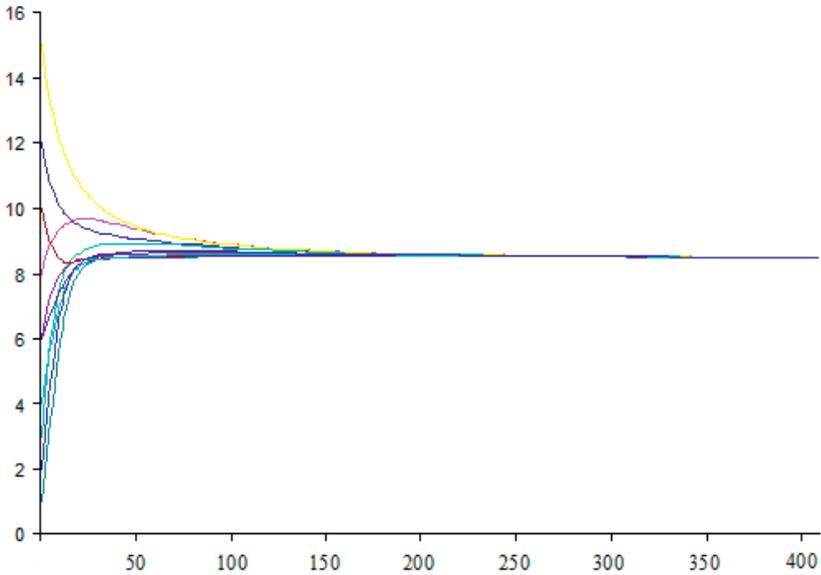


Рис. 4. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) (базовый случай)

На данном рисунке представлен график решений нелинейной системы (12)–(14) при $n = 10$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.5$, $\Delta = 8.5$.

Численные эксперименты также показали, что как с увеличением значения δ , так и с увеличением значения α решения нелинейной системы (12)–(14) раньше выходят на стационарный режим. Например, ниже на рисунках 5 и 6 представлены графики решений системы (12)–(14) при $\alpha = 1$, $\delta = 1$ и $\alpha = 5$, $\delta = 0.5$ соответственно.

Напомним, что мы занимаемся поиском решений типа бегущей волны системы (3)–(5). Показано, что всякое решение типа бегущей волны системы (3)–(5) является периодическим (лемма 1), а компоненты такого решения с номерами $1, 2, \dots, n$ являются решениями типа бегущей волны конечномерной нелинейной системы (12)–(14) (т.е. удовлетворяют системе (12)–(16)). Было исследовано множество всех решений нелинейной системы (12)–(14) (т.е. не только решений типа бегущей волны, удовлетворяющих условиям (15), (16) и являющихся периодическими). Доказано,

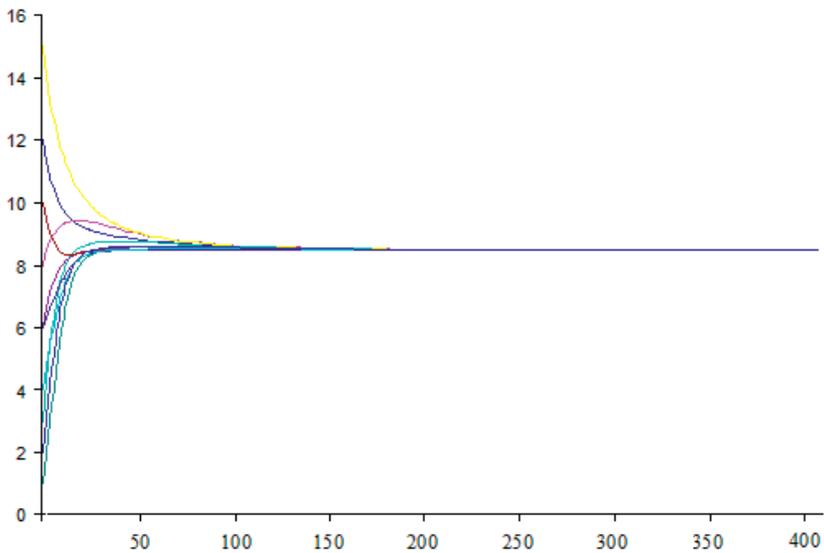


Рис. 5. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с увеличенным значением параметра δ

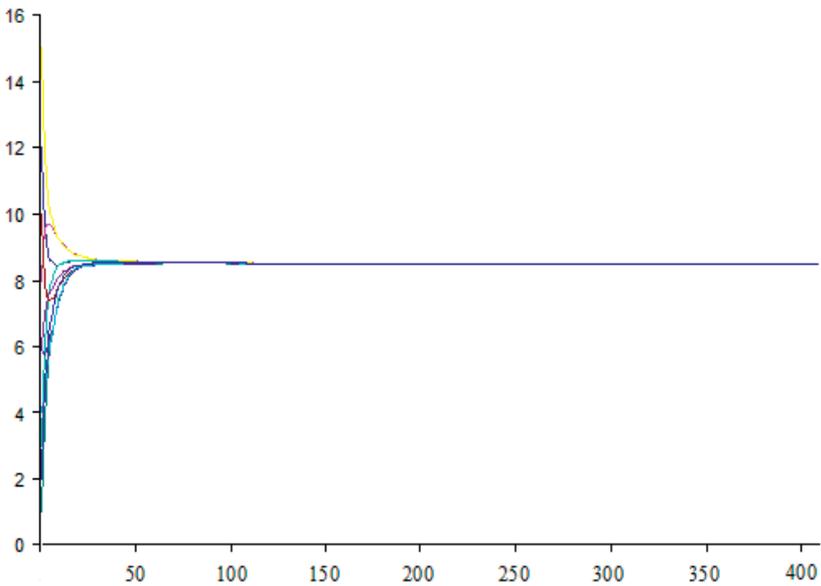


Рис. 6. График решений системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с увеличенным значением параметра α

что решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (12)–(14) являются ограниченными (теорема 2). С помощью численных экспериментов была определена область притяжения стационарного решения (утверждение 1). Из теоремы 2 и утверждения 1 следует, что всякое решение системы дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. Следовательно, других периодических решений, кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ система дифференциальных уравнений (12)–(14) с неотрицательными координатами начального значения не имеет. Это в свою очередь означает, что система (12)–(16) с неотрицательными координатами начального значения кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ не имеет других решений. Таким образом, исходная система (3)–(5) с неотрицательными координатами начального значения имеет единственное решение типа бегущей волны, а именно, стационарное решение $(\dots, \Delta, \Delta, \dots, \Delta, \dots)$. Однако любое решение системы (3)–(4) со временем становится сколь угодно близким к стационарному решению.

Резюмируя выводы, полученные в данном параграфе, отметим, что организация грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в соответствии с описанными ранее технологиями всегда приводит к установлению максимально возможного стационарного грузопотока. Время установления такого режима зависит как от технических возможностей перегонных путей, так и от интенсивности привлечения второй технологии для экстренного освобождения станций.

В заключение отметим, что модели, представленные в параграфах 1.1 и 1.2 строились в предположении, что емкости зон временного хранения грузов не ограничены. В следующем параграфе представлена модификация модели организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций, учитывающая ограниченность указанных емкостей.

1.3. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций в случае ограниченной емкости зон временного хранения грузов

Перейдем к модификации модели, представленной в предыдущем параграфе и описываемой системой (12)–(16) (Хачатрян, 2013). Напомним, что между произвольными промежуточными станциями предполагается наличие зон для временного хранения грузов. Проведем их нумерацию. Зону хранения, расположенную между станциями с номерами i и $i+1$ обозначим номером i . Количество задействованных путей в i -ой зоне хранения в момент времени t обозначим через $y_i(t)$. Предположим, что количество путей во всех зонах хранения одинаково и равно V .

При такой модификации модели изменятся уравнения (12)–(14), описывающие динамику числа задействованных путей на станциях. Кроме того, появятся дополнительные уравнения, описывающие динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов, решения которых должны удовлетворять условию ограниченности емкостей этих зон.

Начнем с пересмотра уравнения (13), записанного в виде разности входного и выходного потоков (стр. 16, аналог исходного варианта уравнения (1)). Первое слагаемое в правой части уравнения (13) описывает взаимодействие i -ой станции с $(i-1)$ -ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, если $z_{i-1} > z_i$, то грузопоток поступает с предыдущей станции, если же $z_{i-1} < z_i$ то грузопоток отправляется в зону временного хранения грузов, расположенную между i -ой и $(i+1)$ -ой станциями (данную зону хранения мы обозначили номером i). С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения, первое слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} & \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i) + \\ & + \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i). \end{aligned} \quad (25)$$

Функция $sign$, участвующая в выражении (25) определяется следующим образом:

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (13) описывает взаимодействие i -ой станции с $(i+1)$ -ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, если $z_i > z_{i+1}$, то грузопоток отправляется на следующую станцию, если же $z_i < z_{i+1}$, то грузопоток поступает с зоны временного хранения грузов, расположенной между $(i-1)$ -ой и i -ой станциями (данную зону временного хранения грузов мы обозначили номером $(i-1)$). С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения грузов, второе слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} & \alpha(z_i - z_{i+1})sign(z_i - z_{i+1}) + \\ & + \alpha(z_i - z_{i+1})sign(z_{i+1} - z_i)sign(y_{i-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (13) представляет собой интенсивность изменения числа задействованных путей на станциях в рамках второй технологии и описывает взаимодействие i -ой станции с соседними зонами временного хранения грузов (с номерами $(i-1)$ и i). Напомним, что в рамках второй технологии, станция с номером i принимает грузопоток с $(i-1)$ -ой зоны временного хранения грузов с интенсивностью $\varphi(z_i)$ если $z_i < \Delta$ и отправляет в i -ую зону временного хранения грузов с интенсивностью $\varphi(z_i)$ если $z_i > \Delta$. С учетом ограниченности емкостей зон временного хранения грузов, третье слагаемое в правой части уравнения (13) примет вид

$$\begin{aligned} & \varphi(z_i)sign(\Delta - z_i)sign(y_{i-1}) + \\ & + \varphi(z_i)sign(z_i - \Delta)sign(V - y_i). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, уравнение (13) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i+1}) - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+1} - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \\ & + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(\Delta - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i), \\ & i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуются и уравнения, описывающие динамику числа задействованных путей на станциях с номерами 1 и n . Необходимо лишь учесть, что для станции с номером 1 предыдущей будет станция с номером n и, соответственно, для станции с номером n последующей будет станция с номером 1. Итак, дифференциальные уравнения (12) и (14) преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & - \alpha(z_1 - z_2) \operatorname{sign}(z_1 - z_2) - \alpha(z_1 - z_2) \operatorname{sign}(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(y_n) + \\ & + \varphi(z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(y_n) + \\ & + \varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_1 - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty); \\ \dot{z}_n = & \alpha(z_{n-1} - z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1} - z_n) + \\ & + \alpha(z_{n-1} - z_n) \operatorname{sign}(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & - \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1) - \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(y_{n-1}) + \\ & + \varphi(z_n) \operatorname{sign}(\Delta - z_n) \operatorname{sign}(y_{n-1}) + \\ & + \varphi(z_n) \operatorname{sign}(z_n - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Теперь необходимо описать закон, по которому меняется число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. В произвольную зону временного хранения грузопоток поступает и с него отправляется как в рамках первой, так и второй технологий. Вспоминая описанные выше обе технологии, несложно убедиться, что динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов будет описываться следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & \alpha(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & -\alpha(z_3 - z_2) \operatorname{sign}(z_3 - z_2) \operatorname{sign}(y_1) \\ & -\varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_1 - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & -\varphi(z_2) \operatorname{sign}(\Delta - z_2) \operatorname{sign}(y_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i = & \alpha(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & -\alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i) - \\ & -\varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & -\varphi(z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n = & \alpha(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & -\alpha(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(y_n) - \\ & -\varphi(z_n) \operatorname{sign}(z_n - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & -\varphi(z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(y_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Линейные слагаемые правых частей этих уравнений описывают динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов в рамках первой технологии, а нелинейные – в рамках второй технологии.

Кроме этого, должны выполняться следующие неравенства

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, +\infty).$$

Эти неравенства накладывает ограничение на число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Окончательно, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1) + \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & -\alpha(z_1 - z_2) \operatorname{sign}(z_1 - z_2) - \alpha(z_1 - z_2) \operatorname{sign}(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(y_n) + \\ & + \varphi(z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(y_n) + \\ & + \varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_1 - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i+1}) - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+1} - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \\ & + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(\Delta - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i), \\ & i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & \alpha(z_{n-1} - z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1} - z_n) + \alpha(z_{n-1} - z_n) \operatorname{sign}(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & - \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1) - \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(y_{n-1}) + \\ & + \varphi(z_n) \operatorname{sign}(\Delta - z_n) \operatorname{sign}(y_{n-1}) + \\ & + \varphi(z_n) \operatorname{sign}(z_n - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_n), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & \alpha(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(z_1 - z_n) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & - \alpha(z_3 - z_2) \operatorname{sign}(z_3 - z_2) \operatorname{sign}(y_1) \\ & - \varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_1 - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_1) - \\ & - \varphi(z_2) \operatorname{sign}(\Delta - z_2) \operatorname{sign}(y_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i = & \alpha(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i) - \\ & - \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \varphi(z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n = & \alpha(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(z_n - z_{n-1}) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & - \alpha(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(y_n) - \\ & - \varphi(z_n) \operatorname{sign}(z_n - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_n) - \\ & - \varphi(z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(y_n), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (33)$$

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, +\infty); \quad (34)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \quad (35)$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty). \quad (36)$$

Система дифференциальных уравнений (28)–(33) имеет три типа стационарных решений. Опишем их.

1. $z_i = \Delta, \quad y_i = c_i, \quad 0 \leq c_i \leq V, \quad i = 1, \dots, n;$
2. $z_i = b, \quad b < \Delta, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n;$
3. $z_i = b, \quad b > \Delta, \quad y_i = V, \quad i = 1, \dots, n.$

Очевидно, что эти решения удовлетворяют также и условиям (34)–(36). Аналитическое исследование других решений системы (28)–(36) (если они существуют) крайне затруднительно, т.к. правые части дифференциальных уравнений (28)–(33) являются разрывными функциями. В связи с этим система (28)–(36) была исследована численно. Приведем результаты численного исследования.

1.3.1. Результаты численной реализации системы (28)–(36)

Вначале были исследованы все решения системы (28)–(34) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (35)–(36)). В численных экспериментах значение n было равным 5, $\Delta = 10$, $V = 20$. Как показывают численные эксперименты при любых неотрицательных координатах начального значения решения системы (28)–(34) сходятся к одному из трех указанных типов стационарных решений. Например, на рис. 7 и рис. 8 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению первого типа.

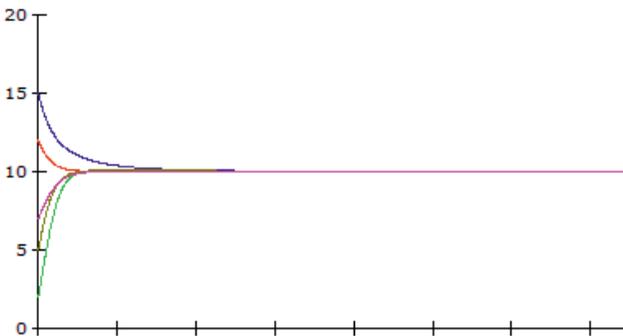


Рис. 7. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению первого типа

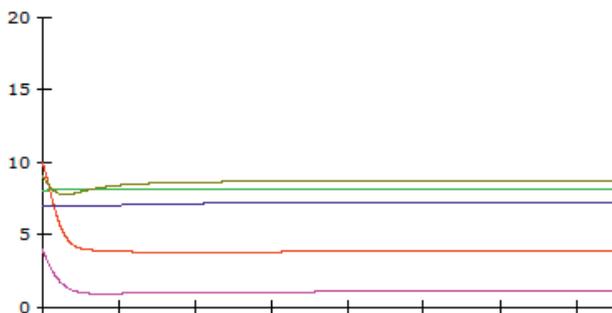


Рис. 8. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению первого типа

На рис. 9 и рис. 10 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению второго типа.

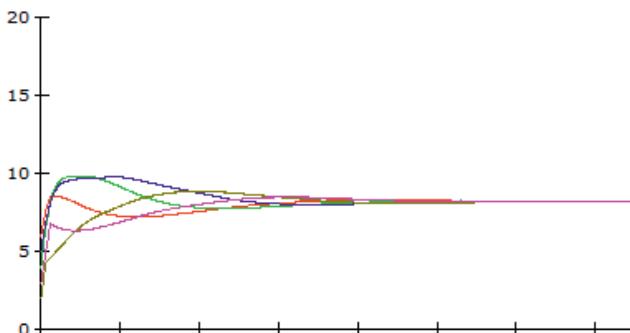


Рис. 9. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению второго типа

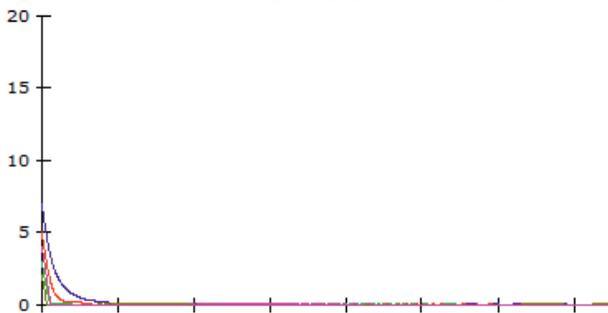


Рис. 10. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению второго типа

На рис. 11 и рис. 12 решения системы (28)–(34) сходятся к стационарному решению третьего типа.

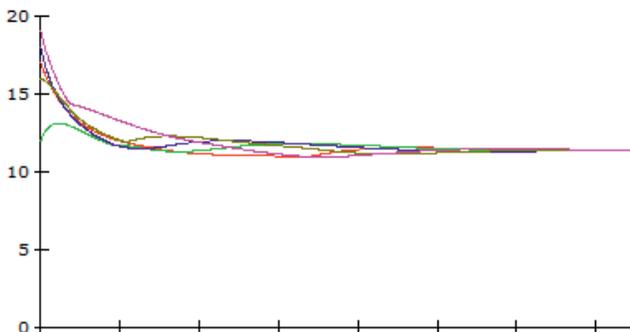


Рис. 11. Динамика чисел задействованных путей на станциях. Сходимость к стационарному решению третьего типа

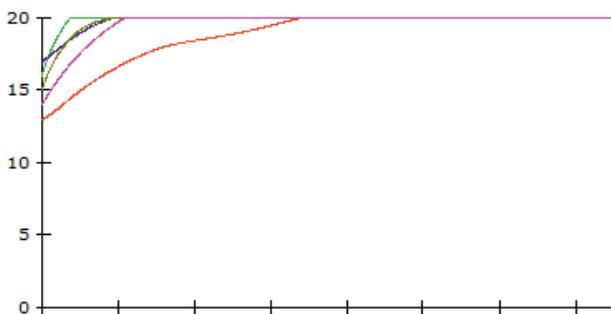


Рис. 12. Динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Сходимость к стационарному решению третьего типа

Т.к. произвольное решение системы (28)–(34) с неотрицательными координатами начального значения сходится к стационарному решению одного из трех типов, то указанная система не имеет других решений, которые удовлетворяют условиям (35)–(36) бегущей волны, кроме стационарных. Таким образом, система (28)–(36) с неотрицательными координатами начального значения имеет только стационарные решения.

1.3.2. Исследование области устойчивости стационарных решений

Стационарные решения системы (28)–(36) исследованы на устойчивость в классе всех решений системы (28)–(34). Здесь следует отметить, что понятие устойчивости применяется только к компонентам стационарного решения, описывающим числа задействованных путей на станциях. Таким образом, стационарное решение системы (28)–(36) называется устойчивым, если компоненты произвольного решения системы (28)–(34), описывающие числа задействованных путей на станциях, т.е. $z_i(\cdot)$, $i=1, \dots, n$, близкие к соответствующим компонентам стационарного решения в начальный момент времени, сколь угодно близко к ним приближаются, начиная с некоторого момента времени. Как показали численные эксперименты, стационарные решения системы (28)–(36) второго и третьего типов являются локально устойчивыми, а первого – глобально устойчивыми. С помощью численных экспериментов определена область притяжения стационарных решений первого типа. В зависимости от взаимного расположения на числовой прямой точек Δ и V получаются три вида областей устойчивости (рис. 13, рис. 14, рис. 15). По оси z откладывается среднее значение числа задействованных путей на станциях, а по оси y – среднее значение числа задействованных путей в зонах временно-го хранения грузов в начальный момент времени.

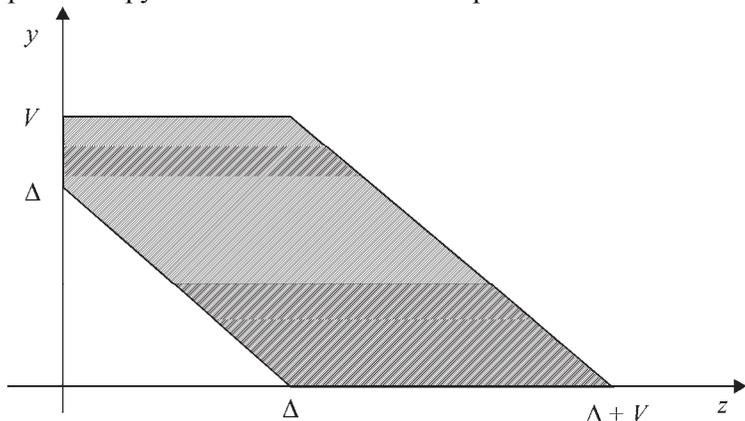


Рис. 13. Первый вид области притяжения ($\Delta < V$)

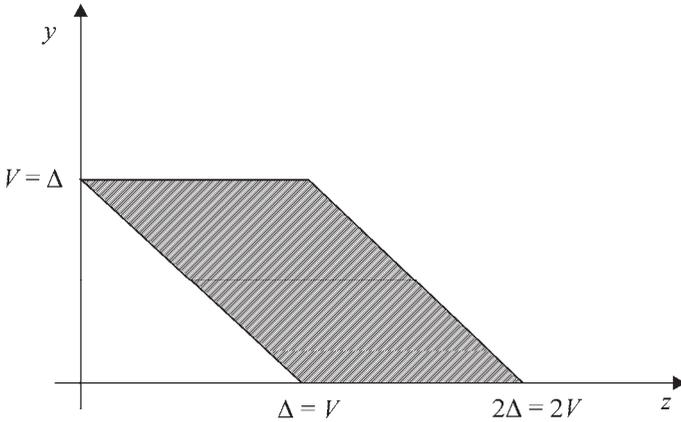


Рис. 14. Второй вид области притяжения ($\Delta = V$)

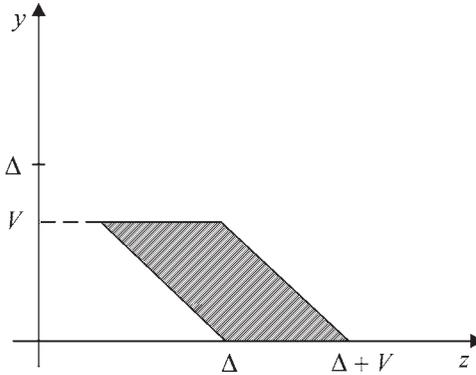


Рис. 15. Третий вид области притяжения ($\Delta > V$)

Вернемся к стационарным режимам. С экономической точки зрения наиболее оптимальным является первый режим. Во-первых, только он является глобально устойчивым. Во-вторых, в этом режиме наиболее эффективно используются возможности станций и при этом можно организовать бесперебойную работу системы грузоперевозок. Из рисунков 13, 14 и 15 следует, что система переходит в стационарный режим первого типа, если сумма средних значений чисел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени не меньше Δ и при этом не превышает значения $\Delta + V$. Если сумма средних значений чи-

сел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени меньше Δ , то система переходит в стационарный режим второго типа. Наконец, если сумма средних значений чисел задействованных путей на станциях и чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов в начальный момент времени больше $\Delta + V$, то система переходит в стационарный режим третьего типа.

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК МЕЖДУ УЗЛОВЫМИ СТАНЦИЯМИ В СЛУЧАЕ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ

В данной главе продолжается построение моделей организации железнодорожных грузоперевозок в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки. Рассматривается еще одна конфигурация железнодорожной сети, а именно, железнодорожная линия между крупными узловыми станциями. При организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации железнодорожной сети одинаково важны как процедура взаимодействия промежуточных станций, так и процедуры, связанные с приемом грузов на начальной узловой станции и отправкой грузов с конечной узловой станцией. Поэтому, построение моделей в данной главе проводится с учетом узловых станций и их влияния на систему грузоперевозок.

2.1. Два способа корректировки системы организаций грузоперевозок

Приступим к построению моделей, описывающих движение грузопотока между двумя узловыми станциями. Железнодорожная линия, соединяющая узловые станции, содержит ряд промежуточных станций. Пусть их число равно m . Обозначив через 0 и $m+1$ номера начальной и конечной узловых станций, получим следующее множество номеров станций $\{0, 1, \dots, m, m+1\}$. Интенсивность потока грузов, поступающих на начальную узловую станцию с железнодорожных направлений, будем описывать с помощью функции $\psi_1(\cdot)$, интенсивность потока грузов распре-

деляющихся с конечной узловой станции – с помощью функции $\psi_2(\cdot)$. Модель задается системой:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \quad (37)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (38)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \quad (39)$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad (40)$$

Функция $\varphi_0(\cdot)$ описывает вторую технологию на начальной узловой станции. На начальной узловой станции вторая технология используется только для разгрузки и, поэтому, она обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ тождественно равна 0, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей. Вспомним, что в моделях, описанных в главе 1 правило приема и правило отправки грузов на произвольной станции зависели от числа задействованных путей на соседних станциях. В данной модели для начальной и конечной узловых станций данное свойство потока не выполняется. Это приводит к тому, что за исключением случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ тождественно равны нулю (не имеющего экономического смысла) система (37)–(40) не имеет решения, т.е. невозможна организация грузопотока в рамках указанных технологий с описанной системой контроля. Это приводит к необходимости корректировки либо технологий грузоперевозок, либо системы контроля.

В первом случае такая корректировка достаточна только на узловых станциях. Она заключается в том, чтобы, управляя интенсивностью приема грузов на начальной узловой станции и интенсивностью отправки грузов с конечной узловой станции, добиться организации грузопотока с указанной системой контроля. Такая организация грузопотока связана с импульсными изменениями числа задействованных путей на станциях. Корректировка системы контроля заключается в ее ослаблении. Как в первом, так и во втором случае формально речь идет о правильном расширении класса решений системы (37)–(40), которые назовем *квазирешениями*.

Рассматриваются два типа квазирешений. Первый тип предполагает эндогенные задания функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, начиная с момента времени, равного характеристике системы контроля, и допускает разрывные решения, второй тип – допускает малые нарушения в системе контроля (условие (40)).

Далее приводится подробное описание указанных корректировок системы организации грузоперевозок.

2.2. Корректировка технологий грузоперевозок

Данный параграф посвящен одному из способов правильного расширения класса решений системы (37)–(40).

Определение 2. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется *квазирешением системы* (37)–(40) первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (37)–(40) с возможными разрывами в точках $k\tau$, $k = 1, 2, \dots$ ■

В работе (Beklaryan, Khachatryan, 2006) подробно описан способ получения таких квазирешений. Приведем содержательные аспекты данного способа, после чего перейдем к ее практической реализации.

С помощью замены времени $t \rightarrow \tau t$ систему (37)–(40) перепишем в виде:

$$\dot{x}_0(t) = \tau \left[\bar{\psi}_1(t) - \alpha x_0 + \alpha x_1 + \varphi_0(x_0) \right], \quad t \in [0, +\infty), \quad (41)$$

$$\dot{x}_i(t) = \tau \left[\alpha x_{i-1} - 2\alpha x_i + \alpha x_{i+1} + \varphi(x_i) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (42)$$

$$\dot{x}_{m+1}(t) = \tau \left[\alpha x_m - \alpha x_{m+1} - \bar{\psi}_2(t) + \varphi(x_{m+1}) \right], \quad t \in [0, +\infty), \quad (43)$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \quad (44)$$

где $x_i(t) = z_i\left(\frac{t}{\tau}\right)$, $\bar{\psi}_1(t) = \psi_1\left(\frac{t}{\tau}\right)$, $\bar{\psi}_2(t) = \psi_2\left(\frac{t}{\tau}\right)$,

$$i = 0, 1, 2, \dots, m, m+1, \quad t \in [0, +\infty).$$

Переформулируем определение 2 для системы (41)–(44).

Определение 3. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется квази-решением системы (41)–(44) первого типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (41)–(44) с возможными разрывами в точках $k = 1, 2, \dots$ ■

На начальном этапе рассматривалось сужение системы (41)–(44) на отрезок $[0, 1]$, т.е. система:

$$\dot{x}_0(t) = \tau [\bar{\psi}_1(t) - \alpha x_0 + \alpha x_1 + \varphi_0(x_0)], \quad t \in [0, 1], \quad (45)$$

$$\dot{x}_i(t) = \tau [\alpha x_{i-1} - 2\alpha x_i + \alpha x_{i+1} + \varphi(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, 1], \quad (46)$$

$$\dot{x}_{m+1}(t) = \tau [\alpha x_m - \alpha x_{m+1} - \bar{\psi}_2(t) + \varphi(x_{m+1})], \quad t \in [0, 1], \quad (47)$$

$$x_i(0) = x_{i+1}(1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (48)$$

Была доказана теорема существования и единственности решения системы (45)–(48). В соответствии с решением $\{\tilde{x}_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ системы (45)–(48) были построены функции $\bar{\psi}_1(\cdot)$, $\bar{\psi}_2(\cdot)$ и $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ на полупрямой $[0, +\infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = \tilde{x}_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m+1, \quad t \in [0, 1]; \\ x_i(t) = x_{i-1}(t-1), \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\ x_0(t) = x_0(t-1) + \frac{\bar{\psi}_1(t-1)}{\alpha} + \frac{\varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi_0(x_0(t-1))}{\alpha}, \\ t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\ \bar{\psi}_1(t) = \frac{1}{\alpha\tau} \dot{\bar{\psi}}_1(t-1) + \frac{1}{\alpha\tau} [\dot{\varphi}_0(x_0(t-1)) - \dot{\varphi}_0(x_0(t-1))] \dot{x}_0(t-1) + \\ + \frac{\dot{x}_0(t-1)}{\tau} + \bar{\psi}_1(t-1) + \varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi_0(x_0(t-1)) - \\ - \varphi_0 \left(x_0(t-1) + \frac{\bar{\psi}_1(t-1)}{\alpha} + \frac{\varphi_0(x_0(t-1)) - \varphi_0(x_0(t-1))}{\alpha} \right), \\ t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \\ \bar{\psi}_2(t) = \alpha x_m(t-1) - \alpha x_{m+1}(t-1), \quad t \in (k, k+1), \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (49)$$

Доказана лемма, согласно которой решение краевой задачи (45)–(48), продолженное на полупрямую $[0, +\infty)$, в силу соотношений (49) является квазирешением системы (37)–(40) первого типа с характеристикой τ .

Режим грузоперевозок, описываемый квазирешениями первого типа, предполагает импульсное изменение числа задействованных путей на станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля. В связи с этим возникает вопрос: можно ли уменьшать разрывы в квазирешениях первого типа, – и как это сделать.

Для этого нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Квазирешение первого типа с характеристикой τ называется ε -квазирешением первого типа с характеристикой τ если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad \forall k = 1, 2, \dots \blacksquare$$

Доказано (Хачатрян, 2004), что существует такое $\bar{\tau} > 0$, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$ существует ε -квазирешение первого типа с характеристикой τ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$, т.е. разрывы в квазирешениях первого типа можно сделать сколь угодно малы. Для этого необходимо импульсно изменить функцию $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени (рис. 16).

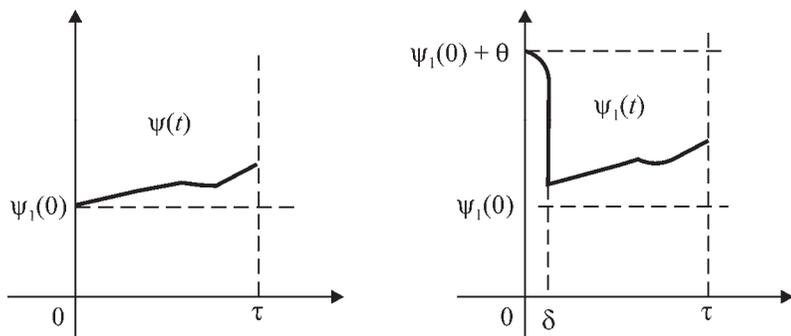


Рис. 16. Импульсное изменение функции $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени

2.2.1. Численная реализация квазирешений первого типа

Перейдем к численной реализации квазирешений первого типа (Khachatryan, Akorov, 2017). Как было отмечено выше, она состоит из двух этапов. На первом этапе находится решение системы, являющейся ограничением этой системы на отрезок $[0,1]$, т.е. решение системы (45)–(48). В численных экспериментах количество станций было равным 10: начальная станция отравления грузов ($i=0$), промежуточные станции ($i=1, 2, \dots, 8$) и конечная станция распределения грузов ($i=9$).

Прежде чем перейти к численному решению данной системы, необходимо определить функции $\varphi(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\bar{\psi}_1(t)$, $\bar{\psi}_2(t)$.

Функция $\varphi(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ задается с помощью параболы $y_1 = -ax^2 + bx$, где $a > 0$, $y_1(\Delta) = 0$, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ – с помощью прямой $y_2 = -c(x - \Delta)$, $c > 0$. Очевидно, что коэффициенты параболы связаны соотношением $b = a\Delta$, т.е. чем больше a , тем больше интенсивность приема грузов по второй технологии.

Функция $\varphi_0(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ тождественна равна 0, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ задается с помощью прямой $y_3 = -c_0(x - \Delta)$, $c_0 > 0$.

Перейдем к выбору функций $\bar{\psi}_1(\cdot)$ и $\bar{\psi}_2(\cdot)$. Напомним, что эти функции определяют соответственно интенсивность подачи грузов на начальную станцию и интенсивность распределения грузов с конечной станции. Очевидно, что интенсивность подачи грузов на начальную станцию должна обладать свойством сезонности. Кроме того, во избежание заторов на станциях период приема грузов на начальную станцию должен сменяться периодом более интенсивной отправки грузов на следующую станцию. Аналогичные рассуждения справедливы и для конечной станции (период распределения грузов с конечной станции должен сме-

няться периодом более интенсивного приема грузов с предыдущей станции). В силу вышесказанного, в качестве $\bar{\psi}_1(\cdot)$ и $\bar{\psi}_2(\cdot)$ используются периодические функции $\bar{\psi}_1(t) = \bar{\psi}_2(t) = \gamma \cos(\omega t)$, причем, амплитуда и период функций являются параметрами модели.

После определения функций $\varphi(\cdot)$, $\bar{\psi}_1(t)$, $\bar{\psi}_2(t)$ приступим к решению краевой задачи (45)–(48). Алгоритм решения следующий.

1. Находим решение системы уравнений (45)–(48) с начальными условиями

$$x_0(0) = \Delta, \quad x_1(0) = \Delta, \quad \dots, \quad x_{m+1}(0) = \Delta.$$

Для найденного решения $\{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{m+1}$ вычисляем следующее выражение:

$$Q = (x_0(0) - x_1(1))^2 + (x_1(0) - x_2(1))^2 + \dots + (x_m(0) - x_{m+1}(1))^2.$$

2. Для заранее заданного малого значения $\varepsilon > 0$ с помощью градиентного метода находим решение системы дифференциальных уравнений (45)–(47) с такими начальными условиями, для которых выполняется условие $Q < \varepsilon$. На каждой итерации градиентного метода решение системы уравнений (45)–(47) находится с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Таким образом, мы получаем решение системы (45)–(48).

На втором этапе решение краевой задачи (45)–(48) продолжается на $(1, +\infty)$ согласно соотношениям (49). В результате мы получаем квазирешения системы (41)–(44), т.е. функции $x_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m+1$, удовлетворяющие этой системе и имеющие разрывы в точках $k = 1, 2, \dots$

Основная цель численной реализации – определить вид и динамику квазирешений системы (41)–(44), а также изучить их зависимость от параметров модели α , a , γ , ω , c_0 , c и τ . Заметим, что все указанные параметры положительны. Результаты численных экспериментов представлены в следующих двух утверждениях.

Утверждение 2. Квазирешения системы (41)–(44) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\Delta_1 - e^{\beta_1 t} \leq x_i(t) \leq \Delta_2 + e^{\beta_2 t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9, \quad (50)$$

где

$$\Delta_1 < \Delta + 1, \quad \Delta_2 > \Delta - 1, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0. \blacksquare$$

Таким образом, согласно утверждению 2, квазирешения системы (41)–(44) как сверху, так и снизу мажорируются экспоненциальными функциями. Например, на рисунке 17 приведен график одного из квазирешений системы (41)–(44).

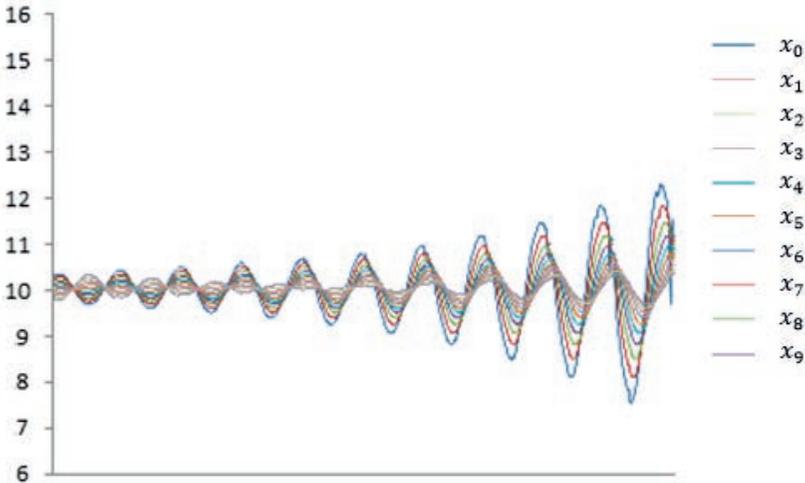


Рис. 17. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа (базовый случай)

Данное квазирешение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1. \quad (51)$$

Для того чтобы увидеть на графиках разрывы функций приведем небольшой фрагмент рисунка 17 (отрезок $[3.5; 5.5]$, разрывы в точках 4 и 5).

Как видно из рисунка 18, наибольший разрыв в указанных точках имеет функция $x_0(\cdot)$. Далее, с увеличением номера координаты квазирешения разрывы уменьшаются. Данная тенденция

преимущественно сохраняется и в последующих целочисленных точках. Для сравнения на рисунке 19 приведены гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ (гистограммы остальных функций не приведены, чтобы не загромождать рисунок).

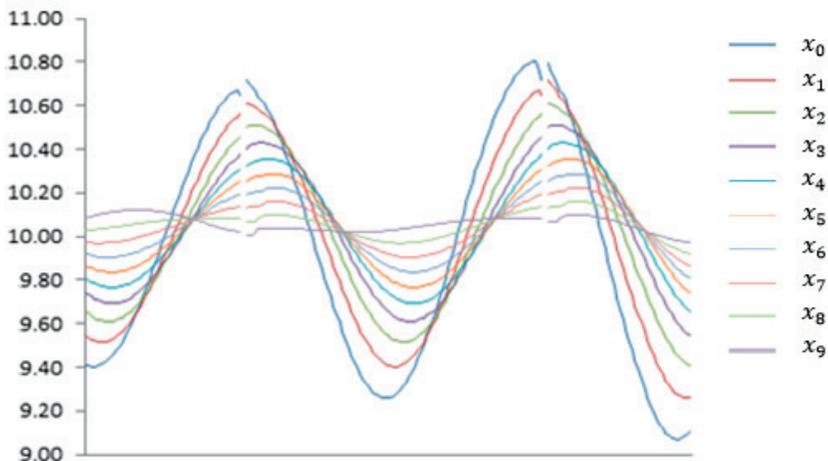


Рис. 18. Фрагмент графика квазирешения системы (41)–(44) первого типа (базовый случай)

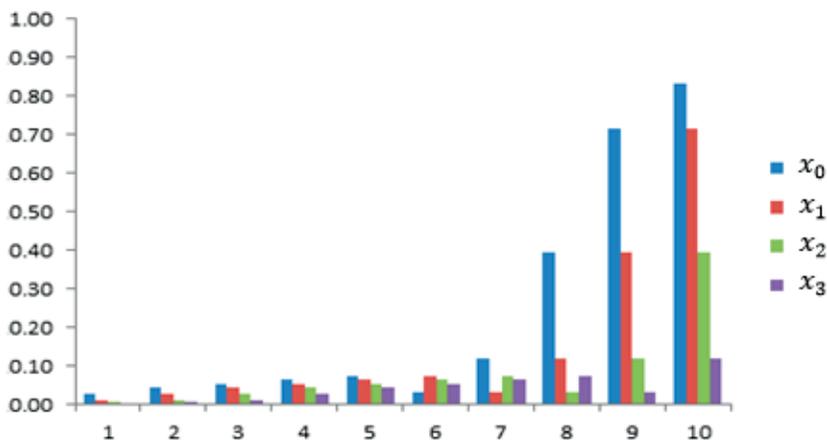


Рис. 19. Гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ (базовый случай)

Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.75 - e^{0.09t} \leq x_i(t) \leq 9.25 + e^{0.08t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Параметры β_1 , β_2 функций, мажорирующих квазирешения системы (41)–(44), зависят от параметров указанной системы, поэтому, обозначим их

$$\beta_1 = \beta_1(\alpha, a, \gamma, \omega, c_0, c, \tau), \quad \beta_2 = \beta_2(\alpha, a, \gamma, \omega, c_0, c, \tau).$$

В результате многочисленных экспериментов было выявлено, что функция $\beta_1(\cdot)$ монотонна по всем параметрам, за исключением параметра c , относительно которого она неизменна. Функция $\beta_2(\cdot)$ также монотонна по всем параметрам за исключением параметра a , относительно которого она неизменна. В следующем утверждении приведем более детальную формулировку этого результата.

Утверждение 3. *Функции $\beta_1(\cdot)$ и $\beta_2(\cdot)$ обладают следующими свойствами:*

- 1) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \alpha} < 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \alpha} < 0$; 2) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial a} > 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial a} = 0$;
- 3) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \gamma} > 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \gamma} > 0$; 4) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \omega} > 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \omega} > 0$;
- 5) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial c_0} > 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial c_0} < 0$; 6) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial c} = 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial c} > 0$,
- 7) $\frac{\partial \beta_1(\cdot)}{\partial \tau} < 0$, $\frac{\partial \beta_2(\cdot)}{\partial \tau} < 0$. ■

Ниже приведем графики квазирешений системы (41)–(44), в которых поочередно значение одного из параметров отличается от значения, приведенного в (51) при неизменных значениях других параметров. При этом значение Δ также неизменно и равно 10. Кроме того, для указанных квазирешений получим оценку (50).

На рисунке 20 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 85, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

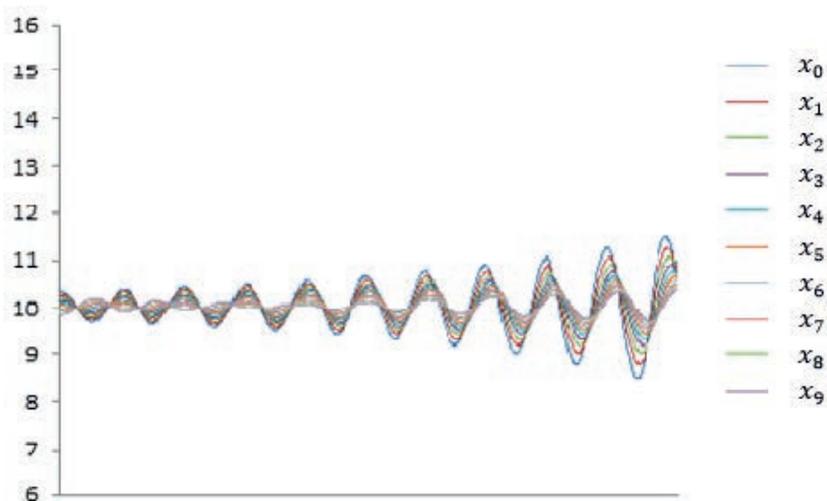


Рис. 20. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра α

Заметим, что по сравнению с (51), увеличено значение α . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.86 - e^{0.07t} \leq x_i(t) \leq 9.29 + e^{0.06t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рисунке 21 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.4, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

По сравнению с (51) увеличено значение a . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.88 - e^{0.12t} \leq x_i(t) \leq 9.39 + e^{0.08t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

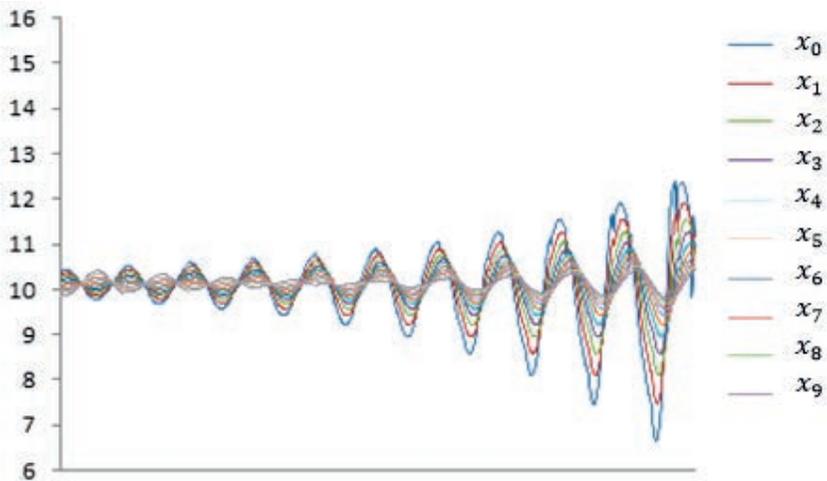


Рис. 21. График квазирезонанса системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра a

На рисунке 22 приведен график квазирезонанса системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 10, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

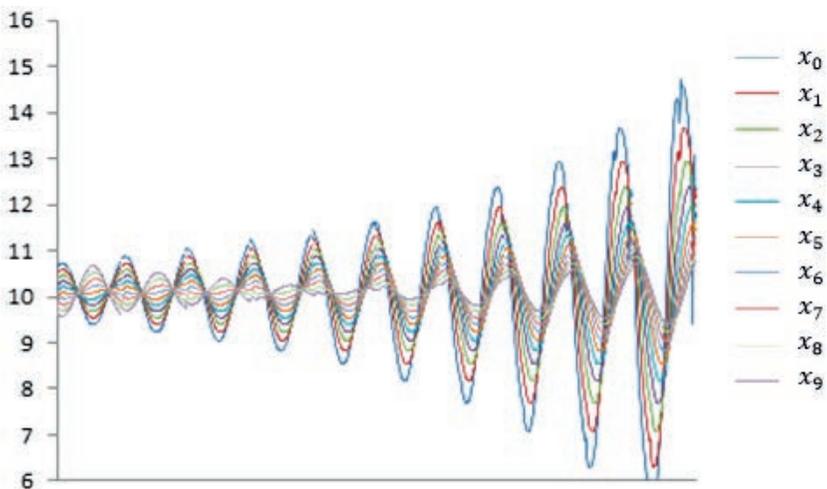


Рис. 22. График квазирезонанса системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра γ

По сравнению с (51), увеличено значение γ . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.61 - e^{0.15t} \leq x_i(t) \leq 9.63 + e^{0.13t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рисунке 23 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 4\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

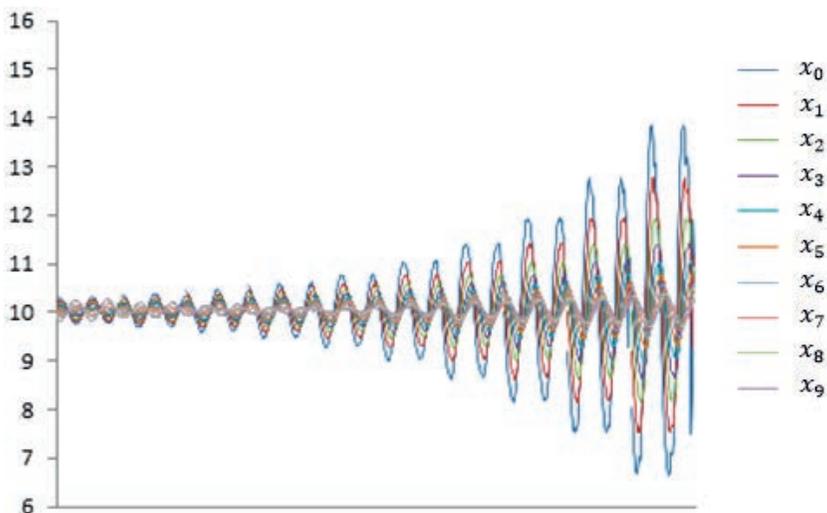


Рис. 23. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра ω

По сравнению с (51) увеличено значение ω . Для указанных значений параметров неравенство (50) имеет следующий вид:

$$10.86 - e^{0.12t} \leq x_i(t) \leq 9.2 + e^{0.1t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

На рисунке 24 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 2, \quad c = 0.1, \quad \tau = 1.$$

По сравнению с (51) увеличено значение c_0 . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.92 - e^{0.11t} \leq x_i(t) \leq 9.26 + e^{0.07t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

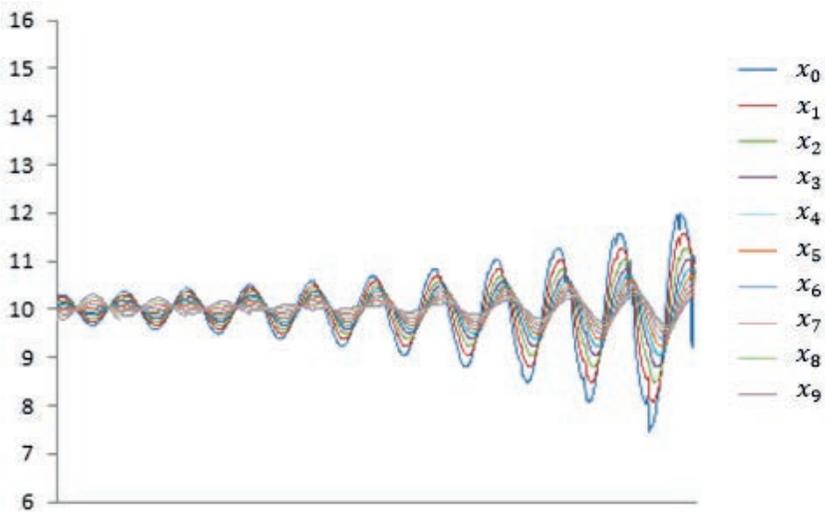


Рис. 24. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра c_0

На рисунке 25 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad a = 0.1, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 2, \quad \tau = 1.$$

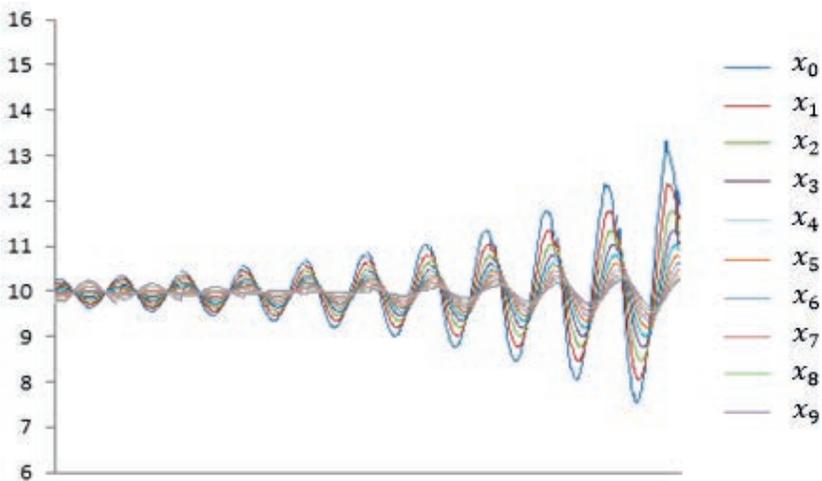


Рис. 25. График квазирешения системы (41)–(44) первого типа с увеличенным значением параметра c

По сравнению с (51) увеличено значение c . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.72 - e^{0.09t} \leq x_i(t) \leq 9.2 + e^{0.1t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

Наконец, на рисунке 26 приведен график квазирешения системы (41)–(44) со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 60, \quad \gamma = 5, \quad \omega = 2\pi, \quad a = 0.1, \quad c_0 = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \tau = 4.$$

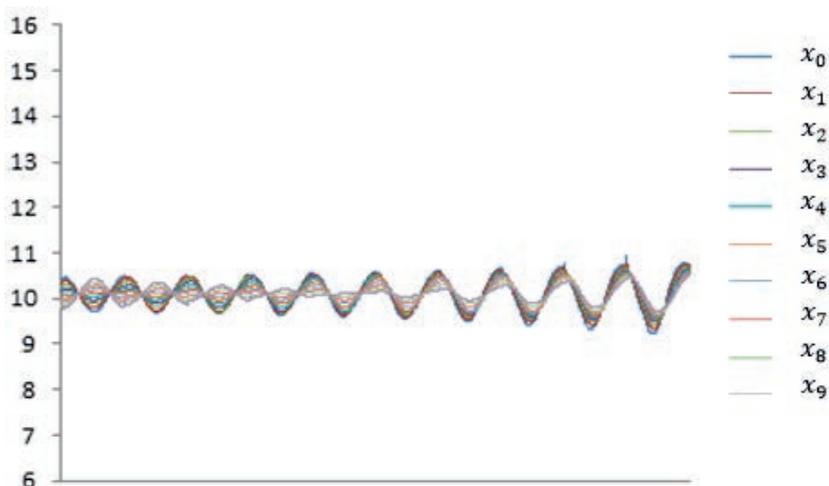


Рис. 26. График квазирешения системы дифференциальных уравнений с увеличенным значением параметра τ

По сравнению с (51) увеличено значение τ . Для указанных значений параметров неравенство (50) принимает следующий вид:

$$10.79 - e^{0.04t} \leq x_i(t) \leq 9.42 + e^{0.03t}, \quad i = 0, 1, \dots, 9.$$

В заключение перейдем к анализу результатов, следующих из приведенных утверждений и имеющих практическое значение. Из утверждения 3 следует, что рост квазирешений системы (41)–(44) уменьшается с увеличением параметров α и τ , а также с уменьшением параметров γ и ω . Численные эксперименты показали, что аналогичным образом ведут себе и разрывы квазирешений системы (41)–(44), т.е. они уменьшаются с увеличением параметров α и τ и уменьшением параметров γ и ω . Например,

для сравнения с рисунком 19 приведем гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$, являющихся компонентами квазирешений системы (41)–(44) с увеличенным значением параметра α (с 60 до 85) и при неизменных значениях других параметров.

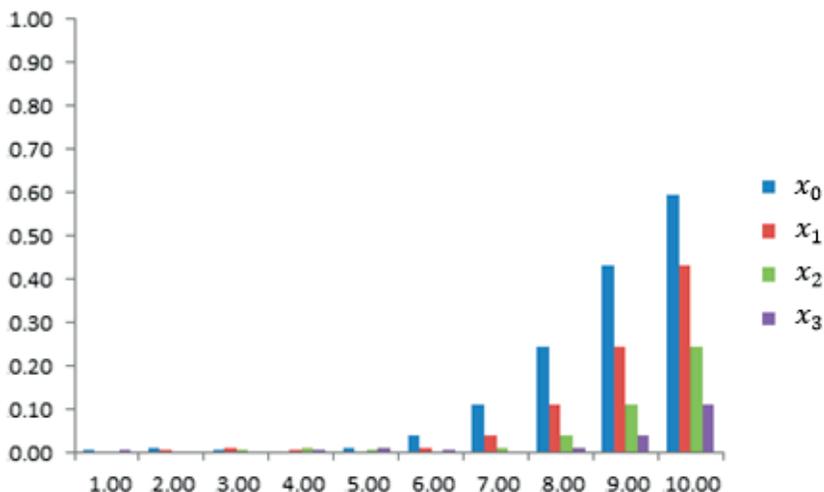


Рис. 27. Гистограммы разрывов функций $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ с увеличенным значением параметра α

Напомним, что параметры γ и ω являются характеристиками интенсивности подачи грузов на начальную станцию и не могут управляться организатором грузоперевозок, в отличие от параметров α и τ . Таким образом, организатор грузоперевозок может добиться уменьшения загрузки станций, увеличивая интенсивность движения грузопотока (параметр α) и характеристику системы контроля (параметр τ). Однако здесь следует иметь в виду, что для больших значений τ система контроля теряет свою актуальность. Итак, выбор параметра α зависит исключительно от технических возможностей инфраструктуры грузоперевозок, а выбор параметра τ должен достигаться за счет компромисса между техническими возможностями инфраструктуры грузоперевозок и актуальностью системы контроля.

2.3. Корректировка системы контроля

Далее рассмотрим другой возможный способ расширения класса решений типа бегущих волн (решений системы (37)–(40)) до класса решений типа «квазибегущих» волн, а именно – ослабление нелокальных ограничений (40) (допущение выполнения этих ограничений с некоторой погрешностью). Отметим, что выполнение нелокальных ограничений (40) обеспечивает вывод грузов из зон временного хранения. Следовательно, их ослабление может привести к накоплению грузов в зонах временного хранения. Поэтому, в данном случае помимо исследования динамики числа задействованных путей на станциях, необходимо также исследовать динамику числа задействованных путей и в зонах временного хранения грузов. Начнем с исследования динамики числа задействованных путей на станциях.

2.3.1. Исследование динамики числа задействованных путей на станциях

Приведем точное определение квазирешений второго типа.

Определение 5. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется ε -квазирешением системы (37)–(40) второго типа с характеристикой τ , если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (37)–(39) и выполняется условие

$$|z_i(t) - z_{i+1}(t + \tau)| < \varepsilon, \quad i = 0, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad \blacksquare \quad (52)$$

Прежде чем перейти к исследованию квазирешений системы (37)–(40) второго типа, изучим множество всех решений системы уравнений (37)–(39). Очевидно, что при любых начальных условиях данная система имеет единственное решение. При определенном выборе функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ решения системы уравнений (37)–(39) являются ограниченными.

Теорема 3. Пусть функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ ограничены на полупрямой $[0, +\infty)$. Тогда решения системы дифференциальных уравнений (37)–(39) являются ограниченными.

Доказательство в приложении 3. ■

Для более детального исследования решений система (37)–(39) была реализована численно с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка (Khachatryan, Akorov, Belousov, 2018). Перед тем как перейти к описанию численного решения данной системы, необходимо определить функции $\varphi(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

Функция $\varphi(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ задается с помощью параболы $y_1 = -ax^2 + bx$, где $a > 0$, $y_1(\Delta) = 0$, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ – с помощью прямой $y_2 = -c(x - \Delta)$, $c > 0$. Функция $\varphi_0(\cdot)$ на отрезке $[0, \Delta]$ тождественна равна 0, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ задается с помощью прямой $y_3 = -c_0(x - \Delta)$, $c_0 > 0$.

В качестве $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ будем использовать два класса функций:

- а) постоянная функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$;
- б) периодическая функция $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma$.

2.3.2. Квазирешения системы (37)–(40) второго типа с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (37)–(39), в которой $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$, $d > 0$. Это означает, что на начальную узловую станцию грузопоток осуществляется с постоянной интенсивностью d и с такой же интенсивностью распределяется с конечной узловой станции. Будем исследовать зависимость решений системы (37)–(39) от параметров модели α , a , c_0 , c , d . Отметим, что все указанные параметры являются положительными. Согласно результатам численных экспериментов, начиная

с некоторого момента времени, решения системы (37)–(39) выходят на постоянные значения для всех значений параметров α , a , c_0 , c , d этой системы, т.е. существует $\bar{t} > 0$, такое, что выполняются условия:

$$z_0(t) = d_0, z_1(t) = d_1, \dots, z_m(t) = d_m, z_{m+1}(t) = d_{m+1}, t \in [\bar{t}, +\infty),$$

причем числа d_i , $i = 0, 1, \dots, m, m+1$ удовлетворяют условию:

$$d_0 > d_1 > \dots > d_m > d_{m+1}.$$

Например, на рисунке 28 приведено одно из решений системы (37)–(39).

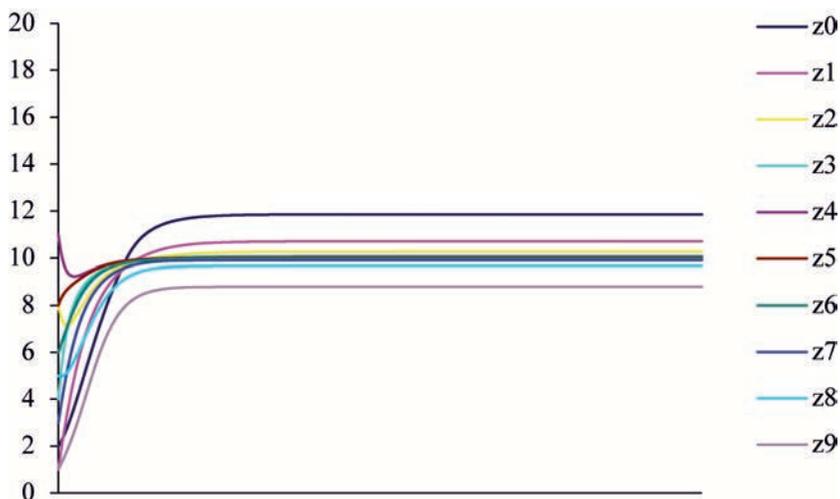


Рис. 28. График решения системы (37)–(39) с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$.

Обозначим $\bar{d}_i = d_i - \Delta$, $i = 0, 1, \dots, m, m+1$. Таким образом, числа \bar{d}_i определяют отклонение решений от значения Δ , определяющего оптимальную загруженность станций. На рисунке 29 приведем гистограмму чисел \bar{d}_i , полученных по решениям системы (37)–(39), график которых изображен на рисунке 28.

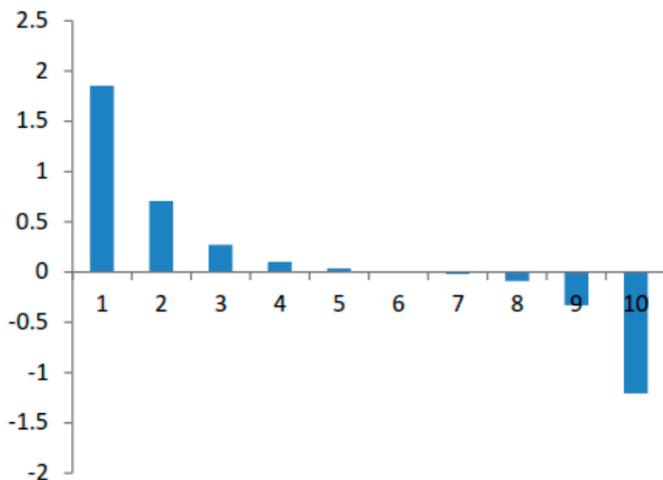


Рис. 29. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ (базовый случай)

Как видно из рисунка 29, наибольшие отклонения от значения Δ имеют первая и последняя компоненты решения системы (37)–(39). По мере приближения к центральным компонентам решения, указанные отклонения уменьшаются, причем присутствуют как положительные, так и отрицательные отклонения. Приведем содержательную интерпретацию гистограммы 29. Для этого отметим, что если число задействованных узлов на станции равно Δ , то это означает, что на данной станции полностью используется тот объем инфраструктурных возможностей, который позволяет организовать бесперебойный грузопоток. Положительное отклонение от значения Δ указывает на то, что станция подключает дополнительные мощности и при этом возможны перебои в организации грузоперевозок, а отрицательное – о возможности дополнительной загрузки. Таким образом, центральные станции оптимально используют инфраструктурные возможности. Начальная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, наиболее загружены, а конечная узловая станция и станции, расположенные рядом с ней, не в полном объеме используют инфраструктурные возможности.

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Начнем с параметра α . Напомним, что он определяет нормативные правила взаимодействия соседних станций. Будем увеличивать значение параметра α при неизменных значениях других параметров. Согласно результатам экспериментов, имеет место следующая закономерность: абсолютная величина максимального отклонения решения системы (37)–(39) от значения Δ , т.е. $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ уменьшается с увеличением параметра α . Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 30. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра α , равных 2, 5, 10 и 100 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Следовательно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется значения параметра $\bar{\alpha}$ такое, что при всех $\alpha \geq \bar{\alpha}$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство

$$\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i| \leq \varepsilon. \quad (53)$$

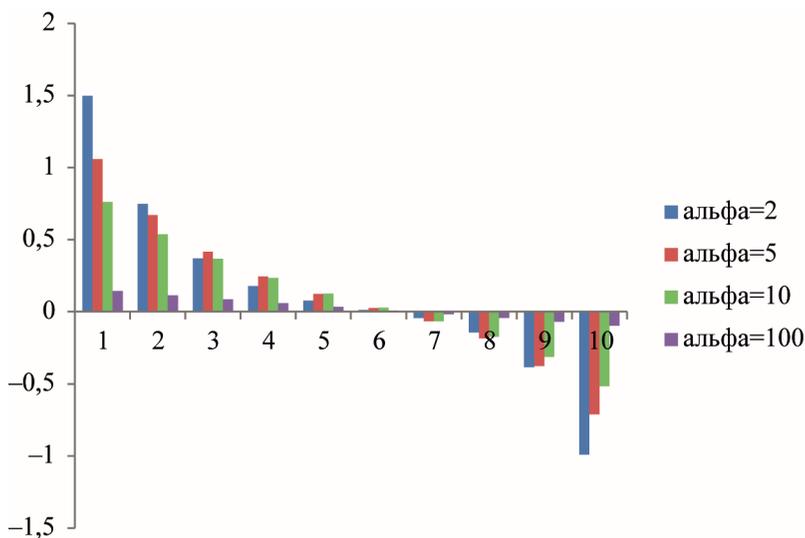


Рис. 30. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра α

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра a , который определяет интенсивность приема грузов с помощью второй технологии, задающей правило взаимодействия станции с соседними зонами временного хранения грузов. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это означает увеличение интенсивности приема грузов по второй технологии. Как показывают эксперименты, это приводит к уменьшению абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i . При этом положительные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 31. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра a , равных 0.4, 0.7, 2 и 4 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Отметим, что, при таких значениях параметра a и $\Delta = 10$ ордината вершины параболы принимает, соответственно, значения: 10, 17.5, 50 и 100.

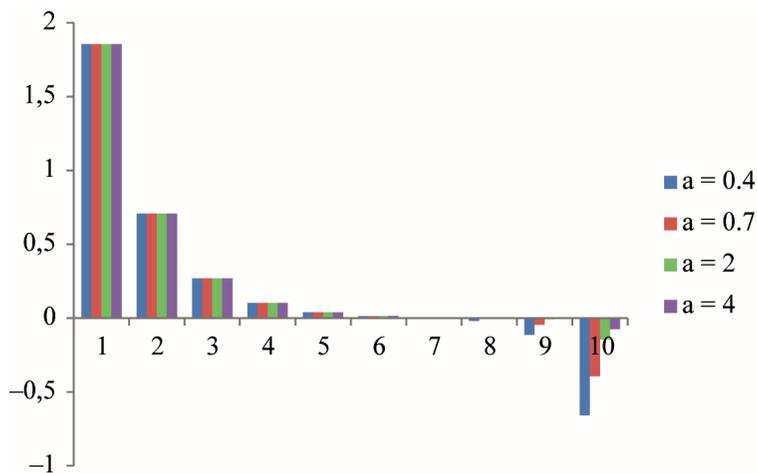


Рис. 31. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра a

Заметим, что параметр a присутствует во всех уравнения системы (37)–(39), кроме первого. Следовательно, увеличивая

параметр a , мы увеличиваем интенсивность приема грузов по второй технологии на всех станциях, за исключением начальной. Оказывается, что такого же эффекта, а именно уменьшения абсолютных величин отрицательных отклонений \bar{d}_i , можно достичь, меняя параметр a только в последнем уравнении системы (37)–(39), т.е. увеличивая интенсивность приема грузов по второй технологии только на конечной узловой станции.

Перейдем к исследованию отклонений \bar{d}_i от параметра c_0 , определяющего интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции в зону временного хранения грузов. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Напомним, что это приводит к увеличению интенсивности отправки грузов с начальной узловой станции в зону временного хранения грузов. Как показывают эксперименты, это приводит к уменьшению положительных отклонений \bar{d}_i . При этом отрицательные отклонения \bar{d}_i не меняются. Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 32.

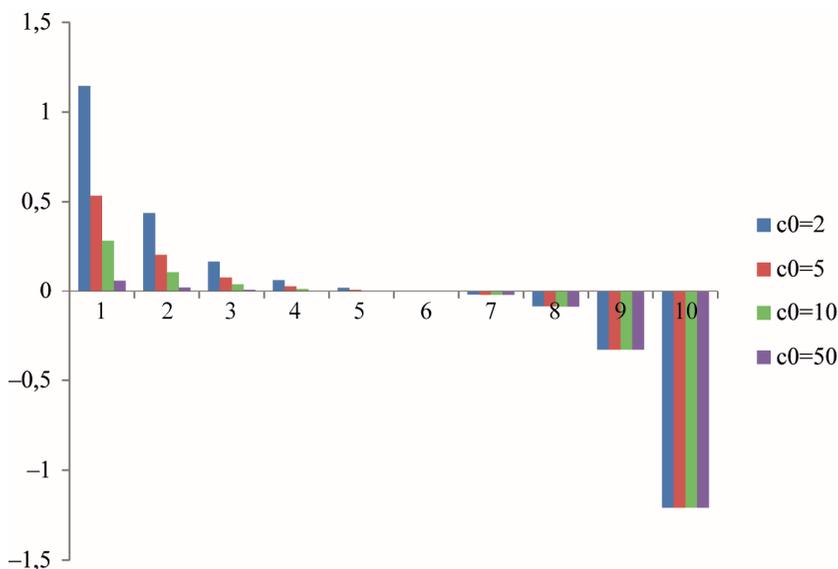


Рис. 32. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра c_0

На рисунке представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра c_0 , равных 2, 5, 10 и 50 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c = 1$, $d = 3$.

Таким образом, увеличение параметра a в последнем уравнении системы (37)–(39) и параметра c_0 приводит к уменьшению абсолютной величины максимального отклонения решения системы (37)–(39) $\max_{i=0,1,\dots,m,m+1} |\bar{d}_i|$ от значения Δ . Это в свою очередь означает, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдутся значения параметров \bar{a} и \bar{c}_0 , такие, что при всех $a > \bar{a}$, $c_0 > \bar{c}_0$ (и при неизменных значениях других параметров) будет выполняться неравенство (53).

Наконец, перейдем к исследованию отклонений d_i от параметра d , представляющего собой интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений d_i . Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 33. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра d , равных 1, 2, 4 и 6 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$.

Следует отметить, что при уменьшении параметра d абсолютные значения отклонений d_i уменьшаются вплоть до нуля для $d = 0$. В этом случае решение системы (37)–(39) сходится к стационарному решению

$$z_0(t) = z_1(t) = \dots = z_m(t) = z_{m+1}(t) \equiv \Delta.$$

Эта ситуация показана на рисунке 34.

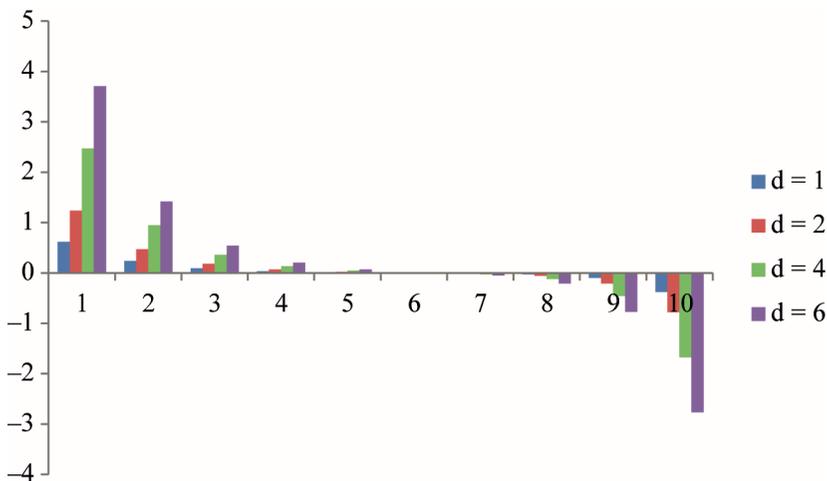


Рис. 33. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра d



Рис. 34. График решения системы (37)–(39) при $d = 0$

Приступим к анализу результатов, полученных выше с помощью численных экспериментов. Согласно их результатам для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, управляя параметрами α , a , c_0 , можно достичь выполнимости неравенства (53). Основной целью проведенного в данном параграфе исследования является получение ε -квазирешений второго типа с характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40), т.е. организация контролируемого грузопотока с помощью определенных выше технологий. Несложно заметить, что решения системы (37)–(39), удовлетворяющие условию (53)

являются ε -квазирешениями второго типа с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40).

Итак, мы выявили два способа получения ε -квазирешений с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40). Первый способ связан с увеличением параметра α , а второй – с увеличением параметров a и c_0 , причем параметр a достаточно увеличить только в последнем уравнении системы (37)–(39). Очевидно, что эти два способа можно также комбинировать между собой. С практической точки зрения первый способ связан с улучшением инфраструктуры на всех станциях, а второй – с улучшением инфраструктуры только на узловых станциях, вследствие чего последний является более простым в применении.

2.3.3. Квазирешения системы (37)–(40) второго типа с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (37)–(39), в которой функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией, являются периодическими, т.е.

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t), \quad d \geq \gamma.$$

Согласно результатам численных экспериментов, начиная с некоторого момента времени $\bar{t} > 0$, решения системы (37)–(39) начинают колебаться в некоторой окрестности значения Δ , причем компоненты решения удовлетворяют условию

$$z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t)$$

для любого $t \in [\bar{t}, +\infty)$.

Более того, существует натуральное число $0 < \bar{m} < m + 1$ такое, что

$$z_i(t) > \Delta \quad \text{для } 0 \leq i \leq \bar{m}, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (54)$$

$$z_i(t) < \Delta \quad \text{для } \bar{m} < i \leq m + 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (55)$$

Например, на рисунке 35 приведено одно из решений системы (37)–(39).

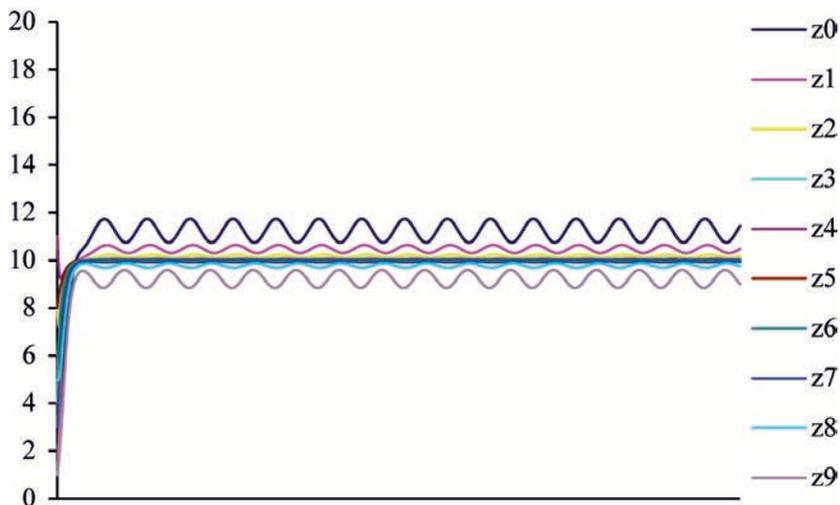


Рис. 35. График решения системы (37)–(39) с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

Данное решение получено при $\Delta = 10$ и следующих значениях параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 2$, $\gamma = 1$, $\omega = 1$.

Обозначим

$$\bar{d}_i = \begin{cases} \max_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } 0 \leq i \leq \bar{m} \\ \min_{t \in [\bar{t}, +\infty)} (z_i(t) - \Delta), & \text{если } \bar{m} < i \leq m + 1. \end{cases}$$

Таким образом, число \bar{d}_i определяет максимальное отклонение i -й компоненты решения системы (37)–(39) от значения Δ , задающего оптимальную загрузку станций. Очевидно, что числа \bar{d}_i удовлетворяют условию

$$\bar{d}_0 > \bar{d}_1 > \dots > \bar{d}_m > \bar{d}_{m+1};$$

$$\bar{d}_i > 0, \quad 0 \leq i \leq \bar{m}; \quad \bar{d}_i < 0, \quad \bar{m} < i \leq m + 1.$$

Исследуем зависимость \bar{d}_i от параметров модели. Численные эксперименты показали, что зависимость \bar{d}_i от параметров α , a , c_0 , d такая же, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. В частности, с помощью соответствующего выбора параметров α , a , c_0 можно абсолютные значения отклонений d_i сделать сколь угодно малыми. Таким образом, как и в случае постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, управляя этими параметрами, определяющими инфраструктурные возможности станций, можно организовать контролируемый грузопоток.

Остается исследовать зависимость \bar{d}_i от параметров γ и ω . В отличие от параметров α , a , c_0 управление только этими параметрами не позволяет сделать сколь угодно малыми абсолютные значения отклонений \bar{d}_i и, соответственно, организовать контролируемый грузопоток. Тем не менее, исследуем зависимость \bar{d}_i от γ и ω .

Начнем с параметра γ . Заметим, что данный параметр определяет амплитуду колебаний. Будем увеличивать значение данного параметра при неизменных значениях других параметров. Как показывают эксперименты, это приводит к увеличению абсолютных значений отклонений \bar{d}_i , т.е. зависимость \bar{d}_i от γ такая же, как и от d . Данную тенденцию можно увидеть на рисунке 36. На нем представлена гистограмма отклонений \bar{d}_i при значениях параметра γ , равных 1, 2, 3 и 4 и следующих фиксированных значениях остальных параметров: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $d = 5$, $\omega = 1$.

Перейдем к исследованию зависимости \bar{d}_i от параметра ω . Так как период функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ равен $2\pi/\omega$, то увеличение параметра ω приводит к уменьшению периода функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. Как показывают эксперименты, зависимость $|\bar{d}_i|$ от ω представляет собой невозрастающую функцию, принимающую

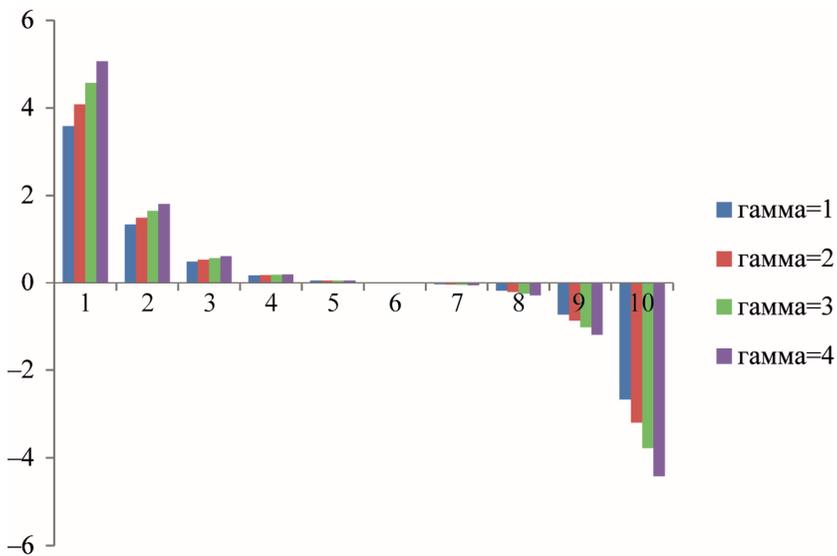


Рис. 36. Гистограмма отклонений решений системы (37)–(39) от значения Δ при изменении параметра γ

значения в некотором интервале, границы которого зависят, как от индекса i , так и от остальных параметров модели. На рисунке 37 представлен широкий диапазон изменения параметра ω – от 0.001 до 400. При этом остальные параметры фиксированы и принимают следующие значения: $\alpha = 1$, $a = 0.2$, $c_0 = c = 1$, $\gamma = 1$, $d = 2$. Как видно из данного рисунка, например, значения \bar{d}_o меняются в интервале, лежащем в отрезке $[1, 2]$. Следует отметить, что при значениях ω близких к нулю функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ близки к константам, поэтому левую границу указанных интервалов можно определить с помощью постоянных функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$.

Проанализируем результаты, полученные в случае, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, описывающие, соответственно, интенсивность подачи груза на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией, являются периодическими. Как оказалось, эти результаты

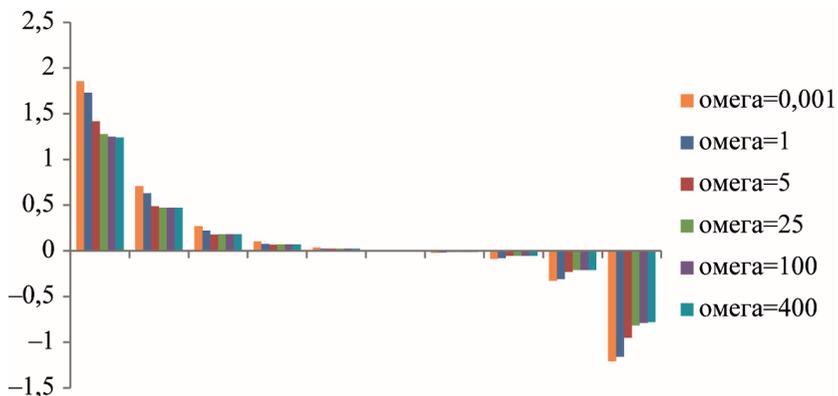


Рис. 37. Гистограмма отклонений решений системы (1)–(3) от значения Δ при изменении параметра ω

качественно не отличаются от результатов, полученных для случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ являются константами. Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно получить ε -квазирешения второго типа с произвольной характеристикой $\tau > 0$ для системы (37)–(40), т.е. организовать контролируемый грузопоток с помощью описанных технологий. Для этого необходимо управлять параметрами α , a , c_0 , которые являются характеристиками используемых технологий. Суть этого управления сводится к улучшению инфраструктуры станций.

2.3.4. Исследование динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов

Перейдем к исследованию динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов (Хачатрян, Бекларян, Борисова, 2019). Начнем с их нумерации. Зону временного хранения грузов, расположенную между станциями с номерами i и $i+1$ обозначим номером i . Таким образом, мы получим следующее множество номеров зон временного хранения грузов: $\{0, 1, \dots, m\}$. Количество задействованных путей в i -ой зоне временного хранения грузов в момент времени t обозначим че-

рез $y_i(t)$. Определим с какой интенсивностью грузы поступают в зоны временного хранения и с какой интенсивностью отправляются из них. Вспомним, что в зоны временного хранения грузы могут поступать и отправляться из них как в рамках первой технологии, так и рамках второй технологии.

В рамках первой технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m-1$ груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$ если $z_i > z_{i-1}$ и отправляется на станцию с номером $i+1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})$ если $z_{i+2} > z_{i+1}$. В начальную зону временного хранения ($i=0$) в рамках первой технологии груз не поступает. Наконец, в конечную зону временного хранения ($i=m$) в рамках этой же технологии груз поступает со станции с номером $i=m$ с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m-1})$ если $z_m > z_{m-1}$. С конечной зоны временного хранения в рамках данной технологии груз не отправляется.

В рамках второй технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m-1$ груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $-\varphi(z_i)$ если число задействованных путей на станции с номером i превышает значение Δ и отправляется на станцию с номером $i+1$ с интенсивностью $\varphi(z_{i+1})$ если число задействованных путей на станции с номером $i+1$ меньше значения Δ (станция с номером $i+1$ принимает груз с зоны временного хранения). В начальную зону временного хранения ($i=0$) в рамках второй технологии груз поступает с начальной узловой станции с интенсивностью $-\varphi_0(z_0)$, если число задействованных путей на указанной станции превышает Δ и отправляется на станцию с номером $i=1$ с интенсивностью $\varphi(z_1)$, если число задействованных путей на станции с номером $i=1$ меньше Δ . Наконец, в конечную зону временного хранения $i=m$ в рамках второй технологии груз поступает с интенсивностью $-\varphi(z_m)$ со станции с номером $i=m$ и отправляется на конечную узловую станцию ($i=m+1$) с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если число задействованных путей на конечной узловой станции меньше Δ .

Таким образом, динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) = & -\alpha(z_2 - z_1) \operatorname{sign}(z_2 - z_1) - \varphi(z_0) \operatorname{sign}(z_0 - \Delta) - \\ & - \varphi(z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & \alpha(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) - \\ & - \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) - \varphi(z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{i+1}), \\ & i = 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & \alpha(z_m - z_{m-1}) \operatorname{sign}(z_m - z_{m-1}) - \varphi(z_m) \operatorname{sign}(z_m - \Delta) - \\ & - \varphi(z_{m+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (58)$$

где $\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Исследуем систему (56)–(58) в предположении, что в правых частях уравнений участвуют компоненты квазирешений второго типа.

Используя неравенства (54)–(55) и определения функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, преобразуем уравнения (56)–(58). В частности, из неравенств (54)–(55) следует, что, начиная с момента времени \bar{t} , в правой части уравнений (56)–(58) все слагаемые вида $\alpha(z_{k+1} - z_k) \operatorname{sign}(z_{k+1} - z_k)$ будут равны 0. В зависимости от значения \bar{m} рассмотрим несколько случаев.

1-ый случай: $\bar{m} = 0$

Это означает, что

$$z_0(t) > \Delta, \quad z_i(t) < \Delta, \quad i = 1, \dots, m+1$$

для всех $t \geq \bar{t}$, а уравнения (56)–(58) принимают вид

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta) - az_1(\Delta - z_1), \quad z_0 > \Delta, \quad z_1 < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty) \quad (59)$$

$$\dot{y}_i(t) = -az_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \quad z_{i+1} < \Delta, \quad i = 1 \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (60)$$

2-ой случай: $1 \leq \bar{m} < m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (61)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, \bar{m} - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (62)$$

$$\dot{y}_{\bar{m}}(t) = c(z_{\bar{m}} - \Delta) - az_{\bar{m}+1}(\Delta - z_{\bar{m}+1}), \quad z_{\bar{m}} > \Delta, \quad z_{\bar{m}+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (63)$$

$$\dot{y}_i(t) = -az_{i+1}(\Delta - z_{i+1}), \quad z_{i+1} < \Delta, \quad i = \bar{m} + 1, \dots, m, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (64)$$

3-ий случай: $\bar{m} = m$

$$\dot{y}_0(t) = c_0(z_0 - \Delta), \quad z_0 > \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (65)$$

$$\dot{y}_i(t) = c(z_i - \Delta), \quad z_i > \Delta, \quad i = 1, \dots, m - 1, \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (66)$$

$$\dot{y}_m(t) = c(z_m - \Delta) - az_{m+1}(\Delta - z_{m+1}), \quad z_m > \Delta, \quad z_{m+1} < \Delta, \quad t \in [\bar{t}, +\infty). \quad (67)$$

Непосредственно из (59)–(67) следует, что во всех трех случаях правые части всех уравнений за исключением, быть может, уравнения с номером \bar{m} либо положительны, либо отрицательны. Численные эксперименты показали, что в первом случае ($\bar{m} = 0$) правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна. Это связано с тем, что данный случай имеет место, если значение параметра c_0 существенно больше значения параметра a . В третьем случае ($\bar{m} = m$) правая часть уравнения с номером \bar{m} отрицательна. Это связано с тем, что этот случай имеет место, если значение параметра c существенно меньше значения параметра a . Таким образом, в первом случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = 0$ положительна, а правые части остальных уравнений – отрицательны. Следовательно, в данном случае число задействованных путей в зоне временного хранения грузов с номером $\bar{m} = 0$ будет неограниченно возрастать, а число задействованных путей в остальных зонах временного хранения грузов – неограниченно убывать. В третьем случае правая часть уравнения с номером $\bar{m} = m$ отрицательна, а правые части остальных уравнений положительны. Соответственно, в данном случае число задействованных путей в зоне временного хранения с номером $\bar{m} = m$ будет неограниченно убывать, а число задействованных путей в остальных зонах временного хранения – неограниченно возрастать.

тать. Во втором случае правые части уравнений с номерами меньше \bar{m} положительны, правые части уравнений с номерами больше \bar{m} отрицательны. Правая часть уравнения с номером \bar{m} может быть как положительной, так и отрицательной, а при определенных комбинациях параметров может оказаться равной нулю. Следовательно, в этом случае только в одной зоне временного хранения грузов число задействованных путей может не изменяться со временем. Число задействованных путей в остальных зонах временного хранения грузов либо будет неограниченно возрастать, либо неограниченно убывать. Например, на рис. 38 приведена динамика чисел задействованных путей в зонах временного хранения грузов, в случае постоянных функций, описывающих интенсивность подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивность распределения грузов с конечной узловой станцией, т.е. $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d$, $d > 0$ (случай 2, уравнения (61)–(64)). Количество станций равно 10, соответственно, количество зон временного хранения грузов равно 9; y_0, y_1, \dots, y_8 – числа задействованных путей в этих зонах временного хранения грузов. Значение Δ равно 10, а параметры имеет следующие значения: $\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$. Многочисленные эксперименты показали, что все выводы относительно динамики числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов, которые далее будут приведены, справедливы и для любого другого количества станций, зон временного хранения грузов и значения Δ .

Для периодических функций $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma \cos(\omega t)$, $d \geq \gamma > 0$ динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов принципиально не меняется. Например, на рис. 39 приведена указанная динамика при следующих значениях параметров: $\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$, $\gamma = 3$.

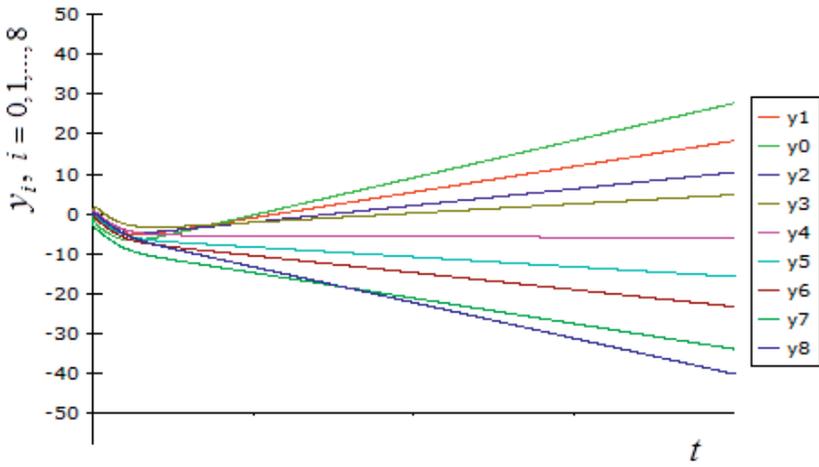


Рис. 38. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с постоянными функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

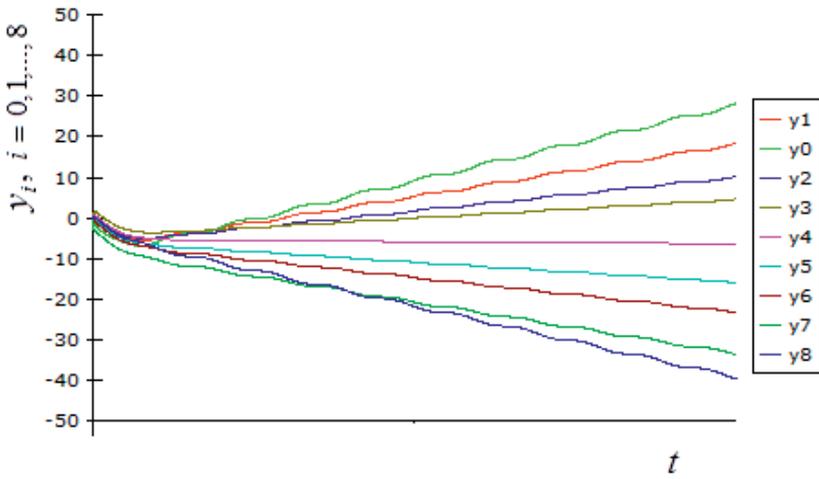


Рис. 39. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$

В связи с этим дальнейшее исследование будем проводить для случая с постоянными и равными функциями $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$.

Исследуем, зависимость скорости роста и снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от па-

раметров модели. Начнем с параметра c_0 . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с начальной узловой станции в 0-ую зону временного хранения. Пусть $\bar{m} \geq 1$ (уравнения (61)–(67)). Как показывают численные эксперименты, увеличение данного параметра приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей в 0-ой зоне временного хранения грузов, уменьшению скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $1, \dots, \bar{m}$ и увеличению скорости снижения в следующих зонах временного хранения грузов. При этом как уменьшение скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости снижения в следующих зонах временного хранения грузов ослабевает при увеличении номера зоны временного хранения грузов. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 40. На нем приведена динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным до 2 значением параметра c_0 и неизменными значениями других параметров ($\alpha = 10, a = 0.1, c_0 = 2, c = 1, d = 3$).

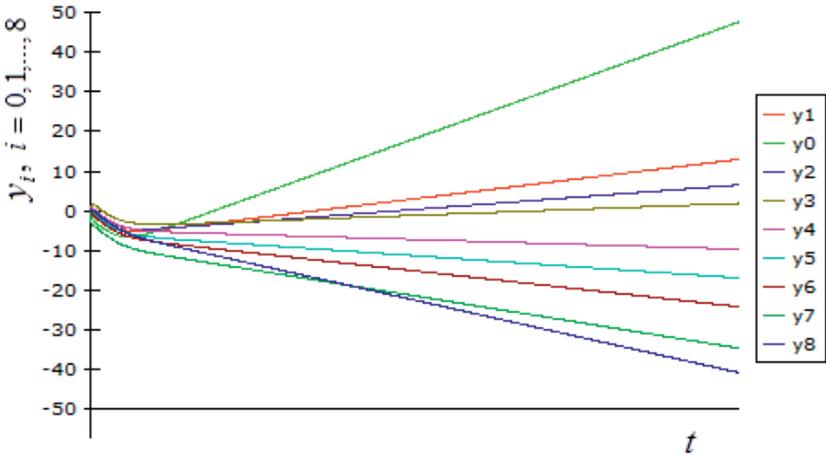


Рис. 40. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c_0 (двукратное увеличение)

Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра c_0 , а именно, с его увеличением значение \bar{m} уменьшается до $\bar{m} = 0$. Поэтому, по мере увеличения данного параметра, рост числа задействованных путей во всех зонах временного хранения грузов, за исключением начального, сменяется на падение. Данную тенденцию можно увидеть на рис. 41 (уравнения (59)–(60)). На нем приведена динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным до 60 значением параметра c_0 и неизменными значениями других параметров ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 60$, $c = 1$, $d = 3$).

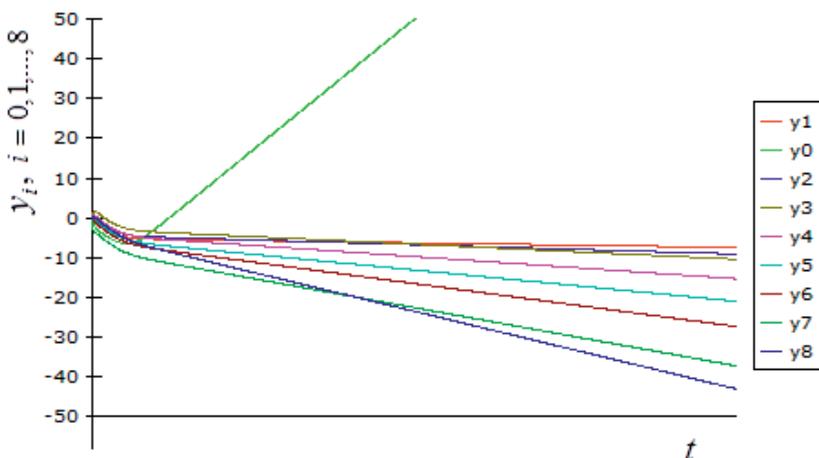


Рис. 41. Динамика числа задействованных путей на перегонах с увеличенным значением параметра c_0 (многократное увеличение)

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметра c . Данный параметр определяет интенсивность отправки грузов с произвольной промежуточной станции с номером $i = 1, \dots, m$ в зону временного хранения грузов. Отправка грузов в зону временного хранения осуществляется, если число задействованных путей на станции больше значения Δ . Согласно (54), это условие выполняется на станциях с номерами $i = 0, \dots, \bar{m}$. Таким образом, станция с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$ отправляет груз

в зону временного хранения с номером $i = 0, \dots, \bar{m}$. Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра c , а именно, с его увеличением значение \bar{m} уменьшается до $\bar{m} = 1$. Поэтому, небольшое увеличение параметра c , не приводящее к уменьшению значения \bar{m} , приводит к увеличению скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$ и уменьшению роста числа задействованных путей в зонах временного хранения с номером $i = 0$. В зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$ наблюдается увеличение скорости снижения числа задействованных путей. При этом как увеличение скорости роста числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = 1, \dots, \bar{m}$, так и увеличение скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$ ослабевает при увеличении номера зоны временного хранения грузов. Если увеличение параметра c приводит к уменьшению значения \bar{m} , то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра c постепенно в зонах временного хранения, на которых происходило увеличение скорости роста числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости роста числа задействованных путей вплоть до дальнейшего падения за исключением зон временного хранения с номерами $i = 0, 1$ (рис. 42). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра c , во всех зонах временного хранения кроме 0-ого и 1-ого происходит снижение числа задействованных путей. В 0-ом и 1-ом зонах временного хранения происходит рост числа задействованных путей, причем скорость роста на 1-ом увеличивается (рис. 43).

На рис. 42 значение параметра c увеличено до 2 ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 1$, $c = 2$, $d = 3$), а на рис. 43 – до 60, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10$, $a = 0.1$, $c_0 = 1$, $c = 60$, $d = 3$).

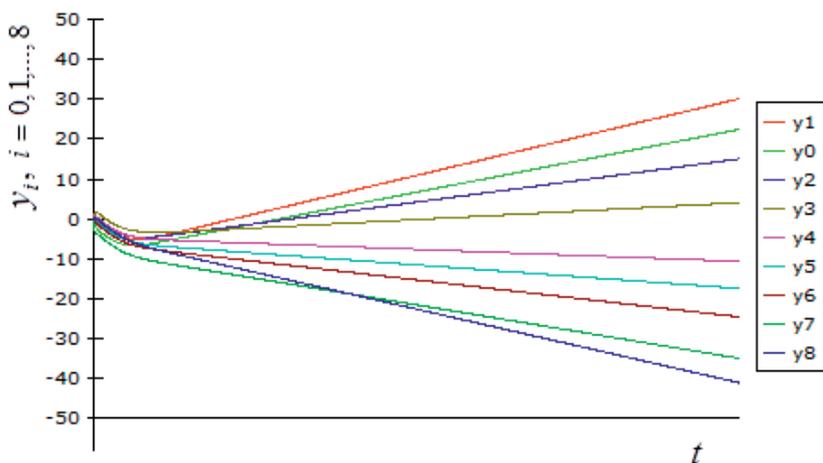


Рис. 42. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c (двукратное увеличение)

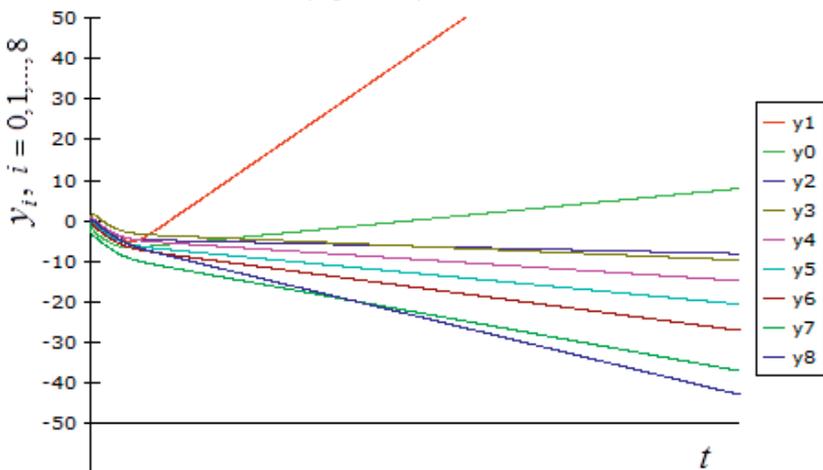


Рис. 43. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра c (многократное увеличение)

Перейдем к исследованию зависимости роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от параметра a . Напомним, что данный параметр определяет интенсивность приема грузов по второй технологии (с зоны временно-

го хранения грузов), причем данная технология применяется, если число задействованных путей на станции меньше значения Δ . Согласно (54), это условие выполняется на станциях с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m + 1$. Как было указано выше, в рамках второй технологии станция с номером $i + 1$ принимает груз с зоны временного хранения с номером i . Напомним, что само значение \bar{m} , в частности, зависит от параметра a , а именно, с его увеличением значение \bar{m} увеличивается до $\bar{m} = m$. Поэтому, небольшое увеличение параметра a , не приводящее к увеличению значения \bar{m} , приводит к увеличению скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = \bar{m}, \dots, m$. В зонах временного хранения грузов с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$ наблюдается увеличение скорости роста числа задействованных путей. При этом как увеличение скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с номерами $i = \bar{m}, \dots, m$, так и увеличение скорости роста числа задействованных путей в предыдущих зонах временного хранения грузов замедляется при уменьшении номера зоны временного хранения. Если же увеличение параметра a приводит к увеличению значения \bar{m} , то наблюдается следующая тенденция: по мере увеличения параметра a постепенно в зонах временного хранения грузов, на которых происходило увеличение скорости снижения числа задействованных путей, происходит уменьшение скорости снижения числа задействованных путей вплоть до дальнейшего роста за исключением последней зоны временного хранения грузов с номером $i = m$ (рис. 44). Таким образом, начиная с некоторого значения параметра a , во всех зонах временного хранения грузов кроме последней происходит рост числа задействованных путей. В последней зоне временного хранения грузов происходит уменьшение числа задействованных путей, причем его скорость увеличивается (рис. 45).

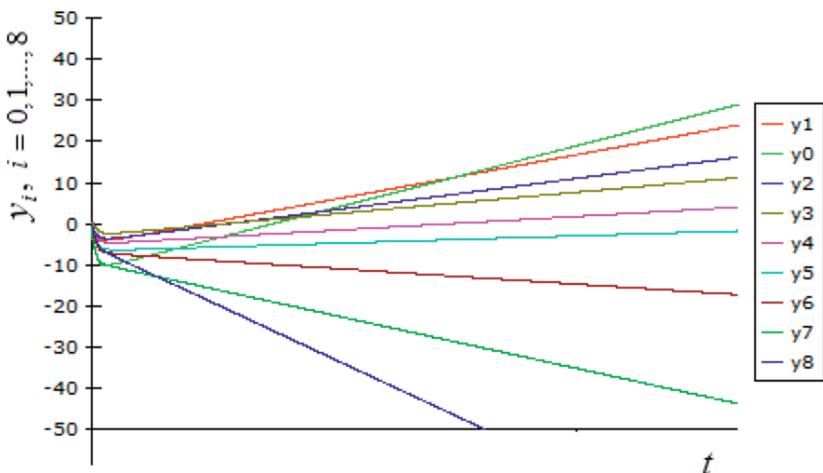


Рис. 44. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра a (пятикратное увеличение)

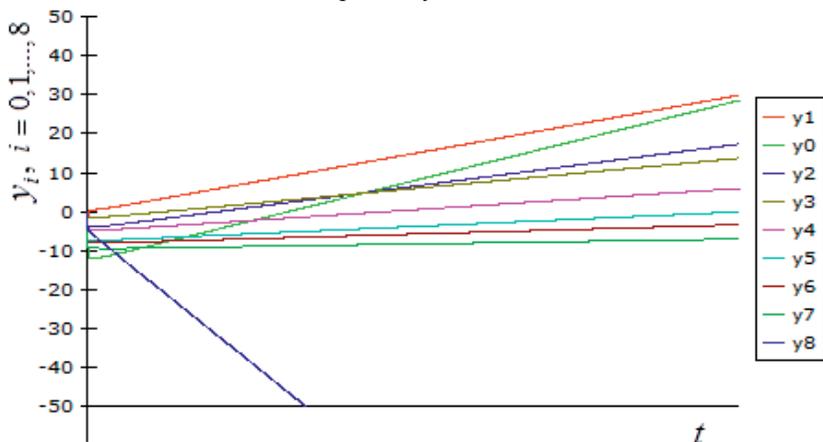


Рис. 45. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов с увеличенным значением параметра a (многократное увеличение)

На рис. 44 значение параметра a увеличено до 0.5 ($\alpha = 10$, $a = 0.5$, $c_0 = 1 = 1$, $d = 3$), а на рис. 45 – до 10, при неизменных значениях других параметров ($\alpha = 10$, $a = 10$, $c_0 = 1$, $c = 1$, $d = 3$).

Наконец, исследуем зависимость роста (падения) числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов от па-

параметра α . Напомним, что изменение данного параметра не меняет значение \bar{m} . Как ранее было отмечено, начиная с момента времени \bar{t} , увеличение параметра α приводит к уменьшению как разностей $(z_i - \Delta)$, $i = 0, \dots, \bar{m}$ так и $(\Delta - z_i)$, $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Таким образом, увеличение параметра α приводит как к уменьшению скорости роста в зонах временного хранения с номерами $i = 0, \dots, \bar{m} - 1$, так и уменьшению скорости снижения числа задействованных путей в зонах временного хранения с номерами $i = \bar{m} + 1, \dots, m$. Такое же воздействие оказывает увеличение данного параметра и на число задействованных путей в зоне временного хранения с номером $i = \bar{m}$ с той лишь разницей, что число задействованных путей в этой зоне хранения может, как расти, так и падать или не меняться. Например, на рисунке 46 приведена указанная динамика при следующих значениях параметров: $\alpha = 30$, $a = 0.1$, $c_0 = c = 1$, $d = 3$.

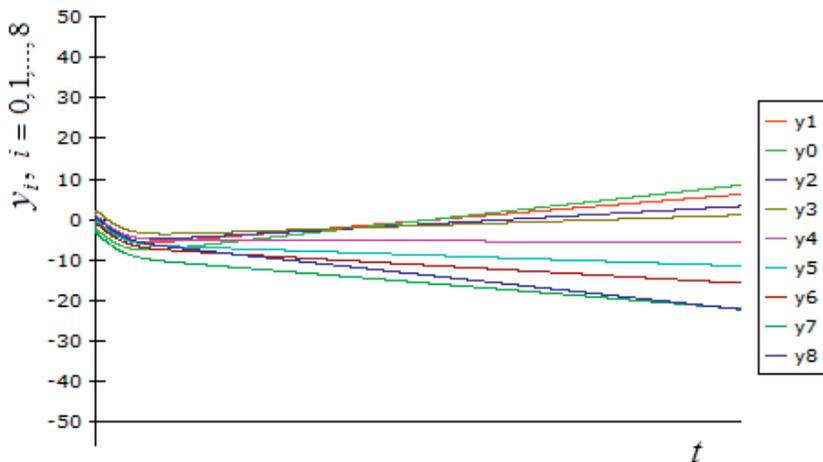


Рис. 46. Динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения с увеличенным значением параметра α

Таким образом, только увеличение параметра α может уменьшить скорость роста (падения) числа задействованных путей во всех зонах временного хранения грузов.

В начале данного параграфа было отмечено, что ослабление системы контроля может привести к накоплению грузов в зонах временного хранения. Проведенное исследование подтвердило данное опасение. Это означает, что необходимо вводить корректировку в процесс организации грузоперевозок. В следующем параграфе опишем модель, которая ограничивает объем грузов, одновременно находящихся в зонах временного хранения (Beklaryan, Khachatryan, Akorov, 2019). Этот объем определяется числом путей в зонах временного хранения грузов.

2.4. Корректировка технологий грузоперевозок и системы контроля

Пусть число путей во всех зонах временного хранения грузов одинаково и равно V . Опишем технологии организации грузоперевозок с учетом этого ограничения. Как известно, первая технология основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Каждая станция с номером $1 \leq i \leq m$ может принять груз с предыдущей станции с интенсивностью равной $\alpha(z_{i-1} - z_i)$, если $z_{i-1} > z_i$, и отправлять на следующую станцию с интенсивностью равной $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если $z_i > z_{i+1}$. При нарушении первого из условий станция с номером i отправляет груз в зону временного хранения с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, если $y_i < V$, а при нарушении второго – принимает груз из зоны временного хранения с номером $i-1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$, если $y_{i-1} > 0$. Начальная узловая станция ($i=0$) принимает грузы с интенсивностью $\psi_1(t) \geq 0$ и отправляет на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_0 - z_1)$, если $z_0 > z_1$. В противном случае начальная узловая станция дополнительно принимает груз с интенсивностью $\alpha(z_1 - z_0)$. Конечная узловая станция ($i=m+1$) принимает груз с предыдущей станции с интенсивностью

$\alpha(z_m - z_{m+1})$, если $z_m > z_{m+1}$, и распределяет с интенсивностью $\psi_2(t) \geq 0$. Если $z_m < z_{m+1}$, то конечная станция дополнительно распределяет груз с интенсивностью $\alpha(z_{m+1} - z_m)$.

В рамках второй технологии, станция с номером $i = 1, 2, \dots, m$ принимает грузопоток с $(i-1)$ -ой зоны временного хранения грузов с интенсивностью $\varphi(z_i)$, если $z_i < \Delta$ и $y_{i-1} > 0$, и отправляет груз в i -ую зону временного хранения с интенсивностью $\varphi(z_i)$, если $z_i > \Delta$ и $y_i < V$. Конечная узловая станция ($i = m+1$) в рамках второй технологии принимает груз из m -ой зоны временного хранения с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если $z_{m+1} < \Delta$ и $y_m > 0$, и дополнительно распределяет груз с интенсивностью $\varphi(z_{m+1})$, если $z_{m+1} > \Delta$. Начальная узловая станция ($i = 0$) отправляет грузы в 0-ую зону временно хранения с интенсивностью $\varphi(z_0)$, если $z_0 > \Delta$ и $y_0 < V$.

Таким образом, динамика числа задействованных путей на станциях задается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) = & \psi_1(t) - \alpha(z_0 - z_1) + \varphi_0(z_0) \operatorname{sign}(z_0 - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_0), \\ & t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i) + \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i+1}) - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+1} - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \\ & + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(\Delta - z_i) \operatorname{sign}(y_{i-1}) + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i), \\ & i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m+1}(t) = & \alpha(z_m - z_{m+1}) - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{m+1}) \operatorname{sign}(y_m) + \\ & + \varphi(z_{m+1}) \operatorname{sign}(z_{m+1} - \Delta), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (70)$$

Исследуем динамику числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Определим, с какой интенсивно-

стью грузы поступают в зоны временного хранения и с какой интенсивностью отправляются из них. В рамках первой технологии в зону временного хранения с номером $1 \leq i \leq m-1$ груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, если $z_i > z_{i-1}$ и $y_i < V$, и отправляется на станцию с номером $i+1$ с интенсивностью $\alpha(z_{i+2} - z_{i+1})$, если $z_{i+2} > z_{i+1}$ и $y_i > 0$. В начальную зону временного хранения ($i=0$) в рамках первой технологии груз не поступает, отправляется с него на станцию с номером 1 с интенсивностью $\alpha(z_2 - z_1)$, если $z_2 > z_1$ и $y_0 > 0$. Наконец, в конечную зону временного хранения ($i=m$) в рамках этой же технологии груз поступает со станции с номером $i=m$ с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m-1})$, если $z_m > z_{m-1}$ и $y_m < V$. С конечной зоны временного хранения в рамках данной технологии груз не отправляется.

В рамках второй технологии в зону временного хранения с номером $0 \leq i \leq m$ груз поступает со станции с номером i с интенсивностью $-\varphi(z_i)$, если число задействованных путей на станции с номером i превышает значение Δ и $y_i < V$, и отправляется на станцию с номером $i+1$ с интенсивностью $\varphi(z_{i+1})$, если число задействованных путей на станции с номером $i+1$ меньше значения Δ и $y_i > 0$ (станция с номером $i+1$ принимает груз с зоны временного хранения).

Таким образом, динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) = & -\alpha(z_2 - z_1) \text{sign}(z_2 - z_1) \text{sign}(y_0) - \\ & - \varphi(z_0) \text{sign}(z_0 - \Delta) \text{sign}(V - y_0) - \\ & - \varphi(z_1) \text{sign}(\Delta - z_1) \text{sign}(y_0), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & \alpha(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i-1}) \operatorname{sign}(V - y_i) - \\ & - \alpha(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_{i+2} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i) - \\ & - \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_i - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_i) - \varphi(z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{i+1}) \operatorname{sign}(y_i), \\ & i = 1, 2, \dots, m-1, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) = & \alpha(z_m - z_{m-1}) \operatorname{sign}(z_m - z_{m-1}) \operatorname{sign}(V - y_m) - \\ & - \varphi(z_m) \operatorname{sign}(z_m - \Delta) \operatorname{sign}(V - y_m) - \\ & - \varphi(z_{m+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{m+1}) \operatorname{sign}(y_m), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (73)$$

Кроме того, должны выполняться неравенства:

$$0 \leq y_i(t) \leq V, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad t \in [0, +\infty). \quad (74)$$

Эти неравенства накладывают ограничение на число задействованных путей в зонах временного хранения грузов. Таким образом, исследуемая нами модель организации грузоперевозок описывается системой (68)–(74). Аналитическое исследование решений системы (68)–(74) крайне затруднительно, т.к. правые части дифференциальных уравнений (68)–(70) и (71)–(73) являются разрывными функциями. В связи с этим система (68)–(74) была исследована численно. Приведем результаты численного исследования.

2.4.1. Результаты численных экспериментов

Для периодических функций

$$\psi_1(t) = d + \gamma \cos(\omega t), \quad d \geq \gamma > 0, \quad \psi_2(t) = \lambda \psi_1(t), \quad \lambda > 0$$

и функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$, определенных следующим образом

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ ax(\Delta - x), & a > 0 \text{ если } x \in [0, \Delta] \\ -c(x - \Delta), & c > 0 \text{ если } x \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \Delta \\ -c_0(x - \Delta), & c_0 > 0 \text{ если } x \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$$

были получены численные решения системы (68)–(74). В зависимости от параметра λ , участвующего в определении функции $\psi_2(\cdot)$, получаем три типа решений системы (68)–(74). Они определяют характер динамики задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов. Прежде чем перейдем к детальному изучению решений системы (68)–(74), отметим свойство решений данной системы, характерное для всех трех типов. Многочисленные эксперименты показали, что существует момент времени t_0 такой, что выполняется условие

$$z_0(t) > z_1(t) > \dots > z_m(t) > z_{m+1}(t), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

1-ый тип решения системы (68)–(74) ($0 < \lambda < 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени $t_1 > t_0$, такого, что для всех $t \geq t_1$ и любых начальных значениях компоненты решения системы (68)–(74) удовлетворяют следующим условиям:

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad y_i(t) = V, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Отметим, что значение t_1 увеличивается как при увеличении значения V , так и при увеличении значения λ . Данный тип решений можно увидеть на рис. 47. Сверху приведена динамика числа задействованных путей на станциях (число станций равно 10), а снизу – динамика числа задействованных путей в зонах временного хранения грузов (число зон временного хранения грузов, соответственно, равно 9). Значение Δ равно 10, а значение V – 15.

Как видно из рис. 47, начиная с некоторого момента времени, число задействованных путей на всех станциях поочередно, начиная с начальной, превышает значение Δ и параллельно с этим, также поочередно, число задействованных путей во всех зонах временного хранения достигает максимального значения V . После этого, согласно правилам, приведенным выше, процесс организации грузоперевозок осуществляется только в рамках первой технологии без привлечения зон временного хранения грузов (так

как число задействованных путей на каждой следующей станции меньше чем на предыдущей).

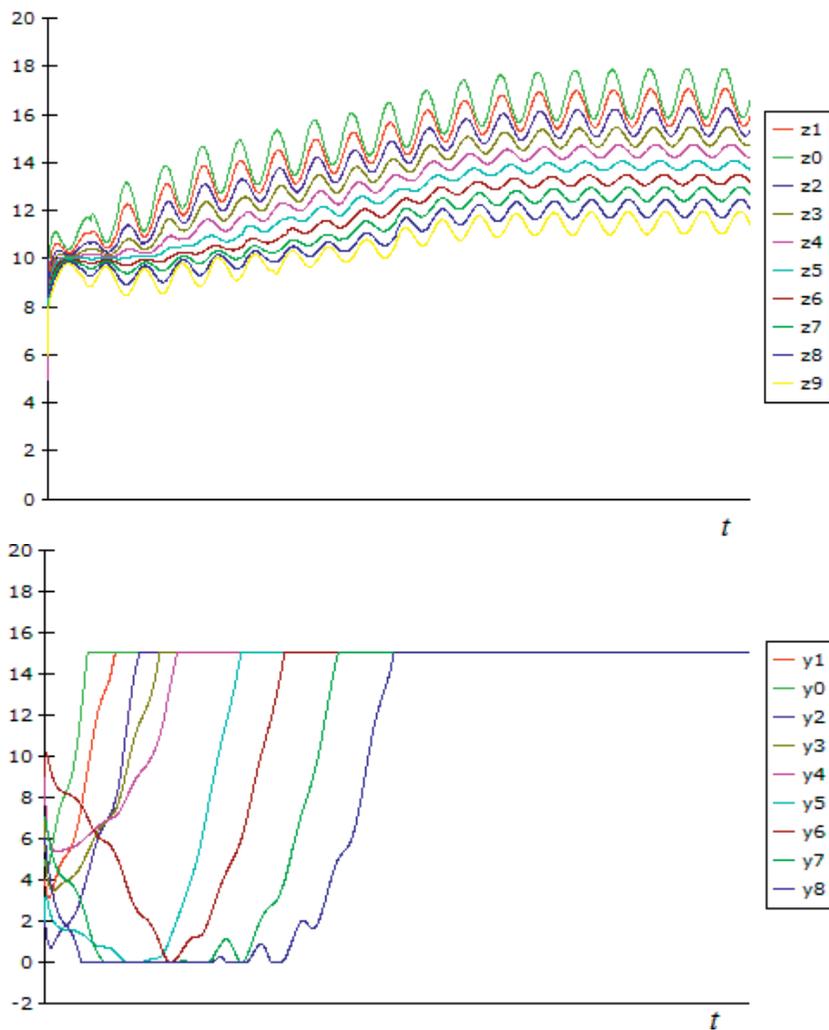


Рис. 47. Первый тип решения системы (68)–(74)

2-ой тип решения системы (68)–(74) ($\lambda = 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени t_2 , такого, что для всех $t \geq t_2$ компоненты решения системы (68)–(74) удовлетворяют одному из следующих условий:

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, \dots, \bar{m}, \quad z_i(t) < \Delta, \quad i = \bar{\bar{m}}, \dots, m+1, \quad (75)$$

$$y_i(t) = V, \quad i = 0, \dots, \bar{m}, \quad y_i(t) = 0, \quad i = \bar{\bar{m}}, \dots, m, \quad (76)$$

где

$$0 \leq \bar{m} < \bar{\bar{m}} \leq m+1$$

или

$$z_i(t) < \Delta, \quad i = 0, \dots, m+1, \quad y_i(t) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad (77)$$

или

$$z_i(t) > \Delta, \quad i = 0, \dots, m+1, \quad y_i(t) = V, \quad i = 0, \dots, m. \quad (78)$$

Выполнимость того или иного условия ((75)–(76), (77) или (78)), а также значения чисел \bar{m} и $\bar{\bar{m}}$ зависят от начальных условий системы (68)–(74) и от величины V . Независимо от величины V , условие (77) выполняется при маленьких значениях компонент решения системы (68)–(74) в начальный момент времени (рис. 49), условие (78) – при больших (рис. 50), а условие (75)–(76) – при промежуточных (рис. 48).

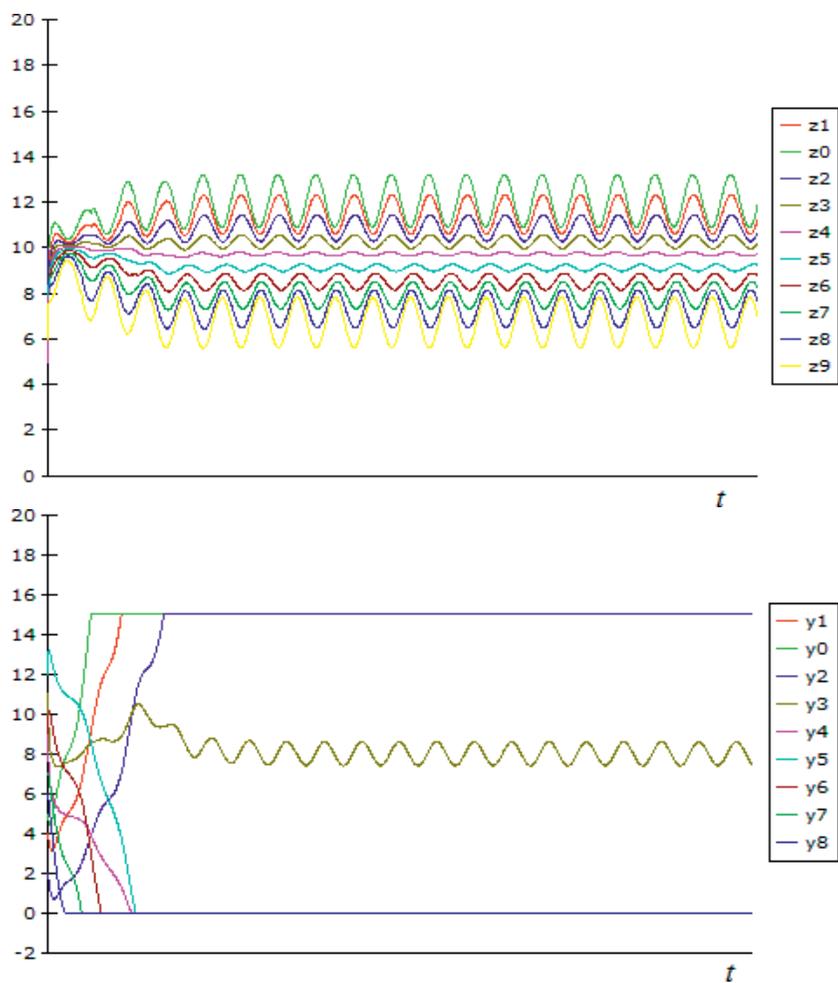


Рис. 48. Второй тип решения системы (68)–(74) (случай 1)

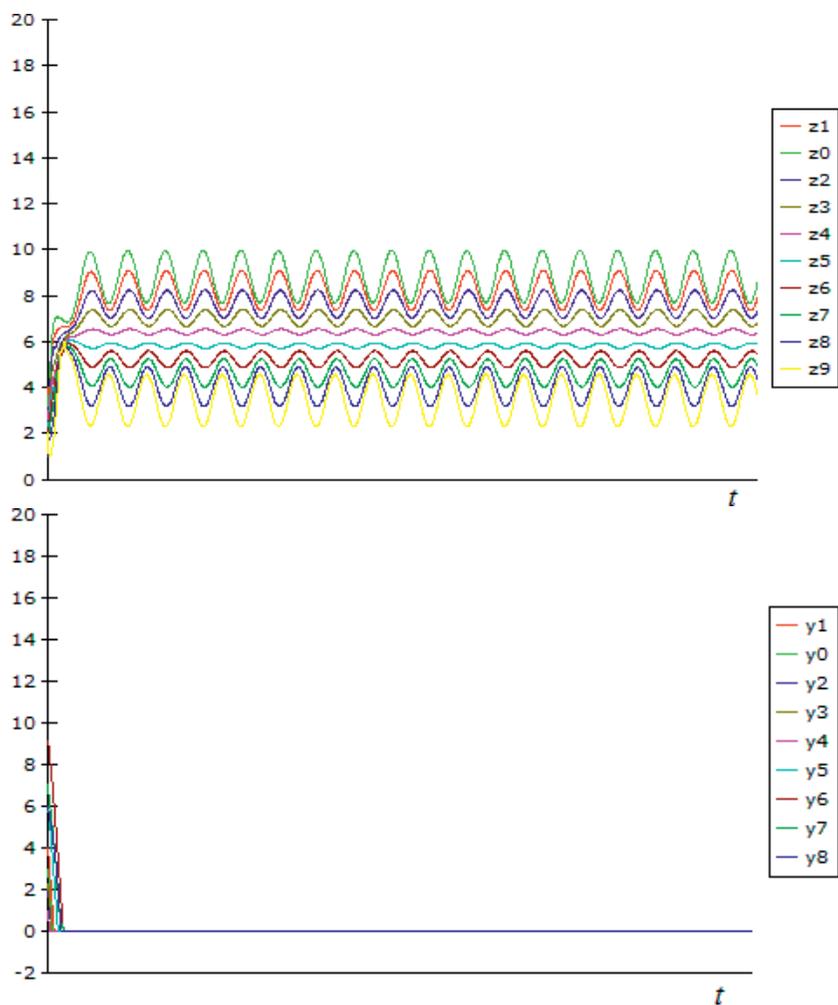


Рис. 49. Второй тип решения системы (68)–(74) (случай 2)

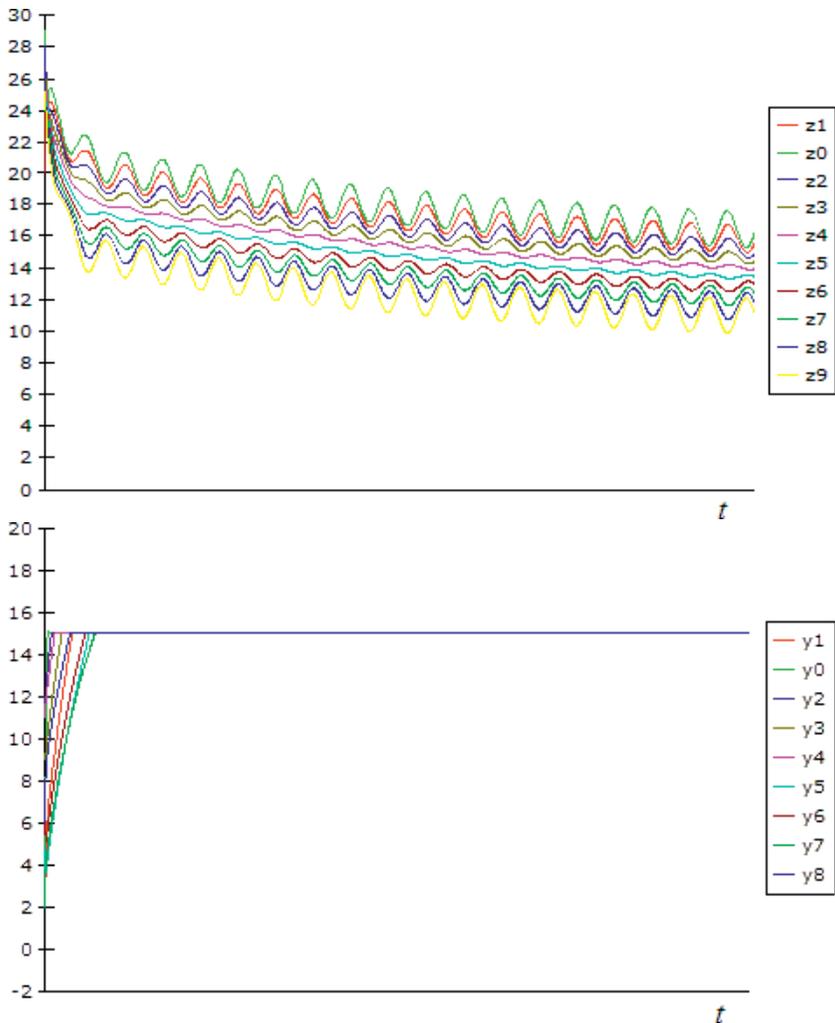


Рис. 50. Второй тип решения системы (68)–(74) (случай 3)

3-ий тип решения системы (68)–(74) ($\lambda > 1$)

Данный тип решения характеризуется наличием момента времени t_3 , такого, что для всех $t \geq t_3$ и любых начальных значениях компоненты $y_i(\cdot)$ решения системы (68)–(74) удовлетворяют условию

$$y_i(t) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad (79)$$

а компоненты $z_i(\cdot)$ неограниченно убывают (рис. 51). Отметим, что значение t_3 увеличивается как при увеличении значения V , так и при уменьшении значения λ .

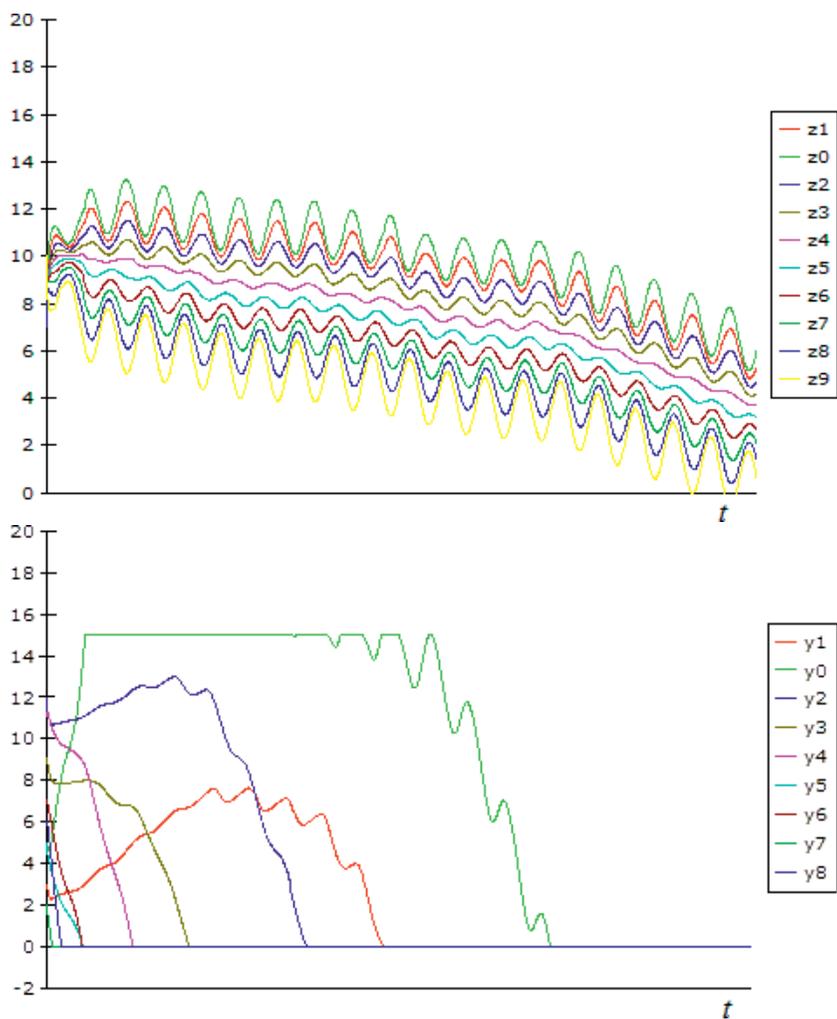


Рис. 51. Третий тип решения системы (68)–(74)

Проанализируем полученные результаты для каждого из трех типов решений системы (68)–(74). Первый тип решений определяет динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, когда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции меньше интенсивности отправки грузов на начальную узловую станцию. В этом случае с течением времени происходит полное заполнение зон временного хранения грузов, и при этом станции не могут принять грузы с них вследствие сильной загруженности. Второй тип решений определяет динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, когда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции равна интенсивности отправки грузов на начальную узловую станцию. Напомним, что в этом случае, в зависимости от загруженности станций в начальный момент времени, возможны три типа указанной динамики. Если в начальный момент времени станции задействованы незначительно, то с течением времени запасы грузов во всех зонах временного хранения заканчиваются, станции загружаются до уровня ниже оптимального и впоследствии движение грузов происходит от одной станции к другой (без привлечения зон временного хранения грузов). Противоположная степень заполненности станций в начальный момент времени (критическое переполнение) на практике крайне маловероятна. Наконец, при наиболее вероятной средней степени заполненности станций в начальный момент времени происходит наиболее оптимальная их загрузка, соответствующая наиболее эффективному использованию инфраструктурных возможностей станций. При этом происходит переполнение зон временного хранения грузов, близких к начальной узловой станции, без возможности дальнейшего их вывоза и освобождение зон временного хранения грузов, близких к конечной узловой станции. Следует отметить, что в этом случае необходимо подключить дополнительные мощности для вывоза грузов из зон временного хранения грузов, близких к начальной узловой станции. Третий тип решений определяет динамику числа задействованных путей на станциях и в зонах временного хранения грузов в случае, ко-

гда интенсивность распределения грузов с конечной узловой станции превышает интенсивность отправки грузов на начальную узловую станцию. В этом случае с течением времени происходит освобождение зон временного хранения грузов, а загруженность станций уменьшается вплоть до их полного бездействия. Однако, если разность в интенсивностях распределения грузов с конечной узловой станции и подачи грузов на начальную узловую станцию невелика, то можно утверждать, что на протяжении всего горизонта планирования можно осуществлять грузоперевозки с помощью указанных технологий.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПРИ ОТСУТСТВИИ СТАБИЛЬНО ВЫСОКОГО СПРОСА НА ПЕРЕВОЗКИ

Перейдем к построению моделей организации грузоперевозок в случае отсутствия стабильно высокого спроса на грузоперевозки. В этих условиях, как было отмечено во введении, нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере и, соответственно, в наличии специальных зон между станциями для временного хранения части грузов в случае чрезмерной загрузки станций. Для таких моделей важно описать динамику грузопотока в зависимости от потенциала станций. Напомним, что наличие специальных зон хранения грузов между станциями потребовало введения системы контроля. Таким образом, движение грузов происходит только от одной станции к другой и, как следствие, без системы контроля. Как и в предыдущей главе будем рассматривать две конфигурации участков железнодорожной сети: замкнутая цепочка станций, и участок железной дороги между двумя узловыми станциями. В первом случае важно определить установившийся уровень грузопотока при заданных правилах взаимодействия станций, а также выявить его зависимость от потенциала станций (Хачатрян, Бекларян, 2021). Во втором случае грузопоток формируется поступившими на начальную узловую станцию грузами с учетом технического потенциала станций. Поэтому, главной задачей является организация бесперебойного функционирования системы грузоперевозок с учетом интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и технического потенциала станций (Khachatryan, 2020; Khachatryan, 2021; Khachatryan, 2022).

3.1. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций

Рассмотрим движение грузопотока по замкнутой цепочке, состоящей из n станций. Обозначим через Δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ число путей на станции i . Пусть $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ как и ранее – число путей, задействованных на станции i в момент времени t . Тогда $\Delta_i - z_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ – число свободных путей на станции i в момент времени t . Очевидно, что функции $z_i(t)$ должны удовлетворять ограничениям:

$$0 \leq z_i(t) \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (80)$$

Движение грузопотока также осуществляется с помощью двух технологий. Первая технология, как и в моделях, представленных в предыдущих главах, основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Согласно ей, произвольная станция:

1) принимает груз с предыдущей станции, если число свободных путей на ней больше, чем на предыдущей станции, и предыдущая станция не пуста. При этом интенсивность приема пропорциональна как разности чисел свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на данной станции;

2) отправляет груз на следующую станцию, если число свободных путей на ней меньше, чем на следующей станции, и она не пуста. При этом интенсивность отправки пропорциональна как разности числу свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на следующей станции.

Таким образом, каждая станция с номером i ($2 \leq i \leq n-1$) в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_i - z_i) - (\Delta_{i-1} - z_{i-1})] (\Delta_i - z_i) \text{sign}(\Delta_i - z_i) \text{sign}(z_{i-1}),$$

если

$$\Delta_i - z_i > \Delta_{i-1} - z_{i-1}$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) - (\Delta_i - z_i)] (\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(z_i),$$

если

$$\Delta_{i+1} - z_{i+1} > \Delta_i - z_i.$$

Для станции 1 предыдущей является станция n , соответственно, для станции n последующей является станция 1. Поэтому станция 1 в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)] (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n),$$

если

$$\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_2 - z_2) - (\Delta_1 - z_1)] (\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1),$$

если

$$\Delta_2 - z_2 > \Delta_1 - z_1.$$

Аналогично, станция n должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_n - z_n) - (\Delta_{n-1} - z_{n-1})] (\Delta_n - z_n) \text{sign}(\Delta_n - z_n) \text{sign}(z_{n-1}),$$

если

$$\Delta_n - z_n > \Delta_{n-1} - z_{n-1}$$

и отправлять груз на следующую станцию с интенсивностью

$$\alpha [(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)] (\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n),$$

если

$$\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n.$$

Параметр α характеризует потенциал первой технологии и ограничивается пропускной способностью перегонов (участков железнодорожной линии между станциями) и техническими характеристиками железнодорожного подвижного состава, осуществляющего перевозки.

Вторая технология позволяет увеличить грузопоток в зависимости от загруженности станций: станции принимают и отправляют грузопоток с интенсивностью, определяемой числом свободных путей на ней и на следующей станции соответственно.

Она описывается с помощью непрерывных убывающих функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, определенных на отрезке $[0, \Delta_i]$, причем $\varphi_i(\Delta_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, интенсивность движения грузопотока на станциях задается с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) \text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)(\Delta_1 - z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) - \alpha(\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1)(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2) \text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha(\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1}) \text{sign}(\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1})(\Delta_i - z_i) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_i - z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \alpha(\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i)(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \text{sign}(z_i) + \\ & + \varphi_i(z_i) \text{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1}) \text{sign}(z_i), \\ & i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha(\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1}) \text{sign}(\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1})(\Delta_n - z_n) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_n - z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \alpha(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) + \\ & + \varphi_n(z_n) \text{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (83)$$

Отметим, что конструкция правых частей системы (81)–(83) гарантирует, что всякое ее решение, удовлетворяющее условию (80) в начальный момент времени, будет удовлетворять ему и в последующие моменты времени. Перепишем систему (81)–(83) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) \text{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)(\Delta_1 - z_1) \times \\ & \times \text{sign}(\Delta_1 - z_1) \text{sign}(z_n) - \alpha(z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1) \times \\ & \times \text{sign}(z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(\Delta_2 - z_2) \text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1) \text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2) \text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i(t) = & \alpha(z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1}) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1})(\Delta_i - z_i) \times \\
& \times \operatorname{sign}(\Delta_i - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1}) - \alpha(z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i) \times \\
& \times \operatorname{sign}(z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i)(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i) + \\
& + \varphi_i(z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i), \\
& i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \tag{85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_n(t) = & \alpha(z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1}) \operatorname{sign}(z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1})(\Delta_n - z_n) \times \\
& \times \operatorname{sign}(\Delta_n - z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1}) - \alpha(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n) \times \\
& \times \operatorname{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)(\Delta_1 - z_1) \operatorname{sign}(\Delta_1 - z_1) \operatorname{sign}(z_n) + \\
& + \varphi_n(z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1) \operatorname{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \tag{86}
\end{aligned}$$

Помимо системы (84)–(86) рассмотрим ее частный случай, соответствующий идентичности всех станций, т.е. в предположении, что все станции содержат одинаковое число путей и с одинаковой эффективностью их могут использовать. В этом случае

$$\Delta_i = \Delta_j = \Delta, \quad \varphi_i(\cdot) = \varphi_j(\cdot) = \varphi(\cdot)$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$ и система уравнений (84)–(86) приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) = & \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1)(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(z_n) - \\
& - \alpha(z_1 - z_2) \operatorname{sign}(z_1 - z_2)(\Delta - z_2) \operatorname{sign}(\Delta - z_2) \operatorname{sign}(z_1) + \\
& + \varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_n) - \varphi(z_2) \operatorname{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \tag{87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i(t) = & \alpha(z_{i-1} - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1} - z_i)(\Delta - z_i) \operatorname{sign}(\Delta - z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1}) - \\
& - \alpha(z_i - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i - z_{i+1})(\Delta - z_{i+1}) \operatorname{sign}(\Delta - z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i) + \\
& + \varphi(z_i) \operatorname{sign}(z_{i-1}) - \varphi(z_{i+1}) \operatorname{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \tag{88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_n(t) = & \alpha(z_{n-1} - z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1} - z_n)(\Delta - z_n) \operatorname{sign}(\Delta - z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1}) - \\
& - \alpha(z_n - z_1) \operatorname{sign}(z_n - z_1)(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(\Delta - z_1) \operatorname{sign}(z_n) + \\
& + \varphi(z_n) \operatorname{sign}(z_{n-1}) - \varphi(z_1) \operatorname{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \tag{89}
\end{aligned}$$

Система уравнений (87)–(89) имеет бесконечное множество стационарных решений вида

$$z_i = c, \quad 0 \leq c \leq \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (90)$$

Аналитическое исследование других решений системы (87)–(89), а также решений системы (84)–(86), крайне затруднительно, так как правые части дифференциальных уравнений в общем случае являются разрывными функциями. В связи с этим системы (87)–(89) и (84)–(86) были исследованы численно.

3.1.1. Результаты численных экспериментов

Перейдем к изложению результатов численных экспериментов, в которых функции $\varphi_i(\cdot)$ были определены следующим образом:

$$\varphi_i(z_i) = a_i(\Delta_i^2 - z_i^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (91)$$

Напомним, что функции $\varphi_i(\cdot)$ должны быть убывающими и удовлетворять условию $\varphi_i(\Delta_i) = 0$. Параметр a_i , участвующий в определении этих функций, описывает эффективность использования путей на станции i . Определяя такой класс функций $\varphi_i(\cdot)$, мы предполагаем, что пропускная способность станций зависит как от числа путей, так и от эффективности их использования. Причем с ростом эффективности использования путей пропускная способность растет линейно, а с увеличением числа путей – больше чем линейно. Основная задача численных экспериментов заключалась в исследовании решений системы (84)–(86) (в частности (87)–(89)), определяющей динамику интенсивности грузопотока, а также ее зависимость от начальных значений и параметров модели α , a_i , Δ_i , $i = 1, \dots, n$.

3.1.2. Численное решение системы (87)–(89)

Для системы (87)–(89) имеем

$$\varphi_i(z_i) = \varphi(z_i) = a(\Delta^2 - z_i^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. параметрами являются α , a , Δ . Система (87)–(89) имеет стационарные решения вида (90). Как показывают численные эксперименты при любых значениях параметров α , a , Δ система (87)–(89) имеет непрерывное решение, причем любое ее решение со временем выходит на некоторый стационарный режим, т.е. существует $\bar{t} > 0$, такое, что всякое решение $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ системы (87)–(89) удовлетворяет условию $z_i = \bar{c}$, $t \in [\bar{t}, +\infty)$. Более того, значение \bar{c} зависит только от начальных условий и определяется

формулой $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(0)$. Момент времени \bar{t} характеризуется как

начальными условиями, так и параметрами модели. На рис. 52 приведен график решений системы (87)–(89) при $\alpha = 2$, $a = 0.1$, $\Delta = 10$ и начальных условиях:

$$\begin{aligned} z_1(0) = 3, \quad z_2(0) = 2, \quad z_3(0) = 5, \quad z_4(0) = 3, \quad z_5(0) = 4, \quad z_6(0) = 4, \\ z_7(0) = 3, \quad z_8(0) = 2, \quad z_9(0) = 1, \quad z_{10}(0) = 4. \end{aligned}$$

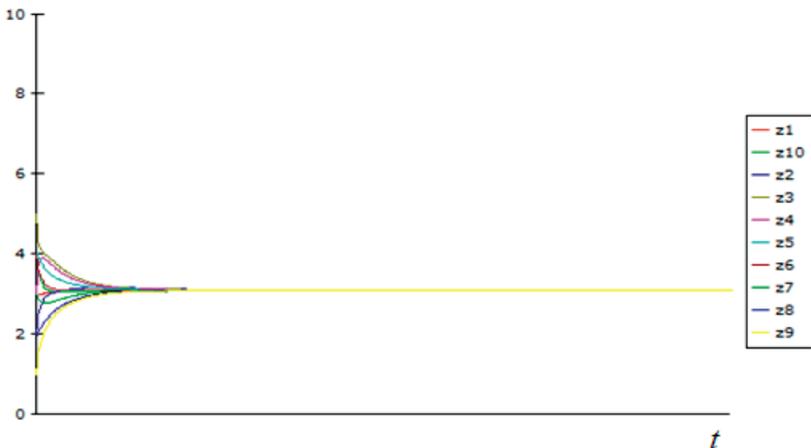


Рис. 52. График решения системы (87)–(89)

Из правых частей уравнений (87)–(89) следует, что, начиная с момента времени \bar{t} , первые два слагаемых в них равны нулю, ненулевыми являются только слагаемые определяемые функцией $\varphi_i(\cdot)$. Это означает, что со временем движение грузопотока осуществляется только в рамках второй технологии, каждая станция принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной интенсивностью $\varphi(\bar{c})$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается стационарный поток. На рис. 53 приведены графики интенсивностей потоков, возникающих между станциями.

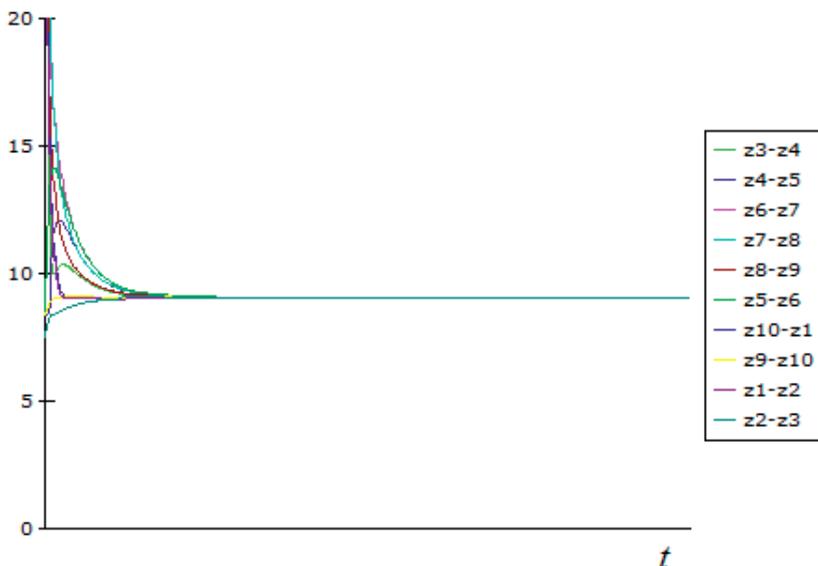


Рис. 53. Интенсивность потока в случае идентичных станций

Как следует из определения функции $\varphi(\cdot)$, величина этого потока прямо пропорциональна параметрам a , Δ и обратно пропорциональна значению \bar{c} . Таким образом, в случае идентичности станций в системе грузоперевозок, начиная с некоторого момента времени, устанавливается стационарный поток, величина которого увеличивается по мере роста пропускной способности станций и уменьшается с увеличением загрузки станций в на-

чальный момент времени (\bar{c}). Величина этого потока не зависит от характеристики первой технологии, т.е. параметра α . От него зависит время выхода на стационарный поток (\bar{t}). Чем меньше значение параметра α , тем позже наступит это время. Наконец отметим, что все выводы, полученные в этом параграфе относительно динамики решений системы (87)–(89) и интенсивности потока, остаются справедливыми и при $\alpha = 0$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается такой же стационарный поток, как и при $\alpha > 0$, но в более отдаленном будущем.

3.1.3. Численное решение системы (84)–(86)

Перейдем к исследованию общей системы (84)–(86). В результате численных экспериментов было установлено, что система (84)–(86) имеет два типа решений. Первый тип характеризуется непрерывными правыми частями и обладает следующим свойством:

$$\exists \tilde{t} > 0: z_i = \bar{c}_i, \quad 0 < \bar{c}_i < \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [\tilde{t}, +\infty). \quad (92)$$

Кроме того, выполняются условие

$$\left(\sum_{i=1}^n \bar{c}_i \right) / n = \bar{c}, \quad \text{где } \bar{c} = \left(\sum_{i=1}^n z_i(0) \right) / n.$$

Второй тип решения системы (84)–(86) характеризуется разрывными правыми частями. Как показывают численные эксперименты, такие решения являются следствием того, что одна или несколько компонент решения начинают колебаться в правой окрестности нуля, принимая периодически нулевые значения (терпят разрывы). Это приводит к разрывам остальных компонент решения. Вследствие такого поведения решений интенсивность грузопотока меняется скачкообразно. Данное поведение характерно для решений с малыми начальными значениями и решениями, полученными при значениях параметра α , близких к нулю. На практике данный режим грузоперевозок сложно

реализуем, поэтому такой тип решений мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Итак, будем исследовать первый тип решений. На рис. 54 приведен пример решения для $\alpha = 2$ и начальных значений

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= 10, \Delta_2 = 11, \Delta_3 = 12, \Delta_4 = 8, \Delta_5 = 10, \\
 \Delta_6 &= 11, \Delta_7 = 9, \Delta_8 = 10, \Delta_9 = 12, \Delta_{10} = 10, \\
 a_1 &= 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3, a_4 = 0.05, a_5 = 0.4, \\
 a_6 &= 0.1, a_7 = 0.1, a_8 = 0.2, a_9 = 0.2, a_{10} = 0.02, \\
 z_1(0) &= 4, z_2(0) = 2, z_3(0) = 5, z_4(0) = 7, z_5(0) = 6, \\
 z_6(0) &= 8, z_7(0) = 5, z_8(0) = 6, z_9(0) = 8, z_{10}(0) = 3.
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

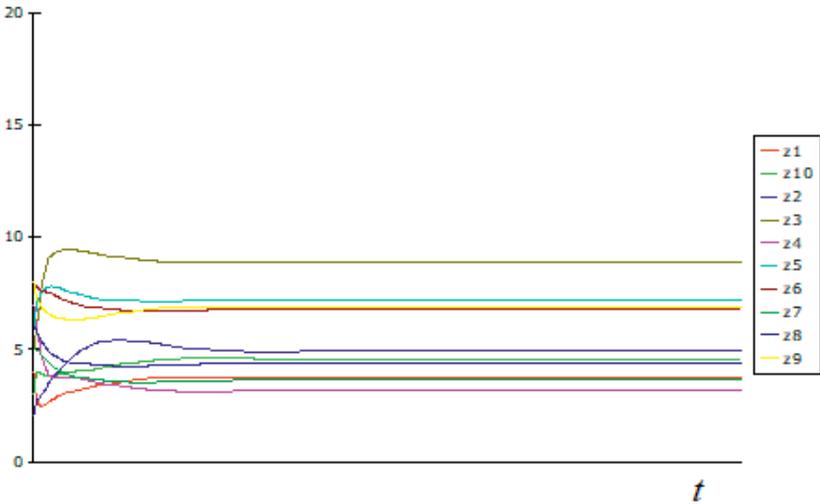


Рис. 54. Графики решений системы (84)–(86) первого типа

Из-за симметричности правил приема и отправки грузов (отправка грузов со станции i на станцию $i+1$ с определенной интенсивностью равносильна приему грузов на станции $i+1$ с той же интенсивностью) и условия (92) следует, что каждая станция принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной и одинаковой интенсивностью, т.е. в системе грузоперевозок, как и в случае идентичных станций, устанавливается стационарный поток (рис. 55). Величина этого по-

тока зависит как от параметров модели, так и от начальных значений, а точнее от их среднего арифметического \bar{c} . С помощью численных экспериментов исследуем эти зависимости.

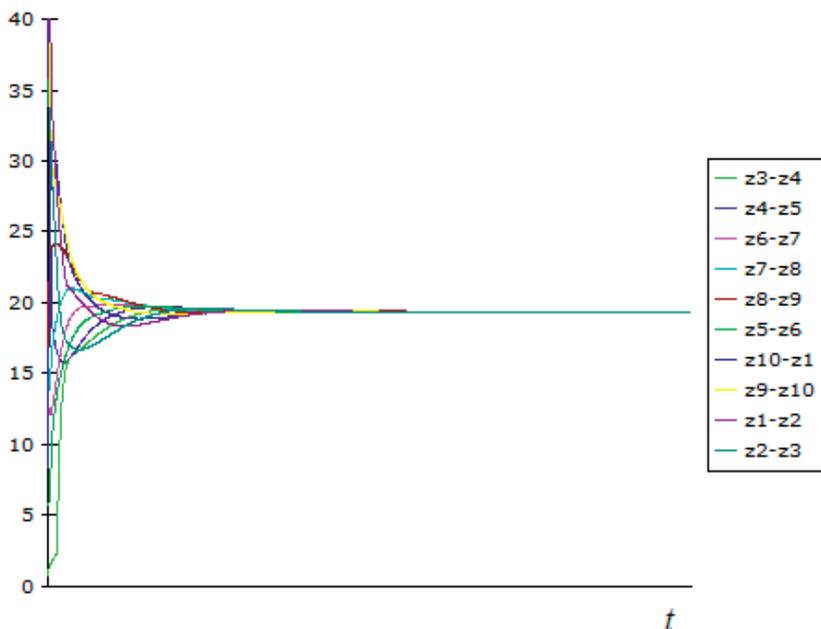


Рис. 55. Интенсивность потока в общем случае

Начнем с параметра α , который характеризует потенциал первой технологии. На рис. 56 приведен график зависимости интенсивности стационарного потока от α при фиксированных значениях остальных параметров и начальных значений (см. (93)).

Как мы видим, с увеличением параметра α растет интенсивность стационарного потока, а скорость ее роста уменьшается.

Перейдем к исследованию зависимости интенсивности стационарного потока от характеристик пропускной способности станций, т.е. от a_i и Δ_i .

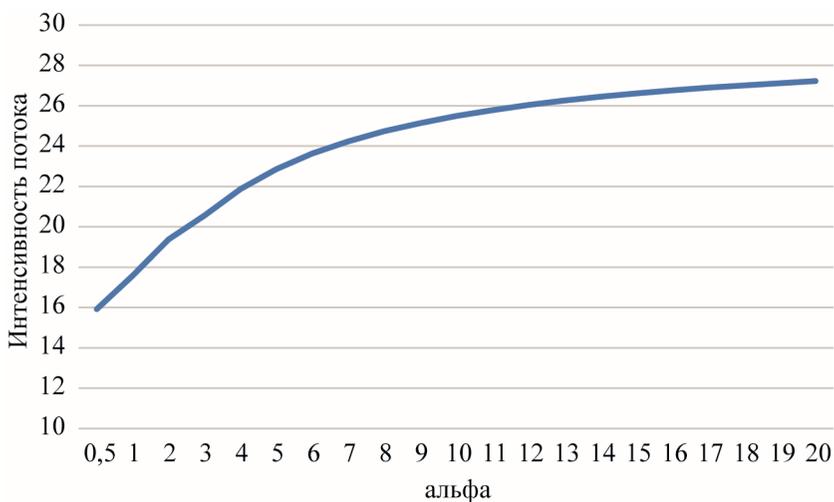


Рис. 56. График зависимости интенсивности стационарного потока от параметра α

Начнем с параметра a_i . На рис. 57, 58, 59 и 60 приведены графики зависимости интенсивности стационарного потока от a_2 , a_3 , a_4 и a_5 при фиксированных значениях остальных параметров и начальных условий.

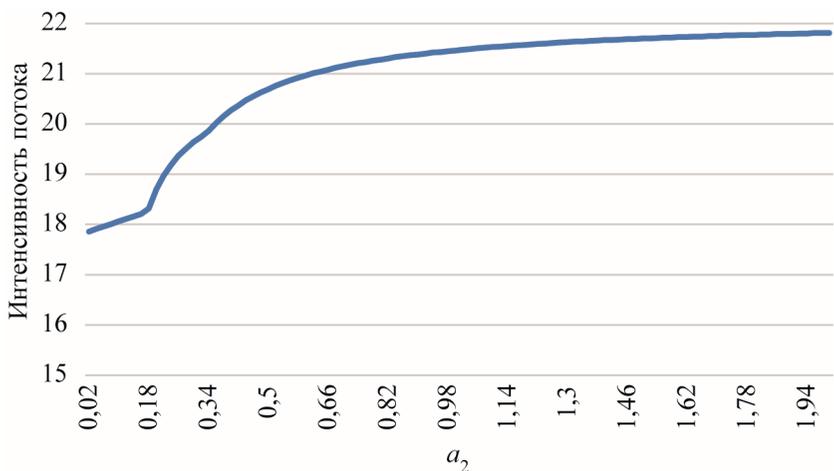


Рис. 57. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_2

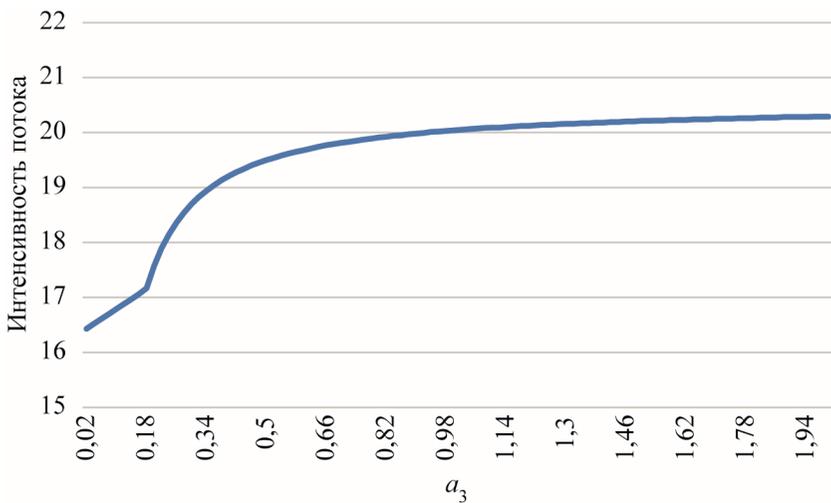


Рис. 58. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_3

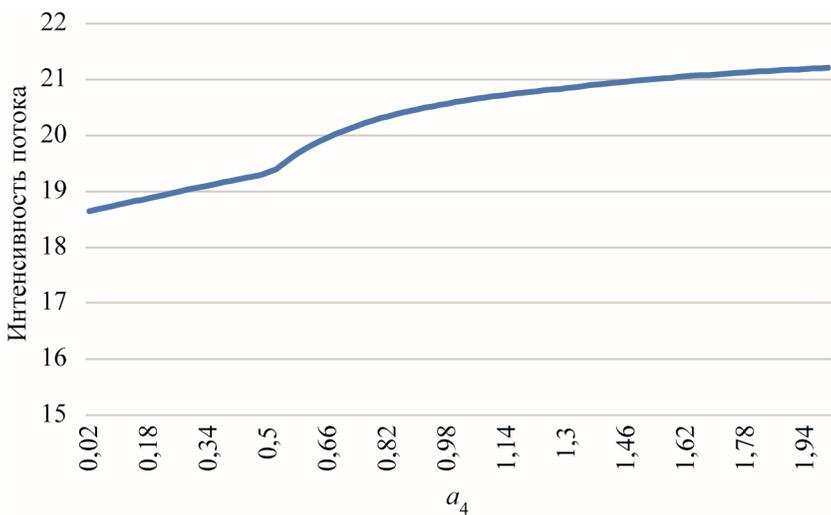


Рис. 59. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_4

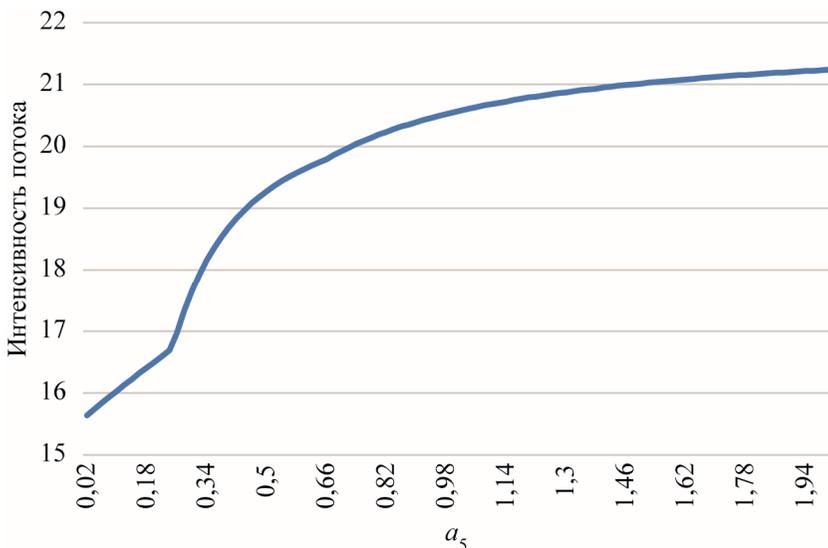


Рис. 60. График зависимости интенсивности стационарного потока от a_5

Анализ рис. 57–60 позволяет сделать следующий вывод: с увеличением параметра a_i растет поток, причем вначале скорость является постоянной, но, начиная с некоторого значения, резко увеличивается и становится убывающей. Таким образом, увеличение эффективности использования путей на некоторой выбранной станции до определенного уровня дает неплохой вклад в увеличение интенсивности потока во всей системе грузоперевозок. Однако в силу ограниченности пропускной способности на остальных станциях, дальнейшее увеличение эффективности путей на одной станции уже не может привести к ощутимому вкладу в увеличение интенсивности грузопотока.

Исследуем зависимость стационарного потока от числа путей Δ_i . На рис. 61, 62, 63 и 64 приведены графики указанной зависимости от числа путей на второй, третьей, четвертой и пятой станциях при фиксированных значениях остальных параметров и начальных условий. Анализ рис. 61–64 позволяет заключить, что данная зависимость является близкой к линейной.

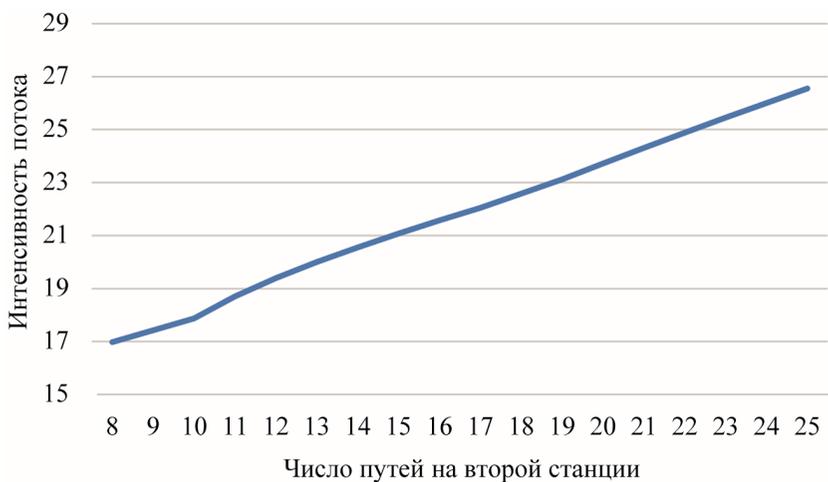


Рис. 61. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 2

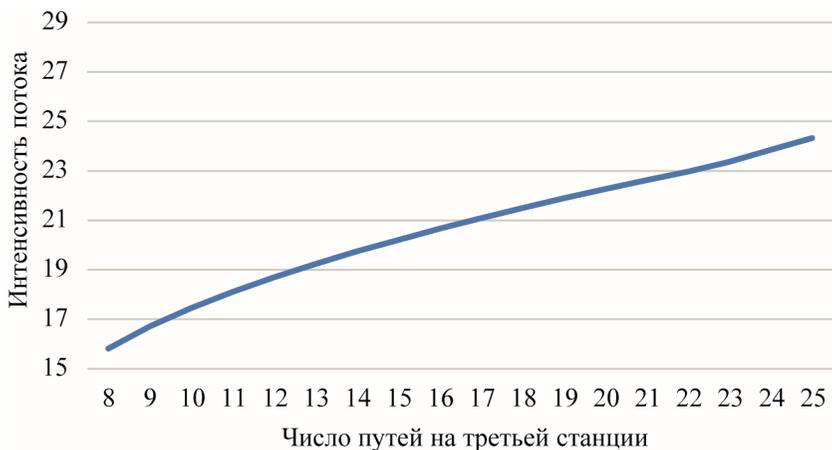


Рис. 62. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 3

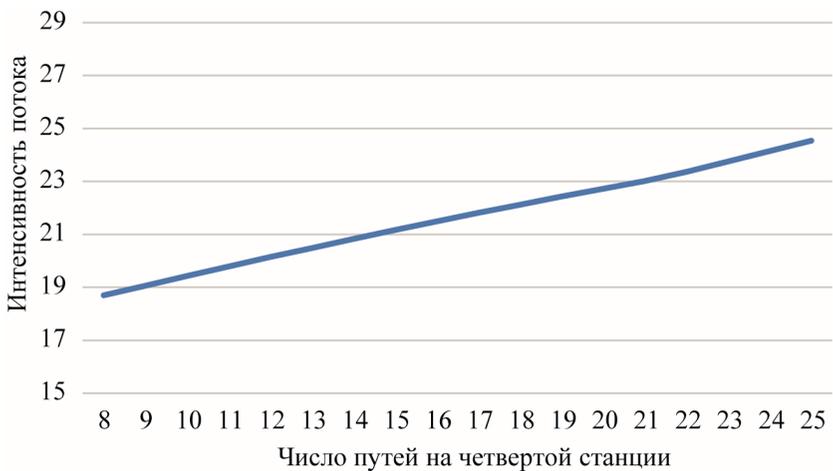


Рис. 63. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 4

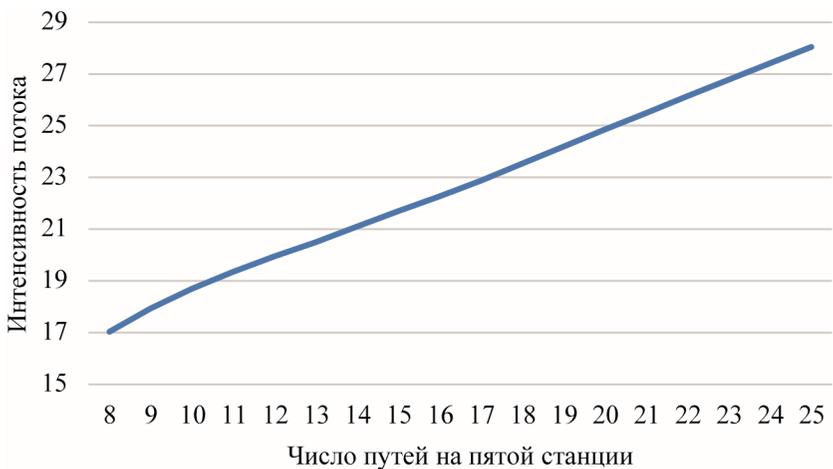


Рис. 64. График зависимости интенсивности стационарного потока от числа путей на станции с номером 5

При исследовании зависимости интенсивности стационарного потока от начальной загрузки станций \bar{c} эксперименты показали, что она является убывающей (рис. 65).



Рис. 65. График зависимости интенсивности стационарного потока от начальной загруженности станций

Максимальная начальная загруженность станций, равная 10.3, соответствует ситуации, когда в начальный момент времени на всех станциях задействованы все пути, т.е. $z_i(0) = \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае организация грузопотока в рамках данной модели невозможна. Она также невозможна в случае, когда в начальный момент времени на всех станциях все пути свободны, т.е. $z_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

3.2. Модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций с учетом случайных воздействий

Вернемся к модели (87)–(89), описывающей движение грузопотока по замкнутой цепочке станций с одинаковыми характеристиками. Напомним, что установившееся значение числа задействованных путей на станциях и интенсивности потока, проходящего через них не зависит от параметра $\alpha \geq 0$. Рассмотрим модификацию модели (87)–(89) при $\alpha = 0$, в которой интен-

сивность грузопотока содержит в себе как детерминированную, так и случайную составляющую (Хачатрян, 2020). Введем в рассмотрение параметр λ ($0 \leq \lambda \leq 1$), с помощью которого будем разделять влияние указанных составляющих в величине потока.

В первую очередь приведем правила, согласно которым происходит движение грузов. Произвольная станция с номером $i = 2, \dots, n-1$ принимает груз с $(i-1)$ -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_i) + (1-\lambda)\varepsilon_i\varphi(z_i)$ если $(i-1)$ -ая станция не пуста, и отправляет на $(i+1)$ -ую станцию с интенсивностью $\lambda\varphi(z_{i+1}) + (1-\lambda)\varepsilon_{i+1}\varphi(z_{i+1})$ если станция с номером i не пуста. Отметим, что ε_i – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Для станции с номером 1 предыдущей является станция с номером n , а для станции с номером n следующей является станция с номером 1. Следовательно, станция с номером 1 принимает груз с n -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_1) + (1-\lambda)\varepsilon_1\varphi(z_1)$ если n -ая станция не пуста, и отправляет на 2-ую станцию с интенсивностью $\lambda\varphi(z_2) + (1-\lambda)\varepsilon_2\varphi(z_2)$, если станция с номером 1 не пуста. Аналогично, станция с номером n принимает груз с $(n-1)$ -ой станции с интенсивностью $\lambda\varphi(z_n) + (1-\lambda)\varepsilon_n\varphi(z_n)$, если $(n-1)$ -ая станция не пуста, и отправляет на 1-ую станцию с интенсивностью $\lambda\varphi(z_1) + \varepsilon_1(1-\lambda)\varphi(z_1)$, если станция с номером n не пуста.

Таким образом, интенсивность движения грузов на станциях задается с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_1)\varphi(z_1)\text{sign}(z_n) - \\ & - (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_2)\varphi(z_2)\text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_i)\varphi(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \\ & - (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_{i+1})\varphi(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_n)\varphi(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \\ & - (\lambda + (1-\lambda)\varepsilon_1)\varphi(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (96)$$

Функция $\text{sign}(\cdot)$ определяется следующим образом:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Несложно заметить, что при $\lambda = 1$, т.е. в случае отсутствия случайной компоненты в формировании интенсивности потока, система уравнений (94)–(96) повторяет систему (87)–(89) при $\alpha = 0$. Напомним, что в этом случае число задействованных путей на всех станциях сходится к значению \bar{c} , представляющему собой усреднение начальных значений компонент решений системы (94)–(96), а интенсивность потока стремится к значению $\varphi(\bar{c})$.

Поэтому в дальнейшем рассмотрим систему (94)–(96) для $\lambda < 1$. Исследование ее решений проведено с помощью численной реализации, позволившей выявить динамику потока в зависимости от параметра λ и начальной загруженности станций.

Перейдем к изложению результатов численных экспериментов, в которых функция $\varphi(\cdot)$ была определена следующим образом

$$\varphi(z_i) = a(\Delta - z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что функция $\varphi(\cdot)$ должна быть убывающей и удовлетворять условию $\varphi(\Delta) = 0$. Параметр a , участвующий в определении этой функции, описывает эффективность использования путей на станциях.

Заметим, что компоненты произвольного решения системы (94)–(96) с фиксированными начальными условиями, т.е. функции $z_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ можно рассматривать как реализации однопараметрических случайных величин (параметр t), а в произвольной фиксированной точке t – как реализацию некоторой случайной величины. Для оценивания ее математического ожи-

дания и стандартного отклонения, а также ее зависимости от параметра λ проведена серия из 10 экспериментов для каждого из следующих значений параметра λ : 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, т.е. для каждого из указанных значений λ получено 10 решений системы (94)–(96) с одинаковыми начальными условиями. На основе этих экспериментов рассчитано выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение компонент решений (функций $z_i(\cdot)$) для каждого момента времени на заданном отрезке $[0, \tilde{t}]$ с определенным шагом (количество точек более 1000). Множество таких выборочных средних и выборочных стандартных отклонений представляют собой временные ряды. На рис. 66, 67 и 68 приведены графики указанных временных рядов, полученных на основе первой компоненты решения (функции $z_1(\cdot)$) при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$.

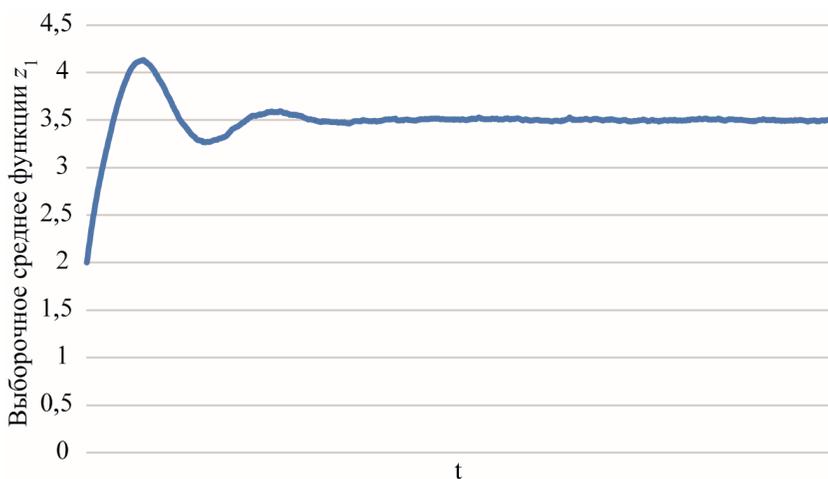


Рис. 66. Динамика выборочного среднего первой компоненты решения системы (94)–(96) при $\lambda = 0.8$

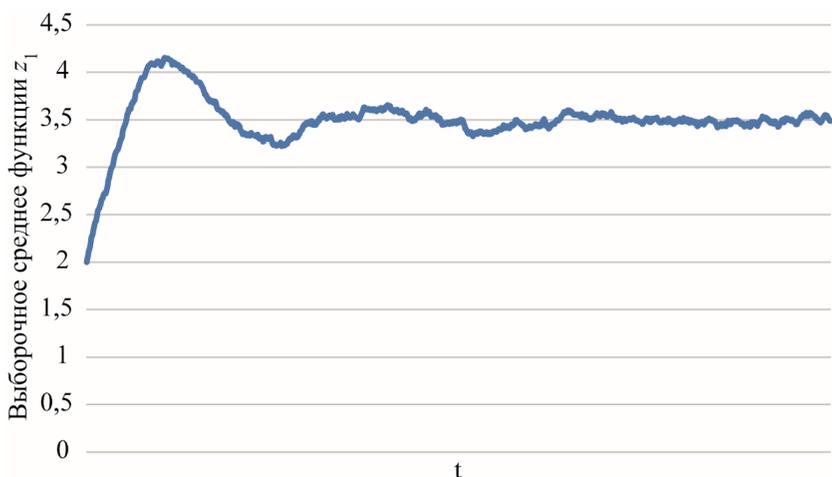


Рис. 67. Динамика выборочного среднего первой компоненты решения системы (94)–(96) при $\lambda = 0.2$

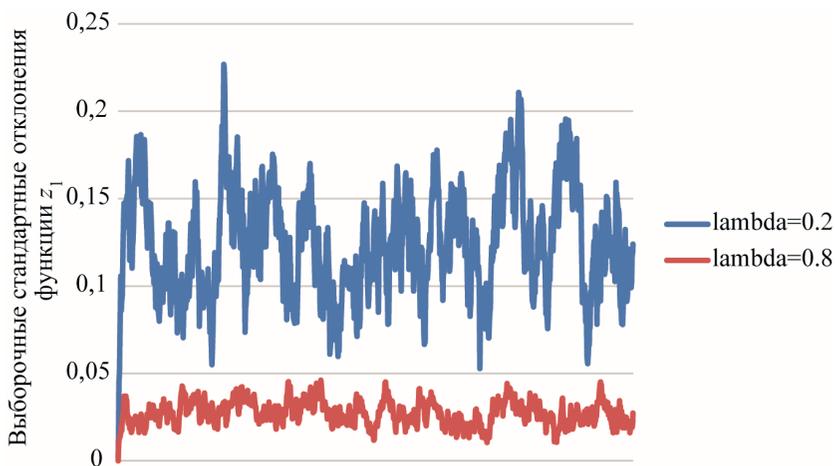


Рис. 68. Динамика выборочных стандартных отклонений первой компоненты решения системы (94)–(96) при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$

Несложно заметить, что временные ряды представленные на рис. 66 и рис. 67 колеблются в окрестности \bar{c} ($\bar{c} = 3.5$). Данные ряды, а также ряды, представленные на рис. 68, с помощью критерия Дики–Фуллера были проверены на стационарность.

Во всех случаях гипотезы о нестационарности ряда отвергаются на 1%-ом уровне значимости. Отметим, что аналогичные результаты получаются и для других компонент решений.

Перейдем к описанию потока, возникающего в железнодорожной сети. На рис. 69 и 70 приведены временные ряды, отражающие динамику выборочных средних интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2, а также динамику соответствующих выборочных стандартных отклонений при значениях параметра λ равных 0.8 и 0.2, соответственно. Отметим, что данные временные ряды также являются стационарными.

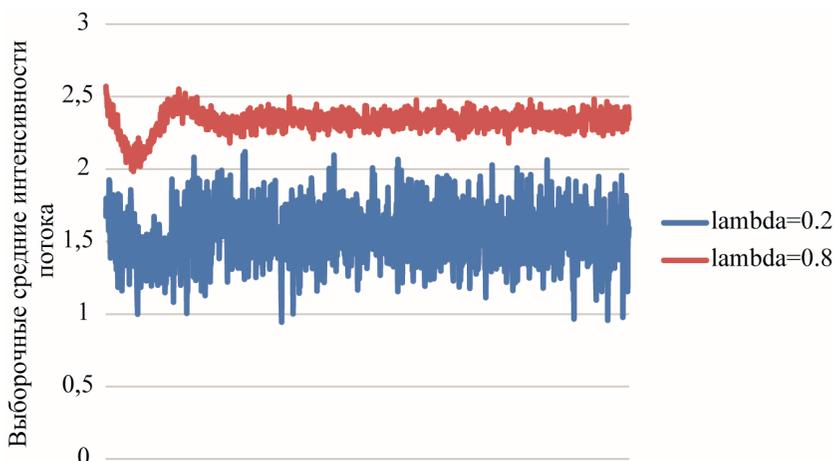


Рис. 69. Динамика выборочных средних интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2 при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$

Как и следовало ожидать с уменьшением λ (увеличение доли случайной компоненты в потоке) интенсивность потока уменьшается при одновременном увеличении ее стандартного отклонения. Многочисленные эксперименты показывают, что аналогичная динамика наблюдается и на других участках железнодорожной сети (между другими соседними станциями).

В завершение приведем зависимость выборочного среднего и выборочного стандартного отклонения временных рядов, описывающих усреднение по результатам 10 экспериментов решений системы (94)–(96) и интенсивности потоков, возникающих

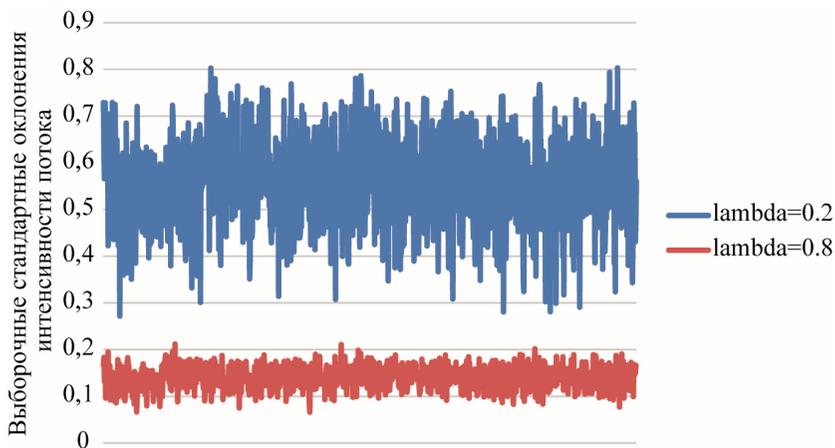


Рис. 70. Динамика выборочных стандартных отклонений интенсивности потока между станциями с номерами 1 и 2 при $\lambda = 0.8$ и $\lambda = 0.2$

в железнодорожной сети, а также их стандартных отклонений от параметра λ (рис. 71, рис. 72). Отметим, что данные характеристики рассчитываются с учетом того, что указанные временные ряды являются стационарными.

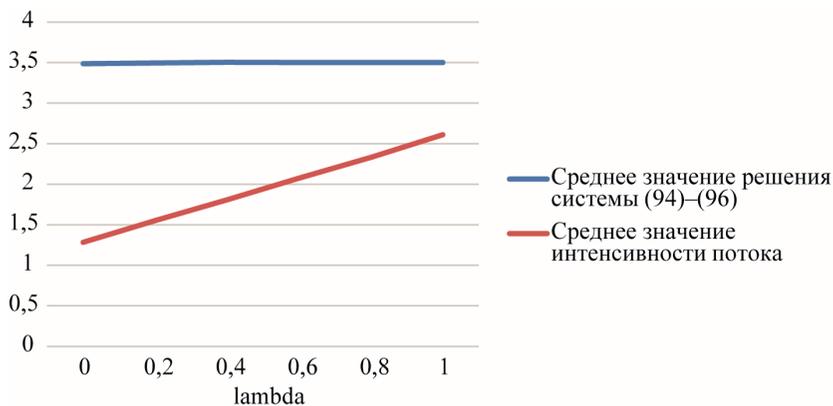


Рис. 71. Зависимость решения системы (94)–(96) и интенсивности потока от λ

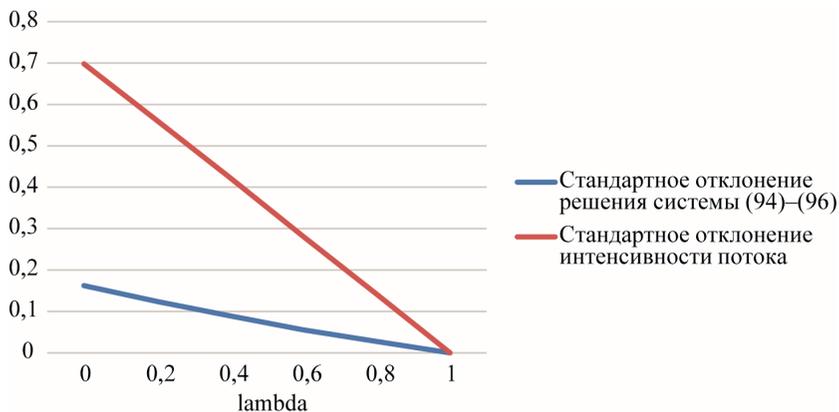


Рис. 72. Зависимость стандартного отклонения решения системы (94)–(96) и интенсивности потока от λ

Как следует из рис. 71 выборочное среднее ряда, являющегося усреднением решения системы (94)–(96), не зависит от λ и равно среднему арифметическому начальных условий. Величина потока линейно увеличивается по мере увеличения параметра λ . Из рис. 72 следует, что как выборочное стандартное отклонение усредненного решения, так и выборочное стандартное отклонение усредненного потока линейно убывают по параметру λ , причем скорость убывания последнего существенно выше.

3.3. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (случай идентичных станций)

Рассмотрим движение грузов на участке железнодорожной сети между двумя узловыми станциями, соединенными между собой множеством промежуточных станций. Обозначив через m число промежуточных станций, мы получаем следующее множество номеров станций $\{0, 1, \dots, m, m+1\}$, где 0 – номер начальной узловой станции, а $m+1$ – номер конечной узловой станции.

Обозначим через n_i число путей на станции с номером i . Предполагаем, что все пути используются с одинаковой степенью эффективности.

Рассмотрим дискретные моменты времени

$$t_0, t_1, t_2, \dots; t_k = t_{k-1} + \Delta t, k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\bar{V}_{ij}(t_k)$ – объем грузов, принятых на j -ом пути i -ой станции за отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$, а $\bar{\bar{V}}_{ij}(t_k)$ – объем грузов, отправленных с j -ого пути i -ой станции за отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$. Обозначим

$$x_{ij}(t_k) = \begin{cases} \frac{\bar{V}_{ij}(t_k) - \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k)}{\bar{V}_{ij}(t_k)}, & \text{если } \bar{V}_{ij}(t_k) > \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k) \\ 0, & \text{если } \bar{V}_{ij}(t_k) \leq \bar{\bar{V}}_{ij}(t_k). \end{cases}$$

Очевидно, что

$$0 \leq x_{ij}(t_k) \leq 1, i = 0, 1, \dots, m+1; j = 1, 2, \dots, n_i$$

и характеризуют степень несогласованности между приемом и отправкой на j -ом пути i -ой станции в момент времени t_k . Обозначим

$$z_i(t_k) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}(t_k).$$

Также очевидно, что $0 \leq z_i(t_k) \leq 1$ и характеризует степень несогласованности между приемом и отправкой на i -ой станции в момент времени t_k .

Технический потенциал станции определяется максимально допустимым приростом степени несогласованности между приемом и отправкой грузов за единицу времени и задается неотрицательной убывающей функцией $\varphi(z)$ определенной на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющей условию $\varphi(1) = 0$.

Начальная узловая станция принимает грузы в зависимости от спроса на перевозки в рамках своего технического потенциала и

отправляет на следующую станцию в рамках ее технического потенциала. Каждая из промежуточных станций принимает грузы в рамках своего технического потенциала и отправляет в рамках технического потенциала следующей станции. Конечная узловая станция принимает грузы в рамках своего технического потенциала и распределяет в определенном режиме. С учетом сказанного, запишем систему конечно-разностных уравнений, описывающую изменение степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях.

$$z_0(t_k) = z_0(t_{k-1}) + \left[\min(d_0, \varphi(z_0(t_{k-1}))) - \lambda\varphi(z_1(t_{k-1})) \right] \Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (97)$$

$$z_i(t_k) = z_i(t_{k-1}) + \left[\lambda\varphi(z_i(t_{k-1})) - \lambda\varphi(z_{i+1}(t_{k-1})) \right] \Delta t, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (98)$$

$$z_{m+1}(t_k) = z_{m+1}(t_{k-1}) + \left[\lambda\varphi(z_{m+1}(t_{k-1})) - d_{m+1} \right] \Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (99)$$

$$0 \leq z_i(t_k) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (100)$$

Здесь $d_0 > 0$, $0 < \lambda \leq 1$, $d_{m+1} > 0$ – параметры модели:

d_0 – характеристика спроса на перевозки;

λ – характеристика степени использования технического потенциала станций;

d_{m+1} – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станцией.

Перейдем к непрерывному аналогу системы дискретно-разностных уравнений (97)–(100), представленному ниже

$$\dot{z}_0(t) = \min(d_0, \varphi(z_0(t))) - \lambda\varphi(z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (101)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda \left[\varphi(z_i(t)) - \varphi(z_{i+1}(t)) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (102)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda\varphi(z_{m+1}(t)) - d_{m+1}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (103)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (104)$$

Далее рассмотрим функцию $\varphi(z)$, задающую технический потенциал станций, следующего вида

$$\varphi(z) = a(1-z), \quad a > 0. \quad (105)$$

Параметр $a > 0$, участвующий в определении функции $\varphi(z)$, является характеристикой возможности станций по наращиванию грузопотока. Так как $\varphi(z) \leq a$ для всех $0 \leq z \leq 1$, то параметр d_0 , являющийся характеристикой спроса на перевозки и участвующий в уравнении (101), можно представить следующим образом:

$$d_0 = \mu a, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (106)$$

Параметр d_{m+1} , являющийся характеристикой режима распределения грузов с конечной узловой станции, представим следующим образом:

$$d_{m+1} = \gamma a, \quad \gamma > 0. \quad (107)$$

Перепишем систему (101)–(104), в которой функция $\varphi(z)$ определена согласно (105), а параметры d_0 и d_{m+1} – согласно (106) и (107) соответственно.

$$\dot{z}_0(t) = \min(\mu a, a(1-z_0(t))) - \lambda a(1-z_1(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (108)$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda a(z_{i+1}(t) - z_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (109)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \lambda a(1 - z_{m+1}(t)) - \gamma a, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (110)$$

$$0 \leq z_i(t) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (111)$$

Здесь μ , a , λ , γ – параметры модели:

μ ($0 < \mu \leq 1$) – характеристика диапазона спроса на перевозки, который может быть удовлетворен при имеющемся техническом потенциале станций;

a ($a > 0$) – характеристика возможности станции по наращиванию грузопотока;

λ ($0 < \lambda \leq 1$) – характеристика степени использования технического потенциала станций;

γ ($\gamma > 0$) – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Приведем основные задачи исследования:

– определить диапазоны изменения параметров μ , a , λ , γ , при которых система грузоперевозок может бесперебойно функционировать, т.е. система (108)–(111) имеет решение, описать качественное поведение решений в зависимости от параметров;

– для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки (параметр μ) установить наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях, за счет управления значениями следующих характеристик: возможность станций по наращиванию грузопотока (параметр a), степень использования технического потенциала станций (параметр λ) и режим распределения грузов с конечной узловой станции (параметр γ).

3.3.1. Исследование решений системы (108)–(111)

Изучение множества решений системы (108)–(111) начнем с исследования всех решений системы дифференциальных уравнений (108)–(110).

В первую очередь выделим стационарные решения системы (108)–(110). С помощью непосредственной проверки можно убедиться в справедливости следующего утверждения

Утверждение 3. Система (108)–(110) при любых значениях параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad \gamma > 0$$

таких, что $\gamma \leq \mu$ имеет стационарные решения:

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \gamma, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\gamma}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } \gamma < \mu; \quad (112)$$

$$z_0(\cdot) \leq 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad \text{при } \gamma = \mu. \quad (113)$$

При $\gamma > \mu$ система (108)–(110) не имеет стационарных решений. ■

Перейдем к исследованию остальных решений системы (108)–(110).

Теорема 4. Произвольное решение системы (108)–(110) при $\gamma < \mu$ со временем выходит на стационарную траекторию (112), а при $\gamma = \mu$ на одну из стационарных траекторий (113).

При $\gamma > \mu$ координаты $z_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, t+1$ решения системы (108)–(110) со временем выходят на стационарный режим, указанный в (112), а функция $z_0(\cdot)$ становится линейно убывающей.

Доказательство в приложении 2. ■

Перейдем к изучению решений системы (108)–(110), удовлетворяющих ограничениям (111).

Лемма 8. Для всех значений параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и λ , $\gamma \leq \lambda \leq 1$ компоненты $z_1(\cdot)$, $z_2(\cdot), \dots, z_{m+1}(\cdot)$ произвольного решения системы (108)–(110), удовлетворяющие ограничениям (111) в начальный момент времени, будут удовлетворять им и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем аналогичную лемму и для нулевой компоненты решения системы (108)–(110).

Лемма 9. Для всех значений параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}(\mu, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$ такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ нулевая компонента $z_0(\cdot)$ произвольного решения системы (108)–(110) удовлетворяющая ограничению (111) в начальный момент времени, удовлетворяет ему и в последующие моменты времени.

Доказательство в приложении 2. ■

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 5. Для любых начальных значений $0 \leq z_i(t_0) \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, t+1$, параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}(\mu, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$, такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ решение системы (108)–(111) существует и сходится к стационарному режиму.

нарному решению (112) (при $\gamma < \mu$) или к одному из стационарных решений (113), одинаковому для всех γ и a (при $\gamma = \mu$).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 4, леммы 8 и леммы 9. ■

Следствие 1. Система дифференциальных уравнений (108)–(111) имеет глобально устойчивое стационарное решение (112) и семейство устойчивых решений вида (113).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 5. ■

3.3.2. Примеры решений системы (108)–(111)

Рассмотрим несколько примеров решений системы (108)–(111). Во всех приведенных ниже примерах число станций равно 10 (начальная узловая станция, восемь промежуточных станций, конечная узловая станция), значения параметров μ , a и начальные условия зафиксированы и принимают следующие значения:

$$\mu = 0.6, \quad a = 1.5 \quad (114)$$

$$\begin{aligned} z_0(t_0) = 0.4, \quad z_1(t_0) = 0.2, \quad z_2(t_0) = 0.1, \quad z_3(t_0) = 0.4, \quad z_4(t_0) = 0.7, \\ z_5(t_0) = 0.1, \quad z_6(t_0) = 0.2, \quad z_7(t_0) = 0.3, \\ z_8(t_0) = 0.5, \quad z_9(t_0) = 0.3 \end{aligned} \quad (115)$$

Согласно теореме 5 для любых начальных значений, удовлетворяющих условию (111), параметров $a > 0$, $\gamma > 0$ и μ , $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}$ ($\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$), зависящее от начальных условий и параметра μ , такое, что для всех λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ решение системы (108)–(111) существует. Расчеты показали, что для указанных выше начальных условий (115) и параметра μ (114) $\tilde{\lambda}$ принимает значение равное 0.898 ($\tilde{\lambda} = 0.898$). Характер решения системы (108)–(111) зависит от значения параметра γ . В зависимости от того, меньше ли оно значения параметра μ или равно ему, различают два типа решений системы (108)–(111).

Начнем с первого случая ($\gamma < \mu$). На рис. 73, 74 и 75 приведены графики решений системы (108)–(111) при фиксированном значении параметра γ ($\gamma = 0.5$) и трех разных значений параметра λ : два на концах отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ и одно во внутренней точке.

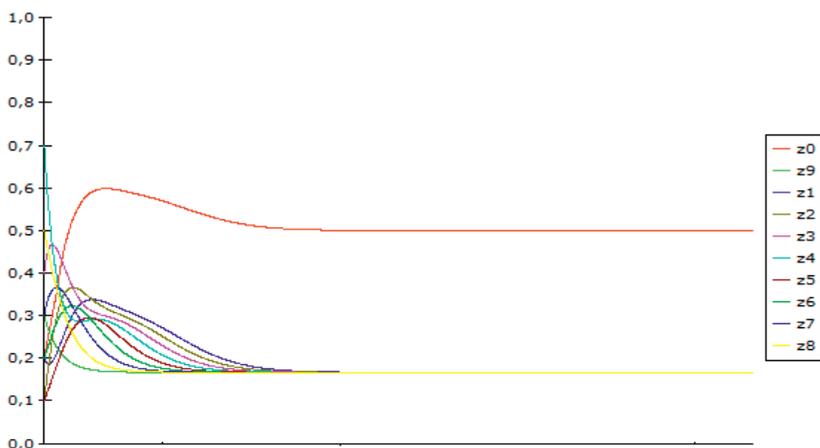


Рис. 73. График решения системы (108)–(111)
($\gamma = 0.5, \mu = \lambda = 0.6$)

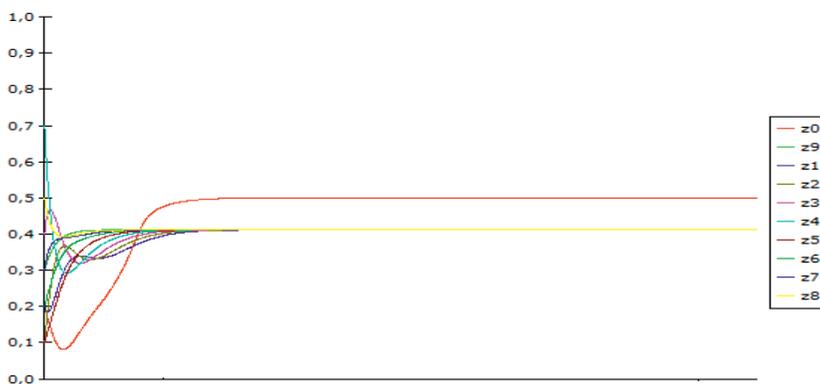


Рис. 74. График решения системы (108)–(111).
($\gamma = 0.5, \mu = 0.6, \lambda = 0.85$)



Рис. 75. График решения системы (108)–(111)
 $(\gamma = 0.5, \mu = 0.6, \lambda = \tilde{\lambda} = 0.898)$

Отметим, что в силу глобальной устойчивости стационарного решения (112) асимптотическое поведение решений, показанных на рисунках 73–75 не меняется при изменении начальных значений. Эти рисунки наглядно показывают, что установившийся режим для нулевой компоненты решения системы (108)–(111) не зависит от параметра λ , а для остальных компонент увеличение параметра λ приводит к их асимптотическому увеличению. Напомним, что компоненты решения системы (108)–(111) определяют динамику степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях. Следовательно, в данном случае вопрос выбора параметра λ определяется однозначно, его значение следует взять равным значению параметра μ .

Перейдем ко второму случаю ($\gamma = \mu$). На рис. 76, 77 и 78 приведены графики решений системы (108)–(111) при $\gamma = 0.6$ и тех же самых значениях параметра λ , что и для предыдущего случая.

Сравнивая рисунки 76, 77 и 78, можно заметить, что увеличение значения параметра λ приводит к асимптотическому уменьшению нулевой компоненты решения системы (108)–(111) в отличие от первого случая. Остальные компоненты решения, как и в первом случае, с увеличением значения параметра λ

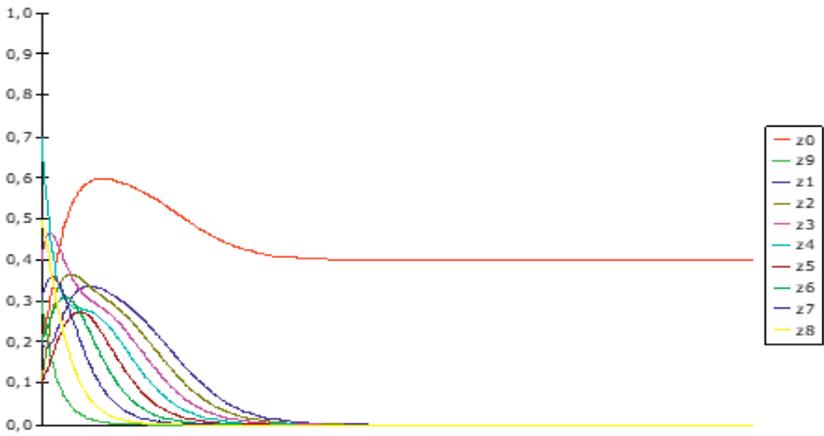


Рис. 76. График решения системы (108)–(111)
 $\gamma = \lambda = \mu = 0.6$

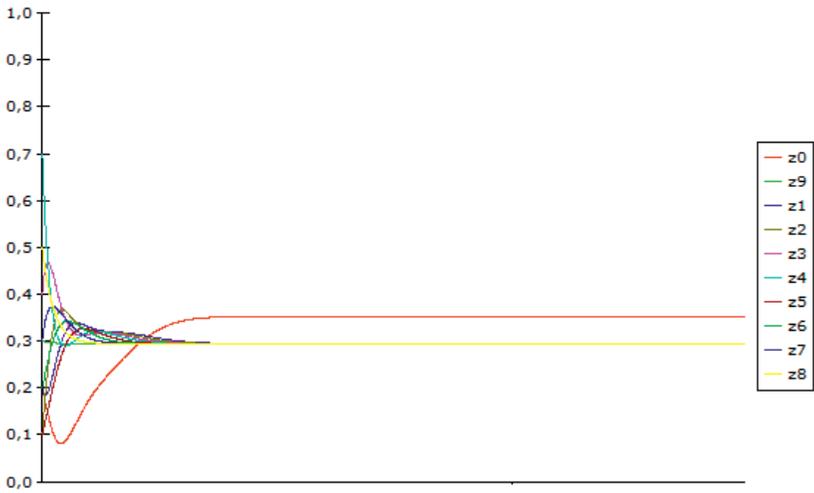


Рис. 77. График решения системы (108)–(111)
 $\gamma = \mu = 0.6, \lambda = 0.85$

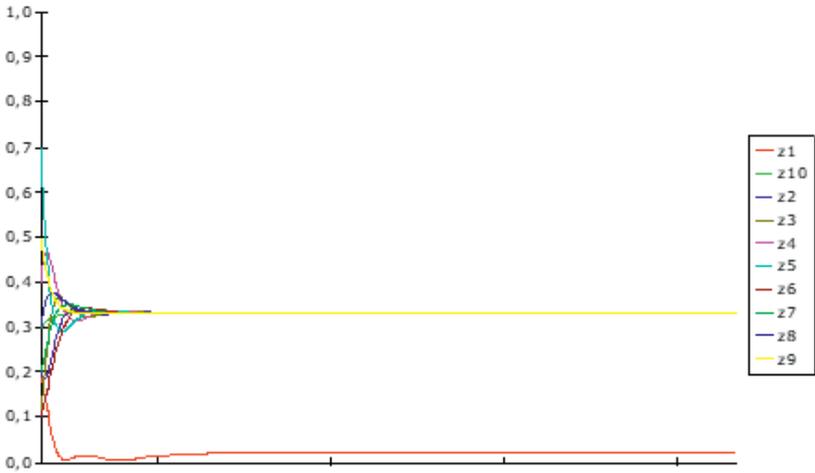


Рис. 78. График решения системы (108)–(111)

$$\gamma = \mu = 0.6, \quad \lambda = \tilde{\lambda} = 0.898$$

асимптотически увеличиваются. Это означает, что в данном случае, управляя параметром λ , можно установить нужную степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях (в том числе и на нулевой станции). Если взять λ равным μ , то со временем степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях кроме нулевой станет равной нулю, а на нулевой станции – $1 - \mu$. Если значение μ близко к единице, то такой выбор параметра λ будет оптимальным. В противном случае, все будет зависеть от конкретного значения параметра μ , а также от того, насколько важно в той или иной ситуации уменьшение степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на начальной узловой станции за счет увеличения данной характеристики на остальных станциях.

Сравнивая между собой рисунки 73 и 76, рисунки 74 и 77, а также рисунки 75 и 78, можно заключить, что с точки зрения минимизации степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях целесообразно параметр γ взять равным параметру μ . Это означает, что режим распределения грузов

с конечной узловой станции необходимо согласовать с характеристикой спроса на перевозки.

3.3.3. Исследование области притяжения стационарных решений системы (108)–(111) вида (113)

Согласно следствию 1, система дифференциальных уравнений (108)–(111) имеет глобально устойчивое стационарное решение (112) и семейство устойчивых решений вида (113). Выделим из этого семейства следующее стационарное решение

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1. \quad (116)$$

Как показали численные эксперименты данное стационарное решение в отличие от других стационарных решений вида (113), представленных ниже

$$z_0(\cdot) < 1 - \mu, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, m + 1 \quad (117)$$

и являющихся локально устойчивыми, имеет определенную область притяжения.

Обозначим

$$\tilde{c}(\mu, \lambda) = \frac{(m+1)(1 - \mu/\lambda) + 1 - \mu}{m+2}.$$

Анализ большого количества численных экспериментов позволил описать область притяжения стационарного решения (116). Результаты данного анализа приведем в следующем утверждении.

Утверждение 4.

Для любых значений параметров $0 < \mu \leq 1$, $a > 0$, $\mu \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$, $\gamma = \mu$ решение системы (108)–(111) сходится к стационарному решению (116), если начальные значения удовлетворяют условию

$$z_i(t_0) \geq \tilde{c}(\mu, \lambda), \quad i = 0, 1, \dots, m + 1.$$

В противном случае, т.е. если выполняется условие $z_i(t_0) \leq \tilde{c}(\mu, \lambda)$, $i = 0, 1, \dots, m+1$ и $\exists \bar{i} \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, такой, что

$$z_i(t_0) < \tilde{c}(\mu, \lambda),$$

то решение системы (108)–(111) сходится к одному из стационарных решений (117). ■

3.4. Модель организации грузоперевозок между узловыми станциями (общий случай)

Перейдем к модификации модели, представленной в параграфе 3.3. В отличие от исходной модели она описывает общий случай, т.е. предполагается, что станции имеют разные технические потенциалы. Технический потенциал произвольной станции с номером i , $i = 0, 1, \dots, m+1$ определяется максимально допустимым приростом степени несогласованности между приемом и отправкой на данной станции за единицу времени и задается непрерывной убывающей функцией $\varphi_i(z)$, определенной на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющей условию $\varphi_i(1) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, m+1$. Начальная узловая станция принимает грузы в зависимости от спроса на перевозки в рамках своего технического потенциала. Отправка груза с произвольной станции с номером i , $i = 0, 1, \dots, m$ на следующую станцию (с номером $i+1$) производится с учетом объема грузов на данной станции и технического потенциала следующей станции. Отметим, что отправка грузов со станции с номером i на следующую станцию (с номером $i+1$) равносильна приему грузов на $i+1$ -ой станции с предыдущей станции (с номером i). Конечная узловая станция распределяет грузы с определенной интенсивностью, зависящей от объема грузов на ней.

С учетом сказанного, запишем систему конечно-разностных уравнений, описывающую изменение степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на станциях.

$$\begin{aligned}
z_0(t_k) &= z_0(t_{k-1}) + [\min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))) - \\
&\quad - \min(z_0(t_{k-1}) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))))], \\
&\quad \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1})) \Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{118}$$

$$0 \leq z_0(t_k) \leq 1, \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
z_1(t_k) &= z_1(t_{k-1}) + [\min(z_0(t_{k-1}) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))))], \\
&\quad \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1})) - \min(z_1(t_{k-1}) + \min(z_0(t_{k-1}) + \\
&\quad + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1}))), \\
&\quad \lambda_2 \varphi_2(z_2(t_{k-1})) \Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{120}$$

$$0 \leq z_1(t_k) \leq 1, \tag{121}$$

.....

$$\begin{aligned}
z_i(t_k) &= z_i(t_{k-1}) + [\min(z_{i-1}(t_{k-1}) + \min(z_{i-2}(t_{k-1}) + \\
&\quad + \dots + \min(z_0(t_{k-1}) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))))], \\
&\quad \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1})), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t_{k-1})), \dots, \lambda_i \varphi_i(z_i(t_{k-1}))) - \\
&\quad - \min(z_i(t_{k-1}) + \min(z_{i-1}(t_{k-1}) + \dots + \min(z_0(t_{k-1}) + \\
&\quad + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1}))), \\
&\quad \lambda_2 \varphi_2(z_2(t_{k-1})), \dots, \lambda_{i+1} \varphi_{i+1}(z_{i+1}(t_{k-1}))) \Delta t, \\
&\quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{122}$$

$$0 \leq z_i(t_k) \leq 1, \tag{123}$$

.....

$$\begin{aligned}
z_{m+1}(t_k) &= z_{m+1}(t_{k-1}) + [\min(z_m(t_{k-1}) + \min(z_{m-1}(t_{k-1}) + \\
&\quad + \dots + \min(z_0(t_{k-1}) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))))], \\
&\quad \lambda_1 \varphi_1(z_1(t_{k-1})), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t_{k-1}))), \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{m+1}\varphi_{m+1}(z_{m+1}(t_{k-1})) - \min(z_{m+1}(t_{k-1}) + \\ & + \min(z_m(t_{k-1}) + \dots + \min(z_0(t_{k-1}) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t_{k-1}))), \lambda_1\varphi_1(z_1(t_{k-1}))), \\ & \lambda_2\varphi_2(z_2(t_{k-1}))), \dots, \lambda_{m+1}\varphi_{m+1}(z_{m+1}(t_{k-1}))), \\ & d_{m+1}]\Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{124}$$

$$0 \leq z_{m+1}(t_k) \leq 1, \tag{125}$$

Здесь $d_0 > 0$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, $d_{m+1} > 0$ – параметры модели:

d_0 – характеристика спроса на перевозки;

λ_i – характеристика степени использования технического потенциала станции с номером i ;

d_{m+1} – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Перейдем к непрерывному аналогу системы дискретно-разностных уравнений (118)–(125), представленному ниже

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))) - \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1\varphi_1(z_1(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1\varphi_1(z_1(t))) - \min(z_1(t) + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1\varphi_1(z_1(t))), \\ & \lambda_2\varphi_2(z_2(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \tag{127}$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \min(z_{i-1}(t) + \min(z_{i-2}(t) + \\ & + \dots + \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \varphi_1(z_1(t)), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t)), \dots, \lambda_i \varphi_i(z_i(t)) - \\ & - \min(z_i(t) + \min(z_{i-1}(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \\ & \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \lambda_{i+1} \varphi_{i+1}(z_{i+1}(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (128)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_{m+1}(t) = & \min(z_m(t) + \min(z_{m-1}(t) + \\ & + \dots + \min(z_0(t) + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \\ & \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \\ & \lambda_{m+1} \varphi_{m+1}(z_{m+1}(t))) - \min(z_{m+1}(t) + \\ & + \min(z_m(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\ & + \min(d_0, \varphi_0(z_0(t))), \lambda_1 \varphi_1(z_1(t))), \\ & \lambda_2 \varphi_2(z_2(t))), \dots, \lambda_{m+1} \varphi_{m+1}(z_{m+1}(t))), \\ & d_{m+1}), \quad t \in [t_0, +\infty) \end{aligned} \quad (129)$$

Отметим, что конструкция правых частей системы (126)–(129) гарантирует автоматическое выполнение условий, аналогичных условиям (119), (121), (123) и (125).

Аналитическое исследование системы (126)–(129) крайне затруднительно. В связи с этим она была исследована численно. Приведем результаты ее численного исследования для определенного класса функций $\varphi_i(z)$.

3.4.1. Результаты численных экспериментов

Перейдем к изложению результатов численной реализации системы (126)–(129), в которой функции $\varphi_i(z)$ были определены следующим образом:

$$\varphi_i(z_i) = a_i(1 - z_i), \quad i = 0, 1, \dots, m, m + 1. \quad (130)$$

Параметр $a_i > 0$, участвующий в определении функции $\varphi_i(z)$, является характеристикой возможности станции с номером i по наращиванию грузопотока. Из определения функции $\varphi_i(z)$ следует, что параметр d_0 , являющийся характеристикой спроса на перевозки, можно представить следующим образом:

$$d_0 = \mu a_0, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (131)$$

Перепишем систему дифференциальных уравнений (126)–(129), в которой функции $\varphi_i(z)$ определены согласно (130), а параметр d_0 – согласно (131).

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) = & \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))) - \\ & - \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \\ & \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \\ & \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))) - \min(z_1(t) + \min(z_0(t) + \\ & + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \\ & \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (133)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \min(z_{i-1}(t) + \min(z_{i-2}(t) \\ & + \dots + \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \\ & \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \lambda_i a_i(1 - z_i(t))) - \\ & - \min(z_i(t) + \min(z_{i-1}(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\ & + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \\ & \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \lambda_{i+1} a_{i+1}(1 - z_{i+1}(t))), \\ & t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \quad (134)$$

.....

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{m+1}(t) = & \min(z_m(t) + \min(z_{m-1}(t) + \\
& + \dots + \min(z_0(t) + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \\
& \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, \\
& \lambda_{m+1} a_{m+1}(1 - z_{m+1}(t))) - \min(z_{m+1}(t) + \\
& + \min(z_m(t) + \dots + \min(z_0(t) + \\
& + \min(\mu a_0, a_0(1 - z_0(t))), \lambda_1 a_1(1 - z_1(t))), \\
& \lambda_2 a_2(1 - z_2(t))), \dots, a_{m+1}(1 - z_{m+1}(t))), \\
& d_{m+1}), \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{135}
\end{aligned}$$

Здесь $\mu > 0$, $a_0 > 0$, $a_i > 0$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, m+1$, $d_{m+1} > 0$ – параметры модели:

μ – характеристика диапазона спроса на перевозки, который может быть удовлетворен при имеющемся техническом потенциале станций;

a_i , $i = 0, 1, \dots, m+1$ – характеристика возможности станции с номером i по наращиванию грузопотока;

λ_i – характеристика степени использования технического потенциала станции с номером i ;

d_{m+1} – характеристика режима распределения грузов с конечной узловой станции.

Отметим, что параметры λ_i , $i = 1, \dots, m+1$ и d_{m+1} в отличие от остальных являются управляемыми и могут быть определены на любом уровне внутри заданного диапазона в зависимости от значений остальных параметров.

Основная цель исследования системы (132)–(135): для заданных значений степеней несогласованности станций в начальный момент времени ($0 \leq z_i(t_0) \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, m+1$), характеристики спроса на грузоперевозки (параметр μ), характеристик возможности станций по наращиванию грузопотока (a_i , $i = 0, 1, \dots, m+1$)

определить такие значения степеней использования технического потенциала станций (параметры λ_i , $i = 1, 2, \dots, m+1$) и режима распределения грузов с конечной узловой станции, при которых степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях со временем будет минимальной.

Численная реализация системы дифференциальных уравнений (132)–(135) позволила исследовать свойства ее решений. Основным результатом данного исследования представим в виде следующих двух утверждений.

Утверждение 5. Система дифференциальных уравнений (132)–(135) имеет бесконечное множество стационарных решений вида

$$z_i(\cdot) \equiv c_i, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1,$$

и произвольное ее решение сходится к одному из них в зависимости от параметров μ , a_i , λ_i , $i = 0, 1, \dots, m+1$, d_{m+1} и начальных значений. ■

Введем обозначение

$$d = \lambda_k a_k = \min(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_{m+1} a_{m+1})$$

и выделим следующие стационарные решения системы (132)–(135):

$$z_i(\cdot) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, m+1; \quad (136)$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, \dots, m+1; \quad (137)$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, & i = 1, \dots, k-1 \\ 0, & i = k, \dots, m+1; \end{cases} \quad (138)$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{\lambda_k a_k}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_i a_i}, & i = 1, \dots, k-1 \\ 0, & i = k, \dots, m \end{cases},$$

$$0 \leq z_{m+1}(\cdot) \leq 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_{m+1} a_{m+1}}; \quad (139)$$

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{a_0}, \quad z_i(\cdot) \equiv 1 - \frac{d_{m+1}}{\lambda_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1. \quad (140)$$

Каждое из указанных стационарных решений существует при определенных условиях, которым должны удовлетворять параметры системы уравнений (132)–(135). Приведем эти условия:

$$d_0 < d \text{ и } d_0 < d_{m+1} \text{ (решение(136))}, \quad (141)$$

$$d < d_0 \text{ и } d < d_{m+1} \text{ (решение(137) и (138))}, \quad (142)$$

$$d_{m+1} < d_0 \text{ и } d_{m+1} < d \text{ (решение(138))}, \quad (143)$$

$$d_0 = d = d_{m+1} \text{ (решения(136), (137), (138), (139), (140))}. \quad (144)$$

Следующее утверждение уточняет характер решений системы уравнений (132)–(135).

Утверждение 6. *Для любых начальных значений*

$$0 \leq z_i(0) \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1,$$

параметров

$$0 < \mu \leq 1, \quad a_i > 0, \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad d_{m+1} > 0$$

решение системы (132)–(135) сходится к:

– *стационарному решению (136) при выполнении условия (141);*

– *стационарному решению (138) при выполнении условия (142);*

– *стационарному решению (140) при выполнении условия (143). ■*

На рис. 79, 80 и 81 показана сходимость к указанным стационарным решениям.

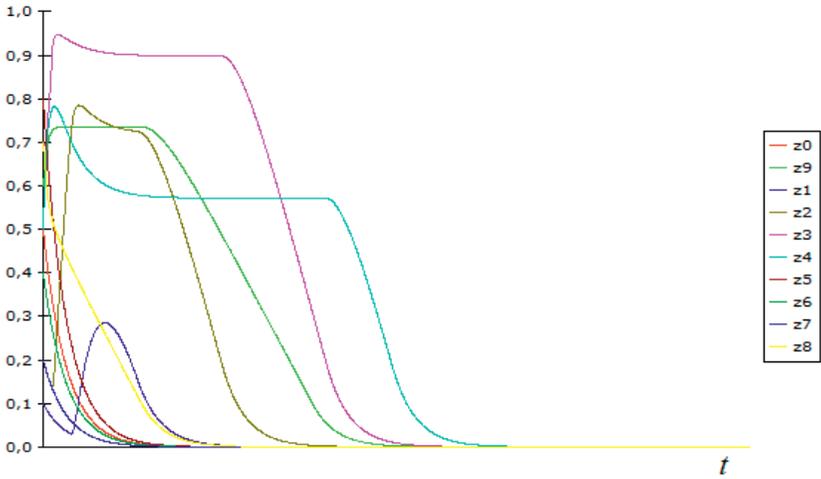


Рис. 79. Сходимость к стационарному решению (136)
 $(d_0 = 1.6, d = 1.8, d_{m+1} = 1.9)$

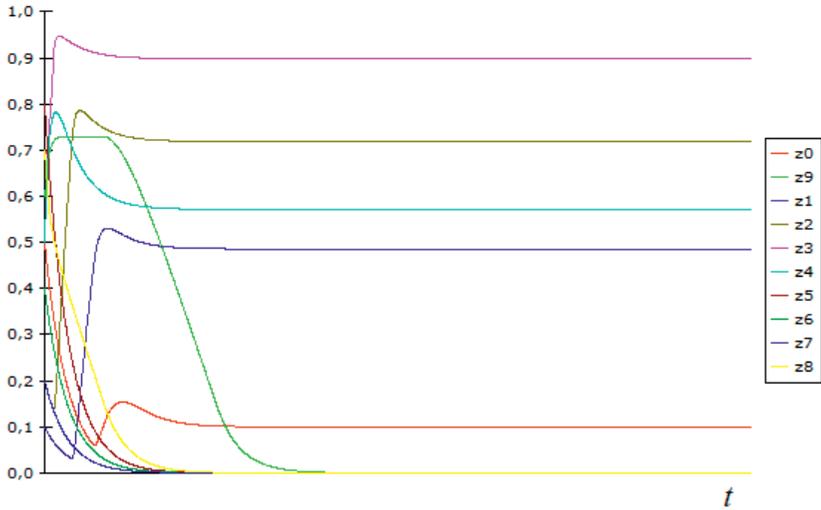


Рис. 80. Сходимость к стационарному решению (138)
 $(d_0 = 1.9, d = 1.8, d_{m+1} = 1.95)$

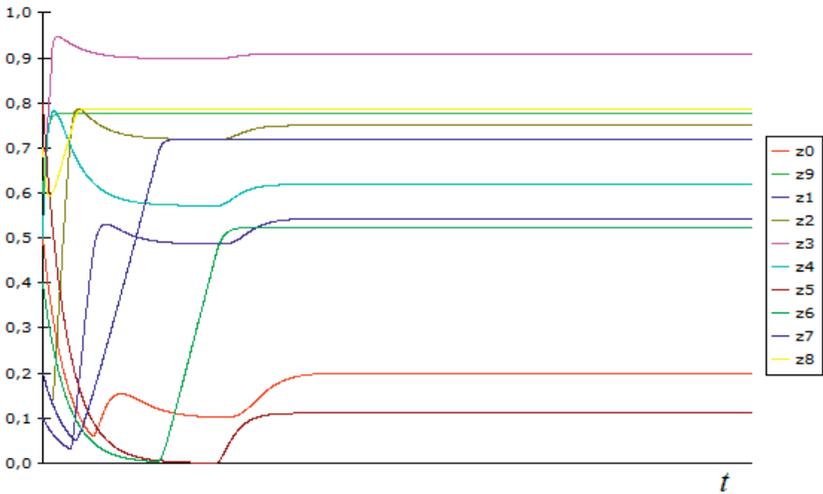


Рис. 81. Сходимость к стационарному решению (140)
 $(d_0 = 1.9, d = 1.8, d_{m+1} = 1.6)$

Таким образом, стационарные решения (136), (138) и (140) при выполнении соответствующих ограничений на параметры системы уравнений (132)–(135) (условия (141), (142) и (143)) являются глобально устойчивыми. Других глобально устойчивых стационарных решений система уравнений (132)–(135) не имеет.

Используя результат утверждения 6, определим такие значения параметров $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m + 1$ и d_{m+1} , при которых степень несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях со временем будет минимальной.

Опишем данную процедуру:

- а) определить $a_j = \min(a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$;
- б) параметру λ_j присвоить максимальное значение из заданного диапазона, т.е. $\lambda_j = 1$;
- в) остальные параметры λ_i определить следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{a_j}{a_i}, \quad i = 1, \dots, m + 1, \quad i \neq j;$$

д) подобрать d_{m+1} таким образом, чтобы

$$d_{m+1} \geq \max(d_0, d), \text{ где } d_0 = \mu a_0, d = a_j.$$

После выполнения данной процедуры параметры модели $\lambda_i, a_i, i = 1, 2, \dots, m+1$ и d_{m+1} будут удовлетворять следующим условиям:

$$\lambda_1 a_1 = \lambda_2 a_2 = \dots = \lambda_{m+1} a_{m+1} = d. \quad (145)$$

$$d_{m+1} \geq \max(d_0, d). \quad (146)$$

Из утверждения 6 следует, что при выполнении условий (145)–(146) произвольное решение системы (132)–(135) стремится к:

- стационарному решению (136), если $d_0 < d$;
- стационарному решению

$$z_0(\cdot) \equiv 1 - \frac{d}{a_0}, z_i(\cdot) \equiv 0, i = 1, \dots, m+1, \text{ если } d_0 > d. \quad (147)$$

Дальнейшее численное исследование системы (132)–(135) позволило получить более общий результат. Приведем его в следующем утверждении.

Утверждение 7. *Для любых начальных значений*

$$0 \leq z_i(0) \leq 1, i = 0, 1, \dots, m+1,$$

параметров

$$0 < \mu \leq 1, a_i > 0, 0 < \lambda_i \leq 1, i = 0, 1, \dots, m+1, d_{m+1} > 0,$$

удовлетворяющих условию (145)–(146) решение системы (132)–(135) сходится к:

- стационарному решению (136), если $d_0 < d$;
- стационарному решению (147) в противном случае. ■

Таким образом, управляя параметрами $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m+1$ и d_{m+1} (т.е. задав правильным образом степень использования технического потенциала станций и режим распределения грузов с конечной узловой станции), можно добиться того, что со временем степень несогласованности между приемом и отправкой грузов по крайней мере на всех станциях кроме начальной станет равна 0.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Формулировка некоторых определений и теорем

Для формулировки теорем, отражающих основные результаты, приведенные в параграфе 1.1 определим семейство банаховых пространств функций

$$L_{\mu}^1 C^{(k)}(R) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(R, R), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in R} x^{(r)}(t) \mu^{|t|} < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

с нормой

$$\|x\|_{\mu}^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in R} x^{(r)}(t) \mu^{|t|}.$$

Если прямую R заменить полупрямой $[0, +\infty)$, то получим определение пространства $L_{\mu}^1 C^k([0, +\infty))$.

Определим пространство $K^1 = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} R_i$, $R_i = R$, $i \in Z$ с элементами $\kappa = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, $x_i \in R$, $i \in Z$ и со стандартной топологией полного прямого произведения. В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K_{2\mu}^1 = \left\{ \kappa : \kappa \in K^1; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_R^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

с нормой

$$\|\kappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_R^2 \mu^{2|i|} \right]^{1/2}.$$

Обозначим

$$M(\tau) = \tau \max[2\alpha, L],$$

где L – константа Липшица функции $\varphi(\cdot)$, участвующей в уравнении (1), α – параметр участвующий в уравнении (1), а τ – характеристика системы контроля (нелокальные ограничения (2)).

Рассмотрим неравенство относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] < \ln \mu^{-1}. \quad (148)$$

Множество решений неравенства (148) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на следующем рисунке

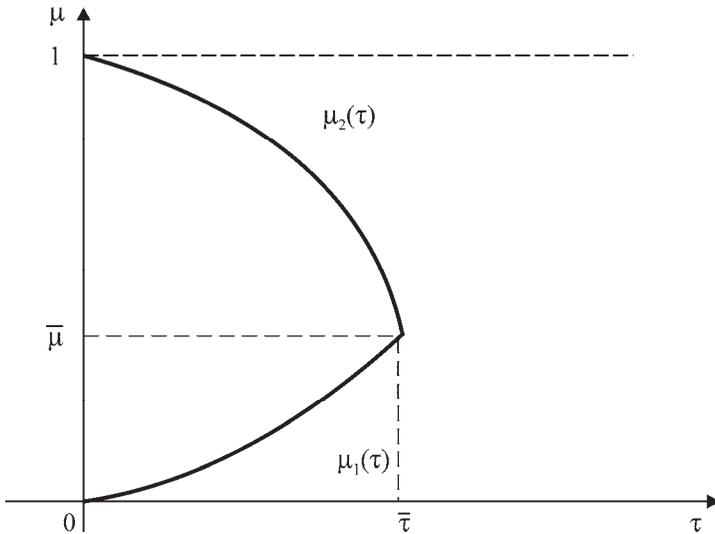


Рис. 82. Графики функций $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6 (Beklaryan, Khachatryan, 2006). Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in Z$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$ и характеристик τ , удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. рис.82), существует решение $\{z_i(\cdot)\}_{i \in Z}$ уравнения (1) типа бегущей волны (условие (2)) с характеристикой τ , удовлетворяющее начальному условию $z_i(\bar{t}) = a$. Более того, для всякого $i \in Z$ функция $z_i(\cdot)$ принадлежит пространству $L^1_{\sqrt{\mu}} C^{(0)}([0, +\infty))$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального ус-

ловия a в том смысле, что каждая координата $z_i(\cdot)$, $i \in Z$ непрерывно зависит от начального условия a как элемент пространства $L^1_{\sqrt{\mu}} C^{(0)}([0, +\infty))$. ■

Система (1)–(2) имеет два стационарных решения типа бегущей волны: $\bar{z}_1 \equiv \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$. Очевидно, что такие решения принадлежат пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (0, 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\mu^2 - (2\alpha + \delta)\mu + \alpha = 0, \quad (149)$$

где $\delta = -\varphi'(\Delta)$. Из определения функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\delta > 0$. Решениями уравнения (149) являются вещественные числа $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}$, причем $0 < \tilde{\lambda} < 1$, $\tilde{\tilde{\lambda}} > 1$.

Определение 6 (Beklaryan, Khachatryan, 2006). Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову, если существуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного $d \in K^1_{2\mu}$, удовлетворяющего условию $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \gamma$, решение $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_1 < \gamma$, что при $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \sigma_1$ решение $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

Устойчивое по Ляпунову стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Теорема 7 (Beklaryan, Khachatryan, 2006). Для любых α , $\delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, +\infty)$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ типа бегущей волны уравнения (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (\tilde{\lambda}, 1)$ является асимптотически устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 = \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ типа бегущей волны в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ является неустойчивым. ■

Обозначим

$$\tau_{\max} = \sup \{ \tau : \tau \leq \bar{\tau}, \mu_2(\tau) \geq \tilde{\lambda} \}.$$

На интервале $(0, \tau_{\max}]$ определяется функция $\lambda(\tau) = \max(\tilde{\lambda}, \mu_1(\tau))$, графически изображенная на рис. 83 (при $\tilde{\lambda} < \bar{\mu}$ – слева и при $\tilde{\lambda} > \bar{\mu}$ – справа).

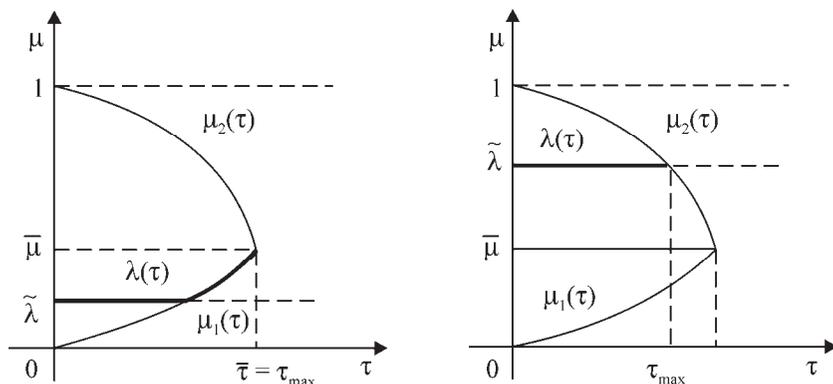


Рис. 83. График функции $\lambda(\tau)$

Определение 7 (Beklaryan, Khachatryan, 2006). Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i+1}$, $i \in Z$ типа бегущей волны системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ , если: оно устойчиво по Ляпунову; существ-

вуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного числа d_0 , удовлетворяющего условию $|d_0 - \bar{z}_0| < \gamma$, решение $z(t) = \{z_n(t)\}_{n \in Z}$ системы (1)–(2) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_2 < \gamma$ такое, что из условия $|d_0 - \bar{z}_0| < \sigma_2$ следует, что решение $z(t)$ системы (1)–(2) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

Устойчивое по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in Z}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i+1}$, $i \in Z$ системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (0, 1)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8 (Beklaryan, Khachatryan, 2006). *Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, \tau_{max})$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots\}$ типа бегущей волны системы уравнений (1) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\gamma \in (\lambda(\tau), \mu_2(\tau))$ является асимптотически устойчивым среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ . ■*

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательства основных теорем и лемм

В данном приложении приводятся доказательства основных теорем и лемм, приведенных в главах 1, 2 и 3.

Доказательство леммы 3 (параграф 1.2). Изучим собственные числа матрицы A , введенной в параграфе 1.2. Матрица A является симметрической и, следовательно, с ней связана некоторая квадратичная форма. Покажем, что квадратичная форма, определяемая матрицей A , будет отрицательно определенной. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра, согласно которому квадратичная форма будет отрицательно определенной, если угловые миноры матрицы A чередуют знаки начиная с отрицательного. Вычеркнув последнюю строку и последний столбец матрицы A , получим угловой минор $(n-1)$ -ого порядка. Обозначим его через $|B_{n-1}|$. Итак

$$|B_{n-1}| = \begin{vmatrix} -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что и другие угловые миноры, порядок m которых удовлетворяет условию $3 \leq m < n-1$, имеют аналогичный вид. Если разложить минор порядка m , обозначаемый через $|B_m|$ по первому столбцу, и положить $|B_0| = 1$, $|B_{-1}| = 0$, то получим следующее соотношение:

$$|B_m| = -(2\alpha + \delta)|B_{m-1}| - \alpha^2|B_{m-2}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (150)$$

Решим разностное уравнение (150) с использованием корней характеристического уравнения

$$x^2 + (2\alpha + \delta)x + \alpha^2 = 0. \quad (151)$$

Уравнение (151) имеет два действительных корня

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)\right).$$

Следовательно, разностное уравнение (150) имеет следующее решение

$$|B_m| = \frac{(-1)^m}{2^m} C_1 \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^m + \frac{1}{2^m} C_2 \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)\right)^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (152)$$

Для определения неизвестных констант C_1 и C_2 непосредственно вычислим определители первого и второго порядков, которые будут равны

$$|B_1| = -(2\alpha + \delta), \quad |B_2| = 3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2.$$

Подставив их значения в формулу (152), получим следующую систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} -\left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta\right)C_1 + \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)\right)C_2 = -2(2\alpha + \delta) \\ \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^2 C_1 + \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)\right)^2 C_2 = 4(3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2). \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет следующее решение

$$C_1 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta}{2\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)}{2\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}}.$$

Подставив выражения для C_1 и C_2 в (152), получим

$$|B_m| = \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} \left((-1)^m \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^{m+1} + \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta)\right)^{m+1} \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (153)$$

Так как по условию задачи $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, то несложно заметить, что $|B_m| < 0$ при нечетных значениях m и $|B_m| > 0$ при четных. Следовательно, все угловые миноры матрицы A кроме по-

следнего (определителя матрицы A) удовлетворяют критерию Сильвестра.

Перейдем к изучению определителя матрицы A . Как следует из постановки задачи, естественно предположить, что размерность матрицы A не меньше 4. Разложив определитель A по первому столбцу, получим

$$\begin{aligned}
 |A_n| &= -(2\alpha + \delta) |B_{n-1}| - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2\alpha + \delta) \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{n+1} \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2\alpha + \delta) & \alpha \end{vmatrix} = \\
 &= -(2\alpha + \delta) |B_{n-1}| - \alpha^2 |B_{n-2}| + (-1)^{n+1} \alpha^n + (-1)^{n+1} \alpha^n + (-1)^{2n+1} \alpha^2 |B_{n-2}| = \\
 &= -(2\alpha + \delta) |B_{n-1}| - 2\alpha^2 |B_{n-2}| - 2(-1)^n \alpha^n.
 \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующее соотношение

$$|A_n| = -(2\alpha + \delta) |B_{n-1}| - 2\alpha^2 |B_{n-2}| - 2(-1)^n \alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (154)$$

Учитывая (150), соотношение (154) можно переписать следующим образом

$$|A_n| = |B_n| - \alpha^2 |B_{n-2}| - 2(-1)^n \alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (155)$$

Подставив в правую часть (155) вместо $|B_n|$ и $|B_{n-2}|$ соответствующие выражения из (153) и сгруппировав слагаемые, получим

$$|A_n| = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta \right)^2 - \alpha^2 \right) (-1)^{n-2} \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + 2\alpha + \delta \right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta) \right)^2 - \alpha^2 \right) \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - (2\alpha + \delta) \right)^{n-1} \right] -$$

$$- 2(-1)^n \alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots$$

После несложных преобразований данное выражение можно привести к следующему виду

$$|A_n| = \frac{1}{2^n} \left[\left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + \delta + 2\alpha \right)^n (-1)^{n-2} + \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - \delta - 2\alpha \right)^n \right] -$$

$$- 2(-1)^n \alpha^n, \quad n = 4, 5, \dots \quad (156)$$

Для всех $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ правая часть соотношения (156) является непрерывной функцией от переменных α и δ . Обозначим данную функцию через $g(\alpha, \delta)$. Вычислим производную функции $g(\alpha, \delta)$ по переменной δ

$$\frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1}{2^n} \left[n \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} + \delta + 2\alpha \right)^{n-1} \left(\frac{2\alpha + \delta}{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} + 1 \right) (-1)^{n-2} + \right.$$

$$\left. + n \left(\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2} - \delta - 2\alpha \right)^{n-1} \left(\frac{2\alpha + \delta}{\sqrt{4\alpha\delta + \delta^2}} - 1 \right) \right], \quad n = 4, 5, \dots$$

Несложно заметить, что

$$\frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} > 0 \quad \text{при четных } n$$

и

$$\frac{\partial g(\alpha, \delta)}{\partial \delta} < 0 \quad \text{при нечетных.}$$

Кроме того

$$g(\alpha, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0+.$$

Таким образом, для произвольных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ функция $g(\alpha, \delta)$ принимает положительные значения при четных n и отрицательные значения при нечетных. Это означает, что определитель матрицы A (угловой минор наиболее высокого порядка) принимает отрицательные значения, если размерность матрицы A нечетная и положительные значения в случае четной размерности. Ранее было показано, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ все угловые миноры матрицы A меньшего порядка удовлетворяют критерию Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы, заданной матрицей A . ■

Доказательство теоремы 3 (параграф 2.3). Рассмотрим первую компоненту решения системы дифференциальных уравнений (37)–(39), т.е. функцию $z_0(\cdot)$. Данная функция является либо ограниченной, либо неограниченной. Предположим, что она является неограниченной сверху. Тогда существует последовательность $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_0(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_0(t_n) > 0.$$

Тогда из уравнения (37) и, в частности, из определения функции $\varphi_0(\cdot)$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t_n) > 0,$$

а также выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_1(t_n) - z_0(t_n)] > 0. \quad (157)$$

Из неравенства (157) и первого уравнения системы дифференциальных уравнений (38) также следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_2(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_2(t_n) > 0,$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_2(t_n) - z_1(t_n)] > 0.$$

Действуя по индукции, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{m+1}(t_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_{m+1}(t_n) > 0, \quad (158)$$

и выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [z_{m+1}(t_n) - z_m(t_n)] > 0. \quad (159)$$

Из соотношений (158)–(159) следует, что левая часть уравнения (39) положительна, а правая – отрицательна. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_0(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_0(\cdot)$ не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Итак, функция $z_0(\cdot)$ является ограниченной.

Докажем, что остальные компоненты решения системы дифференциальных уравнений (37)–(39) также будут ограниченными. Начнем с функции $z_1(\cdot)$. Предположим, что данная функция является неограниченной сверху. Тогда существует последовательность $\{t'_n\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1(t'_n) = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}_1(t'_n) > 0.$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве ограниченности функции $z_0(\cdot)$, можно показать, что имеют место соотношения (158) и (159), где последовательность $\{t_n\}$ будет заменена последовательностью $\{t'_n\}$. Следовательно, для выбранной последовательности $\{t'_n\}$ левая часть дифференциального уравнения (39) будет положительной, а правая – отрицательной. Данное противоречие связано с предположением о неограниченности функции $z_1(\cdot)$ сверху. Таким образом, функция $z_1(\cdot)$ также не может быть неограниченной сверху. Точно так же можно показать, что она не может быть неограниченной снизу. Методом индукции, пользуясь системой дифференциальных уравнений (38)–(39) можно показать ограниченность функций $z_i(\cdot)$, $i = 2, 3, \dots, m+1$. ■

Доказательство теоремы 4 (параграф 3.3). Найдем общее решение системы (108)–(110). Начнем с последнего уравнения, которое содержит одну переменную (z_{m+1}). Перепишем его в следующем виде

$$\dot{z}_{m+1}(t) + \lambda a z_{m+1}(t) = (\lambda - \gamma)a. \quad (160)$$

Несложно проверить, что линейное уравнение (160) имеет следующее общее решение

$$z_{m+1}(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + c_{m+1}e^{-\lambda at}. \quad (161)$$

Подставляя выражение для z_{m+1} из (161) в предпоследнее уравнение системы (108)–(110), найдем его общее решение. Оно имеет следующий вид

$$z_m(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + e^{-\lambda at} (\lambda a c_{m+1} t + c_m). \quad (162)$$

Аналогичным образом найдем общие решения всех остальных уравнений системы (108)–(110) кроме начального:

$$z_{m-1}(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + e^{-\lambda at} \left(\frac{\lambda a c_{m+1}}{2} t^2 + c_m t + c_{m-1} \right);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_{m-k}(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + e^{-\lambda at} \left(\frac{\lambda a c_{m+1}}{(k+1)!} t^{k+1} + c_m t^k + \dots + c_2 t + c_1 \right); \quad (163)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_1(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda} + e^{-\lambda at} \left(\frac{\lambda a c_{m+1}}{m!} t^m + c_m t^{m-1} + \dots + c_2 t + c_1 \right).$$

Из (162) и (163) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = 1 - \frac{\gamma}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Перейдем к решению первого уравнения системы (108)–(110). Перепишем его в следующем виде

$$\dot{z}_0(t) = \begin{cases} \mu a - \lambda a(1 - z_1(t)), & \text{если } z_0(t) < 1 - \mu, \quad t \in [t_0, +\infty), \\ a(1 - z_0(t)) - \lambda a(1 - z_1(t)), & \text{если } z_0(t) \geq 1 - \mu, \quad t \in [t_0, +\infty). \end{cases} \quad (164)$$

Рассмотрим следующие два уравнения

$$\dot{z}_0(t) = \mu a - \lambda a(1 - z_1(t)), \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (165)$$

$$\dot{z}_1(t) = a(1 - z_0(t)) - \lambda a(1 - z_1(t)), \quad t \in [\bar{t}, +\infty), \quad (166)$$

где $\bar{t} \geq t_0$.

Используя выражение для $z_1(t)$ из (163), получим решение уравнений (165) и (166). Их можно представить следующим образом

$$z_0(t) = a(\mu - \gamma)t + F_1(t) + c_0, \quad (167)$$

где $F_1(t) \in C^\infty[\bar{t}, +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t) = 0$,

$$z_1(t) = 1 - \gamma + F_2(t), \quad (168)$$

где $F_2(t) \in C^\infty[\bar{t}, +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t) = 0$

Эти решения позволяют исследовать асимптотическое поведение решения уравнения (164). Несложно увидеть, что при $\gamma < \mu$ асимптотика решения уравнения (164) определяется соотношением (168), т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 1 - \gamma$. При $\gamma > \mu$ асимптотика решения уравнения (164) определяется соотношением (167), т.е. $z_0(\cdot)$ линейно убывает и $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = -\infty$. При $\gamma = \mu$ асимптотика решение уравнения (164) в зависимости от начальных условий может определяться как соотношением (167) так и соотношением (168), т.е. либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = c_0$, где $c_0 < 1 - \mu$ либо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 1 - \mu$. ■

Доказательство леммы 8 (параграф 3.3). Начнем с рассмотрения последней компоненты решения системы (108)–(110), т.е. $z_{m+1}(\cdot)$. Она имеет вид (161), где c_{m+1} определяется из условия

$$1 - \frac{\gamma}{\lambda} + c_{m+1}e^{-\lambda a t_0} = \bar{z}_{m+1}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1,$$

т.е.

$$c_{m+1} = \left(\frac{\gamma}{\lambda} - 1 + \bar{z}_{m+1}\right)e^{\lambda a t_0}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{z}_{m+1} \leq 1. \quad (169)$$

Из (169) следует

$$\left(\frac{\gamma}{\lambda}-1\right)e^{\lambda at_0} \leq c_{m+1} \leq \frac{\gamma}{\lambda}e^{\lambda at_0}.$$

Используя оценку для c_{m+1} и выражение (161), получим оценку для $z_{m+1}(\cdot)$.

Она примет следующий вид

$$\left(1-\frac{\gamma}{\lambda}\right)\left(1-e^{\lambda at_0}e^{-\lambda at}\right) \leq z_{m+1}(t) \leq 1-\frac{\gamma}{\lambda}\left(1-e^{\lambda at_0}e^{-\lambda at}\right). \quad (170)$$

Из (170) следует, что для всех $\gamma \leq \lambda$ имеет место неравенство

$$0 \leq z_{m+1}(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (171)$$

Покажем, что и для остальных компонент решения системы (108)–(110) выполняется неравенства, аналогичные неравенству (171). Начнем с компоненты $z_m(\cdot)$. Для этого рассмотрим уравнение (109) для $i = m$:

$$\dot{z}_m(t) = \lambda a(z_{m+1}(t) - z_m(t)), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Покажем, что функция $z_m(\cdot)$ не может принять значение большее 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_m(\cdot)$ должна быть точка $t^* > t_0$, такая что $z_m(t^*) = 1$. Тогда из (171) следует, что $\dot{z}_m(t^*) \leq 0$. Точно также функция $z_m(\cdot)$ не может принять значение меньше 0. Таким образом, доказано, что для всех $\gamma \leq \lambda$ функция $z_m(\cdot)$ также удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству (171). Точно также доказывается выполнимость всех остальных неравенств. ■

Доказательство леммы 9 (параграф 3.3). Как и для остальных компонент покажем, что функция $z_0(\cdot)$ не может принять значение большее 1. Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $z_0(\cdot)$ должна быть точка $t^{**} > t_0$, такая что $z_0(t^{**}) = 1$. Тогда из (108) следует, что

$$\dot{z}_0(t^{**}) = \lambda a(z_1(t^{**}) - 1),$$

т.е. согласно лемме 8, $\dot{z}_0(t^{**}) \leq 0$.

Перейдем к оценке функции $z_0(\cdot)$ снизу. Для этого исследуем поведение ее производной при $z_0(\cdot) \rightarrow 0+$. Согласно (108), оно описывается уравнением

$$\dot{z}_0(t) = a(\mu - \lambda(1 - z_1(t))).$$

Исследуем неравенство

$$\mu - \lambda(1 - z_1(t)) \geq 0.$$

Перепишем его в виде

$$z_1(t) \geq 1 - \frac{\mu}{\lambda}. \quad (172)$$

Согласно лемме 1, для произвольных $\gamma > 0$, λ удовлетворяющих условию $\gamma \leq \lambda \leq 1$ выполняются неравенство

$$0 \leq z_1(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (173)$$

Из (173) следует, что для произвольного μ , удовлетворяющего условию $\gamma \leq \mu \leq 1$ существует $\tilde{\lambda}$, $\mu \leq \tilde{\lambda} \leq 1$ такое, что при любом значении параметра λ из отрезка $[\mu, \tilde{\lambda}]$ неравенство (172) будет выполняться для всех $t \in [t_0, +\infty)$, т.е. $\dot{z}_0(t) \geq 0$ при $z_0(t) \rightarrow 0+$, что показывает ограниченность функции $z_0(\cdot)$ снизу значением 0. Очевидно, что $\tilde{\lambda}$ зависит как от μ , так и от начальных условий, поэтому обозначим его $\tilde{\lambda}(\mu, z_0(t_0), z_1(t_0), \dots, z_{m+1}(t_0))$. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная монография посвящена проблеме организации железнодорожных грузоперевозок. В ней проведено исследование ряда динамических моделей организации железнодорожных грузовых перевозок. Приведем основные его результаты:

1. Предложен новый способ построения динамических моделей организации железнодорожных грузоперевозок, основанный на взаимодействии соседних станций, в результате которого формируется грузопоток. Интенсивность такого потока зависит как от характеристик станций, так и от спроса на грузоперевозки. В зависимости от характера спроса используется тот или иной подход к организации грузоперевозок. В случае стабильно высокого спроса на грузоперевозки основной задачей является использование технических возможностей станций в полном объеме. Это сопряжено с их высокой загрузкой и как следствие вероятностью возникновения перебоев в системе грузоперевозок. Таким образом первый подход реализует принцип максимальной загрузки станций с возможностью реагирования на предельно допустимый ее уровень. Такой подход предполагает наличие специальных зон, куда временно отправляется часть грузов со станций, на которых загрузка превышает предельно допустимую, и системы контроля, обеспечивающей вывод грузов с указанных зон. При отсутствии стабильно высокого спроса на грузоперевозки нет необходимости задействовать потенциал станций в полной мере. В этом случае важно описать динамику грузопотока в зависимости от потенциала станций и спроса на перевозки. Разработаны два класса моделей, описывающих процесс организации грузоперевозок в зависимости от характера спроса на них.

2. Построены и исследованы модели, описывающие процесс грузоперевозок в случае стабильно высокого спроса на них (первый класс моделей). Они представлены системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями. Дифференциальные уравнения описывают процесс загрузки станций, сопровождающийся увеличением грузопотока, а нелинейные ограничения – систему контроля. Структура дифферен-

циальных уравнений определяется конфигурацией железнодорожной сети.

Организация эффективного грузопотока в условиях стабильно высокого спроса на грузоперевозки в рамках первой конфигурации железнодорожной сети (транснациональные перевозки) во многом зависит от правильной организации процесса взаимодействия промежуточных станций. Поэтому, в модели описывающей процесс организации грузоперевозок в рамках указанной конфигурации сети, узловые станции не присутствуют, и их влияние на систему грузоперевозок не учитывается, а сама модель описывается бесконечномерной системой дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями. В рамках такой модели однозначно определяется режим грузоперевозок, удовлетворяющий заданной системе контроля и обеспечивающий бесперебойный грузопоток.

Организации грузоперевозок в рамках второй конфигурации железнодорожной сети (замкнутая цепочка станций) характерна наличием глобально устойчивого режима грузоперевозок, позволяющего использовать потенциал всех станций в полном объеме.

При организации грузоперевозок в рамках третьей конфигурации железнодорожной сети (участок железнодорожной линии между узловыми станциями) одинаково важны как процедура взаимодействия промежуточных станций, так и процедуры, связанные с приемом грузов на начальной узловой станции и отправкой грузов с конечной узловой станции. Поэтому, модели, описывающие процесс организации грузоперевозок в рамках данной конфигурации сети, строятся с учетом влияния узловых станций на систему грузоперевозок и описываются конечномерной системой дифференциальных уравнений, удовлетворяющей нелокальным линейным ограничениям, задающим систему контроля.

Класс решений такой системы крайне узок, что приводит к необходимости корректировки либо технологий грузоперевозок, либо системы контроля. В первом случае такая корректировка достаточна только на узловых станциях. Она заключается в том, чтобы, управляя интенсивностью приема грузов на начальной узловой станции и интенсивностью отправки грузов с конечной узловой

станции, добиться организации грузопотока с указанной системой контроля. Такая организация грузопотока связана со скачкообразными изменениями числа задействованных путей на станциях. Описана зависимость указанных скачков от характеристик станций, интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивности распределения грузов с конечной узловой станцией. Корректировка системы контроля заключается в ее ослаблении, т.е. в допущении малых отклонений. Исследована зависимость указанных отклонений от характеристик станций, интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию и интенсивности распределения грузов с конечной узловой станцией.

3. Построены и исследованы модели, описывающие процесс грузоперевозок в случае отсутствия стабильно высокого спроса на грузоперевозки (второй класс моделей). Они представлены системой дифференциальных уравнений с рядом параметров, характеризующих спрос на перевозки и технические потенциалы станций. Эти уравнения определяют динамику грузопотока, зависящую от указанных параметров. Отличительной особенностью указанной системы дифференциальных уравнений является множественность стационарных решений. Данный класс моделей описывает грузопоток для двух конфигураций участков железнодорожной сети: замкнутая цепочка станций и участок железной дороги между двумя узловыми станциями.

В первом случае определен установившийся уровень грузопотока при заданных правилах взаимодействия станций, а также выявлена его зависимость от потенциала станций. Во втором случае грузопоток формируется поступившими на начальную узловую станцию грузами с учетом технического потенциала станций. Основной характеристикой произвольной станции является степень несогласованности между приемом и отправкой грузов, представляющая собой разницу между объемом входных и выходных грузов за единицу времени. Для заданного значения характеристики спроса на грузоперевозки с помощью управления степенью использования технического потенциала станций и режима распределения грузов с конечной узловой станцией установлены наиболее приемлемые достижимые уровни степени несогласованности между приемом и отправкой грузов на всех станциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е.** Оптимизация транспортных потоков. – М.: Наука, 1985.

2. **Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.** Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – т. 53, №10. – с. 1649–1667.

3. **Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.** Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте // Экономика и математические методы. – 2019. – т. 55, № 3. – с. 62–73.

4. **Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.** Динамическая модель организации грузоперевозок по замкнутой цепочке станций // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 5. – с. 80–83.

5. **Белоусов Ф.А., Неволин И. В., Хачатрян Н.К.** Моделирование и оптимизация планов грузовых железнодорожных перевозок, выполняемых транспортным оператором // Бизнес-информатика. – 2020. – т. 14, № 2. – с. 21–35.

6. **Белоусов Ф.А., Хачатрян Н.К., Неволин И.В.** Снижение размерности в задаче оптимального управления парком грузовых вагонов с использованием беспилотных локомотивов // Бизнес-информатика. – 2022, – т. 16, № 2. – с. 7–20.

7. **Васильева Е.М., Игудин Р.В., Лившиц В.Н.** Оптимизация планирования и управления транспортными системами. – М.: Транспорт, 1987.

8. **Галабурда В.Г.** Оптимальное планирование грузопотоков. – М.: Транспорт, 1985.

9. **Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.** Введение в математическое моделирование транспортных потоков. А.В. Гасников (ред.). – М.: МЦНМО, 2013.

10. **Иносэ Х., Хамада Т.** Управление дорожным движением. – М.: Транспорт, 1983.

11. **Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г.** Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования. – М.: ИПУ РАН, 2012.

12. **Лазарев А.А., Садыков Р.Р.** Задача управления парком грузовых железнодорожных вагонов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ 2014). – Москва, ИПУ РАН, Россия, 16–19 июня 2014. с. 5083–5093.

13. **Макаров В.Л., Житков В.А., Бахтизин А.Р.** Регулирование транспортных потоков в городе – проблемы и решения. Экономика мегаполисов и регионов. – 2009, т. 27, №3, с. 2–7.

14. **Стенбринк П.А.** Оптимизация транспортных сетей. – М.: Транспорт, 1981.

15. **Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г.** Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // Математическое моделирование. – 2009. – т. 21., № 2. – с. 118–126.

16. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.

17. **Хачатрян Н.К.** Обзор динамических моделей организации грузоперевозок, основанных на взаимодействии соседних станций // Вестник ЦЭМИ. – 2021 – № 3–4.

18. **Хачатрян Н.К., Бекларян Л.А.** Исследование динамики потока в модели организации грузоперевозок по круговой цепочке станций // Экономика и математические методы. – 2021. – т. 57, №1. – с. 83–91.

19. **Хачатрян Н.К.** Модель организации грузоперевозок с учетом случайных воздействий // Вестник ЦЭМИ. – 2020. – № 3.

20. **Хачатрян Н.К., Бекларян Г.Л., Борисова С.В., Белоусов Ф.А.** Исследование динамики емкостей перегонов в модели организации грузоперевозок между двумя узловыми станциями // Бизнес-информатика. – 2019. – т. 13, №1. – с. 59–70.

21. **Хачатрян Н.К.** Динамическая модель организации грузоперевозок с возрастающей нагрузкой на узловые станции // Вестник ЦЭМИ. – 2018. – № 4.

22. **Хачатрян Н.К.** Динамическая модель организации грузоперевозок при ограниченности емкостей перегонных путей // Бизнес Информатика. – 2013. – № 4. – с. 62–68.

23. **Хачатрян Н.К.** Исследование динамических моделей грузоперевозок с системой контроля: проблемы существования режимов грузоперевозок и устойчивости стационарных режимов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Москва, ЦЭМИ РАН, 2004.

24. **Хачатрян Н.К.** О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – с. 137–149.

25. **Хачатрян Н.К.** О некоторых динамических моделях транспортных перевозок // Аудит и финансовый анализ. – 2003. – № 3. – с. 191–194.

26. **Хейт Ф.** Математическая теория транспортных потоков. – М.: Мир, 1966.

27. **Швецов В.И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – с. 3–46.

28. **Якимов М.Р.** Транспортное планирование: Создание транспортных моделей городов. – М: Логос. – 2013.

29. **Ahuja, R., Liu, J., Orlin, J., Sharma, D., Shughart, L.** Solving real-life locomotive scheduling problems // *Transportation Science*. – 2005. – vol. 39. – p. 503–517.

30. **Andersen J.** Christiansen M. Designing new European rail freight services // *Journal of the Operational Research Society*. – 2009. – № 60. – p. 348–360. DOI: 10.1057/palgrave.jors.2602559.

31. **Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y.** Structure Stability of Congestion in Traffic Dynamics // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 1994. – vol. 11. – p. 203–223.

32. **Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y.** Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*. – 1995. – vol. 51, p. 1035–1042.

33. **Bando M., Hasebe K., Nakanishi K., Nakayama A.** Analysis of optimal velocity model with explicit delay // *Phys. Rev. E*. – 1998. – vol. 58. – p. 5429–5435.

34. **Bar-Gera H.** Origin-based algorithm for the traffic assignment problem // *Transportation Science*. – 2002. – vol. 36, № 4. – p. 398–417.

35. **Beaujon G.J., Turnquist M.A.** A Model for Fleet Sizing and Vehicle Allocation. // *Transportation Science*. – 1991. – vol. 25, № 1. – p. 19–45.

36. **Beklaryan L.A., Khachatryan N.K.** Traveling wave type solutions in dynamic transport models // *Functional Differential Equations*. – 2006. – vol. 13, № 2. – p. 125–155.

37. **Beklaryan L.A., Khachatryan N.K., Akopov A.S.** Model for organization cargo transportation at resource restrictions // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2019. – vol. 32, № 4. – 627–640.

38. **Brackstone M., McDonald M.** Car following: A historical review // *Transportation Research. F: Traffic Psychology and Behaviour*. – 1999. – vol. 2, № 4 – p. 181–196.

39. **Brannlund U., Lindberg P.O., Nou A., Nilsson J.E.** Railway Timetabling using Lagrangian Relaxation // *Transportation Science*. – 1998. – vol 32. – № 4. – p. 358–369.

40. **Cai X., Goh C. J.** A fast heuristic for the train scheduling problem // *Computers and Operations Research*. – 1994. – vol. 21, № 5. – p. 499–510.

41. **Cai X., Goh C. J., Mees A. I.** Greedy heuristics for rapid scheduling of trains on a single track // *IIE Transactions*. – 1998. – vol. 30. – p. 481–493.

42. **Campetella M., Lulli G., Pietropaoli U., Ricciardi N.** Fright service design for the Italian railways company // 6th Workshop on Algorithmic Approach for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2006), Zurich, Switzerland, 14 September 2006. P. 1–13. DOI: 10.4230/OASICS.ATMOS.2006.685.

43. **Carey M., Lockwood D.** A model, algorithms and strategy for train pathing // The Journal of Operational Research Society. – 1995. – vol. 46, №8. – p. 988–1005.

44. **Carrothers G.A.P.** An historical review of the gravity and potential concepts of human interaction // J. American Instit. Planners. – 1956. – vol. 22. – p. 94–102.

45. **Ceselli A. et al.** Optimizing the cargo express service of Swiss Federal Railways // Transportation Science. – 2008. – vol. 42, № 4. – p. 450–465. DOI: 10.1287/trsc.1080.0246.

46. **Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A.** Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // Physics Reports. – 2000. – vol. 329. – p. 199–329.

47. **Cremer M., Ludwig J.** A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations // Mathematics and Computers in Simulation. – 1986. – vol. 28. p. 297–303.

48. **Daganzo C.F.** The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transportation Research. B. – 1994. – vol. 28. p. 269–287.

49. **Daganzo C.F.** The cell transmission model. Part II: Network traffic // Transportation Research. B. – 1995. – vol. 29. p. 79–93.

50. **Desaulniers J., Desrosiers J., Solomon M.** Column generation. – New York: Springer, 2005.

51. **Ferreira L., Murray M.** Modelling rail track deterioration and maintenance: current practices and future needs // Transport Reviews. – 1997. – vol. 17, № 3. – p. 207–221. <https://doi.org/10.1080/01441649708716982>.

52. **Forbes, M., Holt, J., Watts, A.** Exact solution of locomotive scheduling problems // Journal of the Operational Research Society. – 1991. – vol. 42. – p. 825–831.

53. **Fotheringham A.S.** A new set of special-interaction models: The theory of competing destinations // Environment and Planning. A. – 1983. – vol. 15. – p. 15–36.

54. **Fotheringham A.S.** Modelling hierarchical destination choice // Environment and Planning. A. – 1986. – vol. 18. – p. 401–418.

55. **Fugenschuh Armin, Homfeld Henning, Huck Andreas, Martin Alexander, Yuan Zhi.** Scheduling Locomotives and Car Transfers in Freight Transport // *Transportation Science*. – 2008. – vol. 42, No. 4. – p. 405–549.

56. **Fukasawa R., Aragao M.P., Porto O., Uchoa E.** Solving the freight car flow problem to optimality // *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. – 2002. – vol. 66, №6. – p. 42–52. DOI: 10.1016/S1571-0661(04)80528-0.

57. **Gazis D. C.** *Traffic Science*. – N.Y.: Wiley, 1974.

58. **Gazis D. C., Herman R., Rothery R. W.** Nonlinear follow the leader models of traffic flow // *Oper. Res.* – 1961. – vol. 9. – p. 545–567.

59. **Harris B., Wilson A.G.** Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models // *Environment and Planning. A*. – 1978. – vol. 10. – p. 371–388.

60. **Helbing D.** Derivation and empirical validation of a refined traffic flow model // *Physica A*. – 1996. – vol. 233. – p. 253–282.

61. **Helbing D., Treiber M.** Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition // *Physical Review Letters*. – vol. 81. – p. 3042–3045.

62. **Higgins A., Ferreira L., Kozan E.** Modeling single-line train operations // *Transportation Research Record*. – 1995. – vol. 1489. – p. 9–16.

63. **Higgins A., Kozan E., Ferreira L.** Optimal scheduling of trains on a single line track // *Transportation Research Part B*. – 1996. – vol. 30, №2. – p. 147–161.

64. **Jeong S. J., Lee C. G., Bookbinder J.** The European freight railway system as a hub-and-spoke network // *Transportation Research, Part A: Policy and Practice*. – 2007. – vol. 41, №6. – p. 523–536. DOI: 10.1016/j.tra.2006.11.005.

65. **Jovanovic D., Barker P.T.** Tactical Scheduling of Rail Operations: The SCAN-I System // *Transportation Science*. – 1991. – vol. 25, № 1. – p. 46–64.

66. **Kerner B.S.** *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. The Long Road to Three-Phase Traffic Theory*. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2009. – 265 p.

67. **Khachatryan N.K., Akopov A.S.** Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution // *Business Informatics*. – 2017. – № 1. – p. 25–35.

68. **Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A.** About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation // *Business Informatics*. – 2018. – vol. 43, № 1. – 61–70.

69. **Khachatryan Nerses K.** Study of flow dynamics in the model of cargo transportation organization between node stations // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2020. – vol. 33, № 5. – p. 937–949.

70. **Khachatryan Nerses K.** Modeling the process of cargo transportation between node stations // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2021. – vol.34, №6. – p. 1223–1235.

71. **Nerses K. Khachatryan.** Bifurcation in the model of cargo transportation organization // *Advances in Systems Science and Applications*. – 2022. – vol. 22, № 4. – p. 79–91.

72. **Kraay D., Barker P., Chen B.** Optimal pacing of trains in freight railroads: model formulation and solution // *Operations Research*. – 1991. – vol. 39, № 1. – p. 82–99. <https://doi.org/10.1287/opre.39.1.82>

73. **Kuhne R. D.** Macroscopic freeway model for dense traffic Stop-start waves and incident detection // *Proc. 9th Int. Sympos. Transport. and Traffic Theory*. Ed. Hamerslag R. Utrecht: VNU Science, 1984. – p. 21–42.

74. **Lampis M.** On the kinetic theory of traffic flow in the case of a nonnegligible number of queueing vehicles // *Transportation Science* – 1978. – vol. 12, №1 – p. 16–28.

75. **LeBlanc L.** Global solutions for a nonconvex nonconcave rail network model // *Management Science*. – 1976. – Vol. 23, № 2. – P. 131–139. <https://doi.org/10.1287/mnsc.23.2.131>.

76. **Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L.** A column generation algorithm for optimal traffic assignment // *Transportation Science*. – 1973. – vol. 7, № 2. – p. 168–176.

77. **Lo H.K., Chen A.** Traffic equilibrium problem with route-specific costs: Formulation and algorithms // *Transportation Research. B*. – 2000. – vol. 34, № 6. – p. 493–513.

78. **Lu Y. Wang S.** Optimization of Joint Decision of Transport Mode and Path in Multi-Mode Freight Transportation Network // *Sensors* – 2022. – vol. 22, № 13, <https://doi.org/10.3390/s22134887>.

79. **Lulli G., Pietropaoli U., Ricciardi N.** Service network design for freight railway transportation: the Italian case // *Journal of the Operational Research Society*. – 2011. – vol. 62, №12. – p. 2107–2119. DOI: 10.1057/jors.2010.190.

80. **Nelson P.** A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions // *Transport Theory and Statistical Physics*. – 1995. – vol. 24. – p. 383–409.

81. **Newell G. F.** Nonlinear effects in the dynamics of car following // *Operations Research* – 1961. – vol. 9. – p. 209–229.

82. **Oliveira O., Smith B. M.** A job shop scheduling model for the single track-railway timetabling problem // Technical Report 2000.21. – University of Leeds. – 2000.

83. **Pipes L.A.** An Operational Analysis of Traffic Dynamics // Journal of Applied Physics. – 1953. – vol. 24. – p. 274–281.

84. **Pyrgidis, C.N.** Railway Transportation Systems: Design, Construction and Operation. – CRC Press – 2016.

85. **Popkov Yu.S.** Macrosystems theory and its applications. – Berlin: Springer Verlag. – 1995.

86. **Prigogine I., Herman R.** Kinetic Theory of Vehicular Traffic. – N.Y.: Elsevier. – 1971.

87. **Renyi A.** On Two Mathematical Models of the Traffic on a Divided Highway // Journal of Applied Probability. – 1964. – vol. 1. – p. 311–320.

88. **Richards P. I.** Shock Waves on the Highway // Operations Research. – 1956. – vol. 4. – p. 42–51.

89. **Shvetsov V.I.** Algorithms for distributing traffic flows. Automation and Remote Control. – 2009. – vol. 70, №10. – p. 1728–1736.

90. **Sadykov R., Lazarev A., Shiryayev V., Stratonnikov A.** Solving a freight railcar flow problem arising in Russia // 13th Workshop on Algorithmic Approach for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS'13). Sophia Antipolis, France, 5 September 2013. – P. 55-67. DOI: 10.4230/OASICS.ATMOS.2013.55.

91. **Sadykov R., Vanderbeck F.** Column generation for extended formulations // EURO Journal on Computational Optimization. – 2013. – vol. 1, № 1–2. – p. 81–115. DOI: 10.1007/s13675-013-0009-9.

92. **Sahin I.** Railway traffic control and train scheduling based on intertrain conflict management // Transportation Research Part B. – 1999. – vol. 33, №7 – p. 511–534.

93. **Sauder R.L., Westerman W.M.** Computer Aided Train Dispatching: Decision Support Through Optimization // Interfaces. – 1983. – vol. 13, № 6. – p. 24–37.

94. **Solomon H., Wang P.** Nonhomogeneous Poisson fields of Random Lines with Applications to Traffic Flow // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. – 1972. – vol. 3. – p. 383–400.

95. **Sherali H.D., Suharko A.B.** A Tactical Decision Support System for Empty Railcar Management // Transportation Science. – 1998. – vol. 32, № 2. – p. 306–329.

96. **Sherali H.D., Tuncbilek C.H.** Static and Dynamic Time-Space Strategic Models and Algorithms for Multilevel Rail-Car Fleet Management // Management Science. – 1997. – vol. 43, № 2. – p. 235–250.

97. **Spiess H., Florian M.** Optimal strategies: A new assignment model for transit networks // *Transportation Research. B.* – 1989. – vol. 23, № 2. – p. 83–102.

98. **Szpigel B.** Optimal train scheduling on a single line railway // *Operations Research.* – 1973. – vol. 72. – p. 344–351.

99. **Tomer E., Safonov L., Havlin S.** Presence of many stable nonhomogeneous states in an inertial car-following model. – 2000. – *Physical review letters.* – vol. 84. – p. 382–385.

100. **Treiber M., Hennecke A., Helbing D.** Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations // *Physical Review. E.* – 2000. – vol. 62. – p. 1805–1824.

101. **Turnquist M.A., Markowicz B.P.** An Interactive Microcomputer-Based Model for Railroad Car Distribution // Working Paper, Cornell University, Ithaca, NY. – 1989.

102. **Veluscek M. et al.** Composite goal methods for transportation network optimization // *Expert Systems with Applications.* – 2015. – vol. 42. – p. 3852–3867.

103. **Wilson A.G.** A family of spatial interaction models and associated developments// *Environment and Planning. A.* – 1971. – vol. 3. – p. 255–282.

104. **Wilson A. G.** Entropy in urban and regional modelling. – London: Pion, 1970.

105. **Ziarati K., Soumis F., Desrosiers J., Gelnis S., Saintonge A.** Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America. *European Journal of Operations Research.* – 1997. – vol. 97, № 2. – p. 281–292.

106. **Ziarati, K., Chizari, H., Nezhad, A.** Locomotive Optimization Using Artiacial Intelligence Approach // *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering.* – 2005. vol. 29. p. 93–105.

N.K. Khachatryan

Modeling of the process of organization of railway freight traffic: monograph. – Moscow: MAKS Press, 2023. – 168 p.: ill.

ISBN 978-5-317-07005-2

<https://doi.org/10.29003/m3443.978-5-317-07005-2>

The monograph is devoted to the study of a new approach in describing the process of freight railroad transportation, based on its representation in the form of dynamic models describing the interaction of an arbitrary station with neighboring stations (previous and subsequent). The result of this interaction is the formation of freight flow within the framework of the demand for freight transportation and the technical potential of the stations. The established modes of freight traffic and their corresponding modes of freight flows have been studied. The monograph is intended for specialists in the field of railway transport, as well as students and researchers interested in this issue.

Keywords: railway transport, modelling of freight traffic, differential equations, stationary modes, numerical implementation.

Научное издание

ХАЧАТРЯН Нерсес Карленович

МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССА ОРГАНИЗАЦИИ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

Монография

Подготовка оригинал-макета:

Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: *Е.М. Бугачева*

Компьютерная верстка: *М.А. Комарова*

Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 30.05.2023 г.

Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л. 10,5.

Тираж 500 (1-30) экз. Заказ 088.

Издательство ООО «МАКС Пресс»

Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н



Нерсес Карленович Хачатрян,
кандидат физико-математических
наук, специалист в области
экономико-математического
моделирования, заместитель
директора ЦЭМИ РАН по научной
работе.