Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE RAS

РОССИЙСКАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN
ACADEMY OF SCIENCES

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сборник научных трудов

Выпуск 6

МОСКВА
2015

Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов / Сборник научных трудов под ред. Ю.Н. Гаврилец. Вып. 6. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 80 с. (Рус.)

Коллектив авторов: **Ю.Н. Гаврилец, И.В. Тараканова, С.А. Никитин, В.В. Лебедев, К.В. Лебедев.**

Настоящий сборник составлен по материалам семинара лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН, проходившего в 2015 г. Основная тематика и область научных интересов авторов – математические модели социально-экономических процессов, их анализ и использование для «проигрывания» возможных траекторий поведения изучаемых объектов.

Сборник ориентирован на научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов, а также всех, кто интересуется проблемами математического моделирования в общественных науках.

Ключевые слова: экономическое равновесие, производственная функция, Парето-оптимум, общественные блага

Классификация JEL: C 61, C 68, C 69

Mathematical and Computer Modeling of Socio-Economic Processes / The Collection of Articles ed. by Y.N. Gavrilets. Issue 6. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2015. – 80 p. (Rus.)

Authors: **Y.N. Gavrilets, I.V. Tarakanova, S.A. Nikitin, V.V. Lebedev, K.V. Lebedev**

This issue is based on materials of the seminar of the laboratory of mathematical sociology of CEMI RAS, held in 2015. The main topics and the research interests of the authors – mathematical model of socio-economic processes, their analysis and use of computers for calculating of probable behavior trajectories of objects under study.

The issue is focused on researchers, teachers, post-graduate students, students, and all those who are interested in the problems of mathematical modeling in social sciences.

Keywords: economic equilibrium, production function, Pareto optimum, public goods

JEL Classification: C 61, C 68, C 69

ISBN 978-5-8211-0709-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКЦИИ

Предлагаемый читателям сборник включает некоторые результаты исследований, обсуждавшихся на семинарах лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН. Несмотря на определённую тематическую «разношёрстность», публикуемые работы объединяет их ориентированность на активное использование математических и компьютерных моделей, а также стремление расширить рамки классических подходов к изучению экономического равновесия.

В частности, в статье Ю.Н. Гаврильца и И.В. Таракановой с помощью компьютерного моделирования исследуется *системное,* т.е. комплексное влияние факта приватизации на состояние всех субъектов экономики и на поведение экономической системы в целом. При этом делается попытка проследить групповые оценки общества на приватизацию.

В работе И.В. Таракановой социально-оправданное равновесие, понимаемое в утилитаристском смысле или по Роулзу, анализируется с помощью достаточно простых процедур корректировок налогов. На компьютерных моделях показаны возможности выхода экономики в оптимальное состояние с помощью регулируемых рыночных механизмов.

В статье В.В. Лебедева и К.В. Лебедева обсуждаются непрерывный и дискретный варианты трёхмерной динамической макроэкономической модели краткосрочного прогнозирования, которая отражает взаимозависимость рынка товаров и услуг и рынка денег. При построении модели частично использованы гипотезы стационарной кейнсианской модели IS–LM. Модель имеет бесчисленное множество равновесных решений, которым соответствует в фазовом пространстве линия пересечения поверхностей. Рассмотрен простейший вариант модели, в котором уравнение задаёт в фазовом пространстве плоскость, а уравнение – гиперболический параболоид. Модель допускает, в зависимости от значений параметров, разнообразные динамические режимы: движение к равновесной точке, цикличность, сложное апериодическое поведение и детерминированный хаос.

В работе С.А. Никитина Рассматриваются модели производства и распределения общественных благ, основываясь на понятиях: Парето-оптимальность, равновесие Линдаля, ядро. Проведен аналитический обзор работ, посвященных созданию экономически эффективного механизма распределения и проверке их жизнеспособности экспериментальным путем.

Ю.Н. Гаврилец, И.В. Тараканова

МОДЕЛЬ ПРИВАТИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ: ОПЫТ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА

В терминах подхода Эрроу–Дебре рассматривается компьютерная модель экономики и рассчитываются следствия приватизации и налоговых нагрузок на частную собственность на эффективность производства и социальную удовлетворенность. Выявлены возможности анализа существенных и разнонаправленных влияний экономической политики (налог на прибыль, на доходы групп, вид приватизации) на значения различных показателей равновесия.

The computer model of the economy is considered in terms of Arrow–Debreu approach and calculated the influence of privatization and private ownership tax on production efficiency and social satisfaction. Opportunities of analysis significant and different effects of economic policy (tax on profit, income groups, type of privatization) on the values of the different equilibrium indicators are identified.

Несмотря на общепринятые взгляды современных экономистов о частнокапиталистическом характере народного хозяйства, преимущество какой-либо одной формы собственности не может считаться доказанным. Количество публикаций, посвящённых приватизации и национализации в разных странах, насчитывает десятки и сотни и продолжает увеличиваться каждый год. О различных взглядах по поводу эффективности частной и государственной собственности особенно подробно говорится в работе [2, 3]. Эти работы в основном носят либо общий политэкономический характер, либо характер эконометрического анализа по данным различных стран, в которых проводились приватизация или национализация. При этом их географические, политические, социальные и другие особенности не всегда учитываются, хотя именно они могут играть определяющую роль.

Заметим, что об этической и социальной стороне проблемы говорится гораздо меньше. В ряде работ говорится о социальной ответственности бизнеса, о склонности к альтруизму [10, 11], но совсем не затрагивается тема социально-психологической удовлетворенности собственника фактом обладания или тема отношения населения к имеющейся структуре собственности – что весьма важно для социальных отношений в российском социуме. На наш взгляд, уже из самого факта отсутствия чисто экономического преимущества какого-либо вида собственности элементарно следует, что выбор делается на каких-то других основаниях. Впрочем, эта социально-политическая проблема выходит за рамки нашей узко ориентированной задачи.

В данной работе авторы специально предельно упростили рассматриваемую проблему, чтобы с помощью условных компьютерных «прогонок» выявить возможности подхода к анализу отдельных аспектов влияния приватизированных производств на экономическое равновесие. В терминах подхода Эрроу–Дебре рассматривается несколько простых моделей с нарастанием в них роли частной собственности и восприятия этого факта со стороны социальных групп общества. На компьютерных моделях (аналогично работам авторов [10, 11]) некоторой виртуальной экономической реальности рассчитываются следствия приватизации и налоговых нагрузок на частную собственность, эффективность производства и социальную удовлетворенность. Отметим, что рассматриваемая виртуальная реальность отличается от действительности не только предельным упрощением, но и полным игнорированием таких важнейших факторов нынешней экономической жизни, как финансовые рынки, курсы валют и всего того, что связано с международным разделением труда и глобализацией.

В ситуации отсутствия реальных статистических данных, по которым можно было бы сравнивать различные варианты приватизации, налоговой политики, социальной и экономической эффективности, нам ничего не остаётся, как «проигрывать на компьютере» различные варианты виртуальной реальности и получать некоторые качественные представления о возможностях и следствиях приватизации. Наш метод анализа является непосредственным экономико-математическим моделированием на условных, искусственных данных – в соответствии с известными представлениями об экономике. В отсутствии желательных статистических данных компьютерные эксперименты как бы увеличивают наши возможности наблюдений – правда, за счёт виртуальной реальности.

Простейшая модель экономического равновесия с известными правилами формирования налогов, доходов и потребления населения

Для начала анализа рассмотрим простую двухотраслевую экономику, в которой три группы населения создают и потребляют один и тот же продукт, уплачивая налоги, определяемые как доля от заработка. Производственные фонды принадлежат государству, которое распределяет их с целью максимизации функции общественного благосостояния. Прибыль отраслей, как и налоги, идёт на удовлетворение фиксированного объема «общегосударственных» потребностей.

Равновесие определяется как набор ценовых параметров, интенсивностей труда и потребления, удовлетворяющих балансовым ограничениям и максимизирующих прибыли и функции полезности.

Используются следующие показатели (параметры и переменные):

y_1 и y_2 – выпуски отраслей;

x_1, x_2, x_3 – объемы потребления групп;

a – объем общественного потребления;

Ф – общий объем используемого капитала;

Φ_1, Φ_2 – производственные фонды, используемые в первой и второй отраслях;

l_1, l_2 – интенсивность труда «простых» наёмных работников в отраслях;

l_3 – интенсивность труда «менеджеров-управленцев» во второй отрасли;

D_i – налоги на доход i-й группы.

Выпуски отраслей описываются функциями Кобба–Дугласа:

$$y_1 = A_1 \cdot l_1^{\alpha 1} \cdot \Phi_1^{\beta 1},\ y_2 = A_2 \cdot l_2^{\alpha 2} \cdot l_3^{\alpha 3} \cdot \Phi_2^{\beta 2}. \tag{1}$$

Натуральный баланс производства и потребления

$$y_1 + y_2 - x_1 - x_2 - x_3 = a. \tag{2}$$

Баланс производственных фондов

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi. \tag{3}$$

Поведение домохозяйств (населения):

$$u_i = \ln(x_i) + b_i \cdot \ln(T_i - l_i) \to \max \text{ при } p \cdot x_i = q_i \cdot l_i - D_i. \tag{4}$$

Поведение отраслей производства

$$\Pi_1 = p \cdot y_1 - q_1 \cdot l_1 - r \cdot \Phi_1 \to \max,\ \Pi_2 = p \cdot y_2 - q_2 \cdot l_2 - q_3 \cdot l_3 - r \cdot \Phi_2 \to \max. \tag{5}$$

По предположению нашей модели размеры налогов должны удовлетворять условию:

$$\lambda_1 \cdot \beta_1(D_1) = \lambda_2 \cdot \beta_2(D_2) = \lambda_3 \cdot \beta_3(D_3), \tag{6}$$

где β_i – предельные полезности доходов из соотношения (3), а коэффициенты λ_i – соизмеряют полезности групп функции общественного благосостояния утилитаристской формы, которая соответствует данному равновесию.

Стоимостной баланс, называемый обычно законом Вальраса, имеет вид:

$$\sum_i D_i = p \cdot a - \Pi_1 - \Pi_2. \tag{7}$$

Для равновесных значений должны выполняться соотношения, вытекающие из условий Куна–Таккера для всех максимизаций (4)–(5):

$$\frac{1}{x_i} = p \cdot \beta_i;$$

$$\frac{b_i}{T_i - l_i} = q_i \cdot \beta_i;$$

$$p \cdot \alpha_1 \cdot \frac{y_1}{l_1} = q_1;$$

$$p \cdot \alpha_2 \cdot \frac{y_2}{l_2} = q_2;$$

$$p \cdot \alpha_3 \cdot \frac{y_2}{l_3} = q_3;$$

$$p \cdot \beta_1 \cdot \frac{y_1}{\Phi_1} = r = p \cdot \beta_2 \cdot \frac{y_2}{\Phi_2}.$$

Компьютерные расчёты проводились для случая, когда производственные функции y_i (1) и функции полезности u_i (3) имели простейшую форму функций типа Кобба–Дугласа.

Параметры модели задавались следующим образом:

$A_1 = 10$, $A_2 = 7$, $T_1 = 10$, $T_2 = T_3 = 5$, $\Phi = 10$, $a = 20$, $b_1 = 3$, $b_2 = 0{,}63$, $b_3 = 0{,}9$, $\alpha_1 = 0{,}43$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\alpha_3 = 0{,}32$, $\beta_1 = 0{,}3$, $\beta_2 = 0{,}431$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

Для нахождения равновесия данной экономики конкретизирующее правило поведения участников (4) указывает, как формируются налоги на расходы. Согласно теории общественного благосостояния данная модель обладает равновесием, которое Парето-оптимально. Выбрав λ_i, мы нашли равновесие (см. табл. 1).

Таблица 1

p	q_1	q_2	q_3	r	l_1	l_2	l_3	Φ_1	Φ_2	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	D_1	D_2	D_3	Π_1	Π_2
0,35	0,97	0,5	1,2	0,45	3,8	1,4	1,9		7	5,7	11,4	8,5	24,8	20,8	1,7	–2,3	–4,8	4,9	4,2

Из этой таблицы видно, что выпуск продукции первой отрасли превосходит выпуск второй, потребление максимально у третьей группы населения, интенсивность труда также максимальна у третьей группы, впрочем, сопоставлять эти интенсивности напрямую нельзя, так как их величины зависят от вида функций полезности и отраслей производства. Данные равновесия соответствуют случаю, когда все государственные расходы в соответствии с законом Вальраса покрываются суммарной прибылью двух отраслей и налогами на потребление (7).

Это равновесие модели 1 будет служить базой для дальнейшего рассмотрения возможностей приватизации одной из двух отраслей.

Модель экономики с приватизированной отраслью

Будем предполагать, что первая отрасль остается неприватизированной, а вторая приватизируется в том смысле, что фонды Φ_2 арендуются третьей социальной группой («менеджеров»), которая становится собственником, нанимает работников второй социальной группы и участвует в управлении отраслью своим трудом с интенсивностью l_3, определяемой согласно её предпочтениям, не зависящими от рынка. В государственном управлении остаётся часть фондов, равная $\Phi - \Phi_2$. В данной модели прибыль первой отрасли полностью идет на государственное потребление. Занятые в этой отрасли получают зарплату согласно рыночной оценке q_1 их труда, как и наемные работники второй социальной группы (рыночной оценки их труда q_2), занятые во второй отрасли. И те, и другие облагаются налогом по предыдущей схеме так, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 \cdot \beta_1(D_1) = \lambda_2 \cdot \beta_2(D_2)$.

Работники – «управленцы-собственники», занятые во второй отрасли, распоряжаются её прибылью, оплачивая налог на прибыль ν и налог на потребление μ. Прибыль Π_2, кроме оплаты за использование производственных фондов Φ_2, учитывает только затраты труда l_2, в то время как затраты труда собственника l_3 (также влияющие на выпуск продукта) не учитываются рынком труда, а определяются только предпочтениями управленцев.

В результате бюджетное ограничение на потребление управленцев приобретает вид

$$p \cdot x_3 = \nu \cdot \Pi_2 - \mu \cdot p \cdot x_3; \tag{8}$$

$$\Pi_2 = p \cdot y_2 - q_2 \cdot l_2 - r \cdot \Phi_2. \tag{9}$$

Стоимостной баланс для всей экономической системы имеет стандартную форму:

$$\Pi_1 + \Pi_2 \cdot (1 - \nu) + D_1 + D_2 + D_3 = p \cdot a.$$

Для вычисления значений показателей равновесия в модели с приватизацией необходимо решить задачи Лагранжа аналогично предыдущему случаю. Отличие в том, что функция полезности третьей социальной группы зависит теперь от размера собственности Φ_2, полезность которой сопоставима с полезностью потребления с помощью коэффициента B:

$$u_3 = \ln x_3 + b_3 \cdot \ln(T_3 - l_3) + B \cdot \ln \Phi_2.$$

Кроме того, доходом группы является прибыль, облагаемая налогом $(1 - \nu)$. Поэтому бюджетное ограничение имеет вид

$$p \cdot x_3 = \Pi_2 \cdot \nu - D_3, \text{ где } D_3 = \mu \cdot p \cdot x_3.$$

Функция Лагранжа для максимизации полезности собственника имеет вид

$$L = \ln x_3 + b_3 \cdot \ln (T_3 - l_3) + B \cdot \ln \Phi_2 + \gamma \cdot (\Pi_2 \cdot \nu - (1 - \mu) \cdot p \cdot x_3),$$

где γ – предельная полезность дохода.

Условия Куна–Таккера имеют вид:

1. $x_3 = \dfrac{1}{p \cdot \gamma \cdot (1+\mu)}$.

2. $\dfrac{b_2}{T_2 - l_2} = \lambda \cdot \nu \cdot p \cdot \dfrac{y_2 \cdot \alpha_2}{l_2}$,

откуда $b_2 \cdot l_2 = \gamma \cdot \nu \cdot p \cdot A_2 \cdot l_2^{\alpha_2} \cdot l_3^{\alpha_3} \cdot \alpha_2 \cdot (T_2 - l_2)$.

3. $\dfrac{b_3}{T_3 - l_3} = \lambda \cdot \nu \cdot p \cdot \dfrac{y_2 \cdot \alpha_3}{l_3}$,

откуда $b_3 \cdot l_3 = \gamma \cdot \nu \cdot p \cdot A_2 \cdot l_2^{\alpha_2} \cdot l_3^{\alpha_3} \cdot \alpha_3 \cdot (T_3 - l_3)$.

4. $\dfrac{B}{\Phi_2} + \gamma \cdot \nu \cdot \left(\dfrac{p \cdot y_2 \cdot \beta_2}{\Phi_2} - r \right) = 0$, $B + \gamma \cdot \nu \cdot (p \cdot y2 \cdot \beta 2 - r \cdot \Phi 2) = 0$.

Получаем также

$$\gamma \cdot \nu \cdot \left(\frac{p \cdot \alpha_2 \cdot y_2}{l_2} - q_2 \right) = 0, \; l_2 = \left(\frac{p \cdot \alpha_2 \cdot A2 \cdot l_3^{\alpha_3} \cdot \Phi_2^{\beta_2}}{q_2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}}.$$

Решив эти уравнения, находим величины всех показателей равновесия. В табл. 2 приведены результаты расчётов для случая, когда у собственника отсутствует психологическая удовлетворённость от обладания собственностью ($B = 0$). По этой таблице можно проследить, как меняется состояние равновесия при изменении налогов μ и $(1 - \nu)$.

Нетрудно убедиться, что равновесие (1)–(5) с приватизированной отраслью не может быть Парето-оптимальным. Действительно, если бы равновесные значения x_3^*, l_3^* совпадали с Парето-оптимальными значениями x_3^0, l_3^0 при каких-то λ_i, входящих в максимизируемую функцию общественного благосостояния $W = \Sigma \lambda_i \cdot u_i$, то для переменных собственника выполнялись бы соотношения:

– из максимума W:

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = p^0; \; \lambda_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial l_3} = p^0 \cdot \frac{\partial y_2}{\partial l_3}.$$

– из максимизации функции полезности u_3 в равновесии:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = p^* \cdot \gamma \cdot (1+\mu); \; \frac{\partial u_3}{\partial l_3} = p^* \cdot \gamma \cdot \nu \cdot \frac{\partial y_2}{\partial l_3}.$$

Сравнивая эти производные, получаем:

$$\lambda_3 = \frac{p^0}{p^* \cdot \gamma \cdot (1+\mu)}, \; \lambda_3 = \frac{p^0}{p^* \cdot \gamma \cdot \nu}.$$

Это означает, что совпадение с оптимумом возможно лишь при равенстве $\nu = 1 + \mu$, а это возможно только при $\mu = 0$, т.е. налог на потребление собственника отсутствует, а прибыль второй отрасли полностью поступает в его распоряжение.

Таблица 2 (её части L01, L02, L03)

L01 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	"μ"	0.15	0.2	0.3	0.15	0.2	0.3	0.15	0.2	0.3	0.15	0.2	0.3
1	"ν"	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6
2	"x1"	7.637	7.7	7.811	7.804	7.86	7.96	7.973	8.022	8.11	8.142	8.185	8.261
3	"x2"	11.456	11.549	11.716	11.706	11.79	11.939	11.959	12.033	12.164	12.214	12.278	12.391
4	"x3"	6.389	6.126	5.658	5.685	5.451	5.035	4.98	4.774	4.409	4.273	4.097	3.783
5	"y1"	28.074	27.96	27.758	27.77	27.668	27.49	27.466	27.378	27.223	27.165	27.09	26.957
6	"y2"	8.132	8.103	8.052	8.055	8.029	7.984	7.978	7.956	7.917	7.902	7.883	7.85
7	"l1"	3.451	3.423	3.375	3.378	3.353	3.311	3.306	3.285	3.248	3.235	3.218	3.187
8	"l2"	0.972	0.966	0.955	0.956	0.95	0.941	0.94	0.936	0.928	0.925	0.921	0.915

L02 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	"l3"	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156
1	"Φ2"	4.711	4.722	4.742	4.741	4.751	4.769	4.771	4.78	4.796	4.802	4.809	4.823
2	"D1"	2.072	2.011	1.906	1.912	1.859	1.767	1.755	1.71	1.631	1.601	1.563	1.496
3	"D2"	-4.538	-4.563	-4.608	-4.605	-4.627	-4.666	-4.671	-4.69	-4.724	-4.736	-4.752	-4.78
4	"D3"	0.448	0.57	0.784	0.394	0.502	0.691	0.342	0.435	0.6	0.29	0.37	0.51
5	"П1"	3.541	3.512	3.463	3.466	3.441	3.397	3.391	3.37	3.333	3.319	3.301	3.269
6	"П2"	0.381	0.38	0.378	0.756	0.753	0.749	1.123	1.119	1.114	1.482	1.479	1.473
7	"p"	0.467	0.465	0.462	0.462	0.461	0.458	0.457	0.456	0.453	0.452	0.451	0.449

L03 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	"q1"	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634	1.634
1	"q2"	0.837	0.839	0.843	0.843	0.845	0.848	0.849	0.85	0.853	0.854	0.856	0.858
2	"r"	0.744	0.74	0.732	0.732	0.728	0.722	0.721	0.717	0.711	0.709	0.706	0.702
3	"u1"	7.671	7.692	7.728	7.726	7.744	7.776	7.78	7.795	7.822	7.832	7.845	7.868
4	"u2"	3.316	3.325	3.341	3.34	3.348	3.362	3.364	3.371	3.383	3.388	3.393	3.404
5	"u3"	2.795	2.753	2.674	2.679	2.636	2.557	2.546	2.504	2.424	2.393	2.351	2.271

Из табл. 2 видно, что с ростом только одного показателя – налога на прибыль – все показатели равновесия начинают разнонаправлено меняться. Во-первых, равновесные цены на продукт и капитал убывают, причем более сильно меняется стоимость фондов. Во-вторых, прибыль падает у обеих отраслей, у приватизированной – чрезвычайно сильно. В-третьих, потребление собственника убывает, в то время как величины используемых арендуемых фондов возрастают.

Для случая $B = 0$ и $\mu = 15\%$ влияние *налога на прибыль* прослеживается довольно явно:

Налог на прибыль	10%	20%	30%	40%
Потребление собственника	6,4	5,9	5,0	4,3
Уровень цен	0,467	0,462	0,457	0,452
Оценка фондов	0,744	0,732	0,721	0,709
Прибыль госпредприятий	3,54	3,47	3,39	3,32
Приобретенные фонды	4,711	4,741	4,771	4,802
Прибыль приватизированной отрасли	0,38	0,76	1,12	1,48

Можно также заметить, что с ростом *налога на потребление* объем арендуемых фондов растет при неизменном налоге на прибыль. По рассчитанным таблицам можно проследить последствия изменения этих двух налогов. Влияние их на уровень приватизации ($Ф_2$) выпишем отдельно:

$\mu =$	15%	20%	30%
$\nu = 20\%$	$Ф_2 = 4{,}741$	4,751	4,769
$\nu = 30\%$	$Ф_2 = 4{,}771$	4,780	4,796

Третий вариант модели с собственником отличался от предыдущего тем, что функция полезности собственника зависела от объема приватизированных фондов $Ф_2$. Целью такого расширения модели было: первое – оценить влияние заинтересованности «собственника» на поведение всей экономической системы, второе – выявить силу влияния на все показатели налога на прибыль и налога на потребление собственника. В табл. 3 приводятся значения основных показателей устойчивого равновесия при разных величинах налогов на собственника.

Из таблицы видно, что величины стоимости (прокатных оценок) фондов увеличиваются при всех значениях налогообложения. Этот факт надо отмечать, когда во время аукциона проявляется действительный интерес (можно ожидать заботливое отношение) приобретателя, а не только размер его кошелька. Однако цены на выпускаемую и потребляемую продукцию почти не меняются, т.е. заинтересованность в собственности на товарный рынок практически не влияет.

Таблица 3

L1 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	"μ"	0.15	0.2	0.3	0.15	0.2	0.25	0.3	0.15	0.2	0.3	0.15	0.2	0.25	0.3
1	"v"	0.8	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.9	0.9	0.9	0.9
2	"x1"	7.897	7.949	8.042	8.054	8.1	8.143	8.182	8.213	8.253	8.323	7.74	7.799	7.853	7.903
3	"x2"	11.845	11.924	12.063	12.081	12.151	12.214	12.273	12.319	12.379	12.485	11.611	11.698	11.779	11.854
4	"x3"	5.324	5.103	4.713	4.662	4.468	4.29	4.126	3.998	3.833	3.539	5.985	5.737	5.509	5.298
5	"y1"	25.484	25.39	25.224	25.202	25.12	25.045	24.976	24.922	24.852	24.729	25.768	25.662	25.564	25.474
6	"y2"	9.051	9.023	8.975	8.968	8.944	8.922	8.902	8.886	8.866	8.83	9.134	9.103	9.074	9.048
7	"l1"	3.163	3.14	3.101	3.096	3.077	3.06	3.044	3.031	3.015	2.987	3.23	3.205	3.181	3.16
8	"l2"	1.039	1.034	1.025	1.024	1.019	1.015	1.011	1.008	1.005	0.998	1.055	1.049	1.044	1.039

L2 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	"l3"	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382	2.382
1	"Φ2"	5.66	5.67	5.687	5.689	5.697	5.705	5.712	5.718	5.725	5.738	5.631	5.642	5.652	5.661
2	"D1"	1.415	1.368	1.284	1.274	1.233	1.195	1.161	1.135	1.1	1.04	1.559	1.505	1.455	1.41
3	"D2"	-4.57	-4.591	-4.628	-4.633	-4.651	-4.667	-4.682	-4.694	-4.709	-4.736	-4.506	-4.53	-4.552	-4.572
4	"D3"	0.369	0.47	0.648	0.32	0.408	0.488	0.562	0.272	0.346	0.478	0.419	0.534	0.638	0.734
5	"П1"	3.18	3.158	3.119	3.114	3.095	3.078	3.062	3.049	3.033	3.005	3.248	3.222	3.199	3.178
6	"П2"	0.707	0.705	0.702	1.052	1.049	1.046	1.044	1.389	1.386	1.38	0.357	0.356	0.355	0.354
7	"p"	0.462	0.461	0.458	0.458	0.456	0.455	0.454	0.453	0.452	0.45	0.467	0.465	0.463	0.462

L3 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	"q1"	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.602	1.601	1.601	1.601	1.602
1	"q2"	0.871	0.873	0.876	0.876	0.878	0.879	0.88	0.881	0.882	0.885	0.866	0.868	0.869	0.871
2	"r"	0.814	0.81	0.804	0.803	0.799	0.796	0.793	0.791	0.788	0.783	0.826	0.822	0.817	0.814
3	"u1"	7.834	7.85	7.879	7.882	7.896	7.909	7.921	7.93	7.942	7.963	7.784	7.803	7.82	7.836
4	"u2"	3.339	3.347	3.36	3.361	3.368	3.374	3.379	3.383	3.389	3.398	3.317	3.325	3.333	3.34
5	"u3"	2.885	2.843	2.764	2.753	2.711	2.671	2.632	2.601	2.559	2.479	3.001	2.959	2.919	2.88

Естественным (более или менее) выглядит то, что при наличии у собственника дополнительного интереса вследствие факта «обладания» его потребление убывает, в то время как потребление двух первых групп (трудящихся) возрастает. Аналогично этому трудовая активность собственника серьезно возрастает, а трудовая активность «трудящихся» падает в государственной отрасли, но возрастает в отрасли, которая приватизирована. Что касается изменения удовлетворенностей (значений функций полезности), то у собственника она растет (возможно, за счет наличия удовлетворенности от приватизации), у трудящихся первой отрасли – тоже, а у обычных занятых во второй отрасли – если растет, то очень слабо. Надо также сказать, что денежная прибыль в обеих отраслях меняется: уменьшается в первой отрасли, но значительно возрастает во второй.

Совершенно очевидно, что приватизация имеет смысл тогда, когда эффективность производства существенно возрастает. Нами были проведены дополнительные расчёты с целью выявления совокупного влияния такой «эффективной» приватизации на все основные характеристики равновесия.

Рассмотрим также влияние «эффективного» менеджера (повысившего общую производительность на 5%: A = 7,35) на показатели равновесия.

Таблица 4

L =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	"A2"	7	7.35	7	7.35	7	7.35	7	7.35	7	7
1	"v"	1	1	0.95	0.95	0.9	0.9	0.9	0.9	0	0.9
2	"μ"	0	0	0	0	0	0	0.05	0.05	0	0.05
3	"x1"	7.225	7.271	7.319	7.372	7.414	7.474	7.495	7.562	6.538	7.607
4	"x2"	10.838	10.906	10.979	11.058	11.121	11.211	11.243	11.343	9.807	11.411
5	"x3"	8.143	8.791	7.741	8.357	7.338	7.921	6.992	7.548	8.957	6.552
6	"l1"	3.639	3.575	3.595	3.527	3.552	3.481	3.515	3.441	3.405	3.289
7	"l2"	1.014	1.072	1.004	1.061	0.994	1.05	0.986	1.04	1.302	1.069
8	"l3"	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.156	2.317	2.382

L1 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	"y1"	17.428	17.294	17.337	17.195	17.246	17.097	17.168	17.012	23.546	16.686
1	"y2"	17.363	18.745	17.373	18.756	17.383	18.767	17.392	18.777	21.756	19.557
2	"Φ2"	4.638	4.883	4.654	4.901	4.671	4.92	4.686	4.936	7	5.606
3	"П2"	3.448	3.521	3.417	3.984	1.552	3.992	3.638	4.091	2.573	3.391
4	"ρ"	0.423	0.4	0.419	0.453	0.19	0.453	0.446	0.465	0.467	0.444
5	"γ"	0.683	0.663	0.675	0.747	0.305	0.746	0.714	0.762	0.826	0.788
6	"u1"	7.528	7.565	7.562	7.6	7.595	7.636	7.623	7.666	7.537	7.74
7	"u2"	3.254	3.251	3.269	3.267	3.283	3.282	3.295	3.296	3.107	3.297
8	"u3"	3.038	3.114	2.987	3.064	2.934	3.01	2.885	2.962	3.081	3.091

В табл. 4 сопоставляются значения показателей состояния равновесной экономики для трёх случаев: 1) рассмотренный ранее случай приватизации; 2) случай, когда приватизация повышает эффективность производства на 5%, 3) случай, когда для третьей социальной группы, приватизирующей фонды II отрасли, «факт обладания» приносит дополнительное удовлетворение (слагаемое в функции полезности $B \cdot \ln(\Phi_2)$) 10-й столбец. При этом в таблице отражены ситуации различного налогообложения (от нулевого до пятипроцентного – как для налога на прибыль ν, так и для налога на потребление μ).

Кроме того, 9-й столбец содержит значения показателей равновесно-оптимального состояния, максимизирующего функцию общественного благосостояния в утилитаристской форме (базовая модель 1).

Надо отметить, что таблица 3 указывает разнонаправленное влияние роста налогов на экономические показатели. Выпуск приватизированной отрасли увеличивается, в то время как выпуск первой отрасли убывает. Трудовая активность «управленцев» остаётся на постоянном уровне, а у групп «трудящихся» падает. Потребление собственника убывает, как при исходной эффективности производства, так и при её повышении менеджментом. В то же время потребление обеих групп трудящихся возрастает. Отметим, что при переходе к эффективному управлению потребление всех групп увеличивается; однако трудовая активность занятых в первой отрасли падает, простые трудящиеся второй отрасли увеличивают активность, «управленцы» же свою активность не меняют.

Рост налогов увеличивает удовлетворённость (значения функций полезности) первых двух групп, но уменьшает её для управленцев. И только заинтересованность в обладании собственностью увеличивает значение функции полезности собственников по сравнению даже с оптимально-равновесным состоянием. Таким образом, (в условиях равновесия нашей виртуальной экономики) управленцы будут заинтересованы в приватизации, только если они ценят собственность на уровне слагаемого в функции полезности $B \cdot \ln(\Phi_2)$, а налоги на прибыль и потребление не будут превосходить пятипроцентный уровень.

Устойчивость рыночного равновесия

Равновесие модели с приватизацией было получено как решение соответствующей системы алгебраических уравнений, выражающих условия Куна–Таккера и балансы. Они имеют смысл, если являются стационарным состоянием системы дифференциальных уравнений рыночной динамики «спроса–предложения»:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = h_1 \cdot \left[y_1(p, q_1, r) + y_2(p, q_2, r) - x_1(p, q_1) - x_2(p, q_2) - x_3(p, q_2) - a \right];$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = h_2 \cdot \left[\tilde{l}_1(p, q_1, r) - l_1(p, q_1, r) \right];$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = h_3 \cdot \left[\tilde{l}_2(p, q_2, r) - l_2(p, q_2, r) \right];$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = h_4 \cdot \left[\Phi_1(p, q_1, r) + \Phi_2(p, q_2, r) - \Phi \right].$$

Как показали расчеты собственных значений матрицы Якоби правых частей (для точки равновесия) данной системы уравнений, оно устойчиво (собственные значения отрицательны):

$B = 0{,}2$,

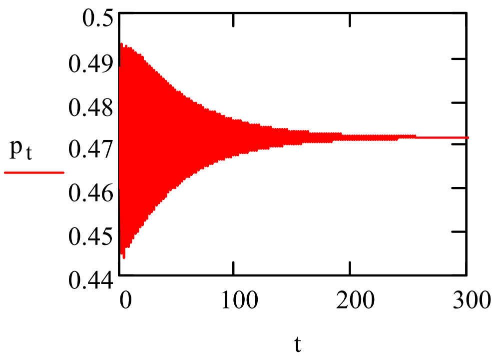
$$eigenvals(R) = \begin{pmatrix} -0{,}573 \\ -0{,}065 \\ -5{,}371 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}023 \end{pmatrix};$$

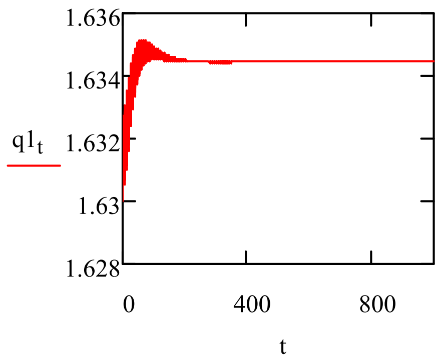
$B = 0$,

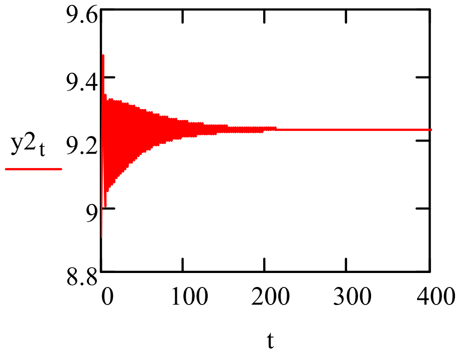
$$eigenvals(R) = \begin{pmatrix} -0,416 \\ -0,062 \\ -4,057 \cdot 10^{-3} \\ -0,016 \end{pmatrix}.$$

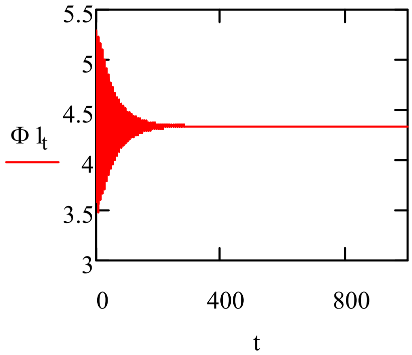
Это подтверждается визуально на рисунках траекторий выхода рынка в стационарную точку.

Динамика некоторых переменных показана на рисунках:









Ниже приведены начальные, равновесные и стационарные (на 4000-м шаге) значения основных переменных модели. Отношения ценовых переменных равновесия и стационарных постоянны (равны 1,01), так что натуральные показатели совпадают полностью.

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q1_0 \\ q2_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 1,63 \\ 0,83 \\ 0,8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} p_{4000} \\ q1_{4000} \\ q2_{4000} \\ r_{4000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,462 \\ 1,603 \\ 0,872 \\ 0,815 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} po \\ q1o \\ q2o \\ ro \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0,467 \\ 1,619 \\ 0,881 \\ 0,823 \end{pmatrix};$$

$$\frac{po}{p_{4000}} = 1,01;$$

$$\frac{q1o}{q1_{4000}} = 1,01;$$

$$\frac{q2o}{q2_{4000}} = 1,01;$$

$$\frac{ro}{r_{4000}} = 1,01.$$

Модель с социальной оценкой характера приватизации

В заключение рассмотрим ситуацию, когда население (все три группы) по-разному относятся к самому факту наличия частной собственности. В западных странах этой проблемы по существу нет, поскольку население давно привыкло к смешанной экономике в той или иной степени. В России разные группы по-разному относятся к приватизации, особенно таких отраслей, которые имеют общегосударственное значение [12].

Будем предполагать, что каждая группа имеет своё представление о допустимой доле деления всего капитала на частный и государственный. Будем также предполагать, что отличие структуры собственности от «желательной» сопоставляется с функцией полезности $u(x, l)$ с коэффициентом γ, так что общая удовлетворённость выражается следующим образом:

$$U = u(x, l) + \gamma \cdot V.$$

В результате функция общественного благосостояния может представляться, как:

$$W = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \lambda_1 \cdot \gamma_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot \gamma_2 \cdot V_2 + \lambda_3 \cdot \lambda_3 \cdot V_3,$$

причём

$$V_1(\Phi_1, \Phi_2) = \left(\Phi_1 - \Phi_{11}\right)^2 + \left(\Phi_2 - \Phi_{21}\right)^2,$$

$$V_2(\Phi_1, \Phi_2) = \left(\Phi_1 - \Phi_{12}\right)^2 + \left(\Phi_2 - \Phi_{22}\right)^2,$$

$$V_3(\Phi_1, \Phi_2) = \left(\Phi_1 - \Phi_{13}\right)^2 + \left(\Phi_2 - \Phi_{23}\right)^2,$$

а желаемые группами разбиения всего капитала на части суть:

$\Phi_{11} = 0,8\ \Phi$; $\Phi_{21} = 0,2\ \Phi$;

$\Phi_{12} = 0{,}1\ \Phi$; $\Phi_{22} = 0{,}9\ \Phi$;

$\Phi_{13} = 0{,}1\ \Phi$; $\Phi_{23} = 0{,}9\ \Phi$;

$\gamma_1 = 0{,}04$; $\gamma_2 = 0{,}05$; $\gamma_3 = 0{,}06$.

Для такого функционала было рассчитано оптимальное состояние экономической системы аналогично состоянию «базовой модели 1».

λ-коэффициенты соизмерения полезностей групп («коэффициенты социальной значимости») были рассчитаны (табл. 5) по показателям групповых потреблений в модели с приватизацией ($B = 0{,}2$) согласно формулам

$$\lambda_1 = p \cdot x_1,\ \lambda_2 = p \cdot x_2,\ \lambda_3 = \frac{1}{\gamma_3 \cdot (1+\mu)},$$

откуда $\lambda_1 = 3{,}375$, $\lambda_2 = 5{,}062$, $\lambda_3 = 2{,}906$.

Таблица 5

Показатели состояния экономики	l_1	l_2	l_3	Φ_1	Φ_2	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
Оптимум с приватизацией $B = 0{,}2$	2,984	1,223	2,791	3	7	7,497	11,245	6,456	22,25	22,95
Оптимум с учётом мнений $B = 0{,}2$	2,949	1,243	2,818	2,827	7,173	7,451	11,176	6,417	21,746	23,29
Равновесие $B = 0{,}2$	3,289	2,382	2,382	4,394	5,606	7,607	11,411	6,552	16,686	19,56

Эти расчёты показывают, что, несмотря на сокращение выпуска y_1, y_2 в равновесии, потребление групп растёт при росте интенсивности труда первых двух групп «трудящихся». Максимальная величина производственных фондов второй отрасли достигается при учёте социальных мнений населения, что, по-видимому, объясняется малым значением коэффициента γ_1 и большими значениями Φ_{22} и Φ_{23}.

Заключение

1. Основным выводом из проведённых вариантов расчёта можно считать выявление возможностей анализа существенных и разнонаправленных влияний экономической политики (налог на прибыль, на доход, вид приватизации) на значения показателей равновесия. Так, повышение налога на прибыль одной отрасли может приводить к росту или уменьшению выпуска в других отраслях. По-разному ведут себя показатели трудовой активности, уровни потребления и т.п. В приведённых таблицах даны значения равновесных показателей, но и для траекторий, ещё не вышедших на равновесный уровень, отмеченная разнонаправленность проявляет себя таким же образом.

2. На наш взгляд, представляются также важными – для социально-экономического анализа – возможности субъективной оценки собственности самим

предпринимателем в его функции полезности. В работе мы просто сопоставили эту оценку с полезностью потребления, но видимо можно это моделировать и другими способами.

3. Что касается допустимой величины налоговой нагрузки на предпринимателя, то это обстоятельство, как видим из численных расчётов, проявляется и в производственной деятельности отрасли и в уровне социальной удовлетворённости собственника.

4. Модели с приватизацией относятся к типу моделей с экстерналиями. В таких моделях равновесие может не совпадать с Парето-оптимальностью, что означает, с нашей точки зрения, необходимость существенной корректировки рыночных механизмов со стороны государства.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-06-00389).

Литература

1. *Полтерович В.М.* Приватизация и рациональная структура собственности: Ч. I и II // Экономическая наука современной России. 2012. № 4; 2013. № 1.
2. *Полтерович В.М.* Элементы теории реформ. М.: Экономика, 2007.
3. *Полтерович В.М., Попов В.А.* Эволюционная теория экономической политики // Вопросы экономики. 2007., № 7.
4. *Мальгинов Г.Н., Радыгин А.Д.* Смешанная собственность в корпоративном секторе: эволюция, управление, регулирование. М., ИЭПП, 2007.
5. *Рубинштейн А.Я.* К теории опекаемых благ: неэффективные и эффективные равновесия // Вопросы экономики. 2011. № 3.
6. *Frydman R., Gray Ch., Hessel M., Rapaczynski A.* When Does Privatization Work? The Impact of Private Ownership on Corporate Performance in the Transition Economies // The Quarterly Journal of Economics. 1999. Vol. 114. № 4. Nov. P. 1153–1191.
7. *Chang R., Hevia C., Louisa N.* Privatization and Nationalization Cycles. World Bank Police Research. Working Paper, № 5029, 2009.
8. *Villalonga B.* Privatization and Efficiency: Differentiating Ownership Effects from Political, Organizational and Dynamic Effects // Journal of Economic Behavior and Organization. 2000. Vol. 42.
9. *Baron D.P.* Corporate Social Responsibility and Social Entrepreneurship // J. of Economics and Management Strategy. 2007.
10. *Gavrilets Y.N., Tarakanova I.V.* Optimality and Equilibrium in a Single-Product Economic Model with Collective Good (Computer Experiments) // Montenegrin Journal of Economics. 2013. № 10.
11. *Гаврилец Ю.Н., Стеблюк А.С.* Однопродуктовая модель экономического равновесия с филантропией // Экономика и математические методы. 2012. № 2.
12. *Гаврилец Ю.Н., Коваленко Ю.П., Черемных Е.Н.* Дифференциация населения России по восприятию социально-экономических преобразований // Экономическая наука современной России. 1998. № 3.

И.В. Тараканова

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА «НАЩУПЫВАНИЯ» ОПТИМАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ РАЗНЫХ ФОРМАХ ПРЕДПОЧТЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ

Рассматривается однопродуктовая экономическая система, включающая три социальные группы, одна из которых является собственником производства. На компьютерных моделях представлены возможности анализа экономического равновесия и общей оптимальности при различных представлениях о справедливом согласовании интересов участников рынка. При расчётах использовались как функции полезности вида Кобба–Дугласа, так и CES-функции. Социально-оправданное равновесие, понимаемое в утилитаристском смысле или по Роулзу, предложено анализировать с помощью достаточно простых процедур корректировок налогов.

A single-product economic system is considered, including three social groups, one of which is the owner of production. Results of computer models help to analyze an economic equilibrium and a General optimality under various notions of a fair reconciliation of interests of market participants. The calculations used as the utility function of the form of Cobb–Douglas and CES. Socio-rational equilibrium, understood in the utilitarian sense or Rawls, is proposed to analyze using simple adjustments taxes procedures.

Оптимальное состояние экономики означает, что все экономические и социальные потребности групп и «общества в целом» удовлетворены в соответствии с ресурсными возможностями. Достоинством экономического равновесия является то, что при наличии рынка в этом состоянии всем участникам процесса нет необходимости отклоняться от равновесия. Парето-оптимальность рыночного равновесия означает реализацию максимума некоторой взвешенной суммы всех функций полезности участников, которую можно считать функцией общественного благосостояния (ФОБ). Весовые коэффициенты этой функции выражают некоторую фактическую этику согласования интересов. Изменение внешней среды может приводить к новым равновесным состояниям, но не должно изменять принятую в обществе этику согласования, если общество остаётся само собой.

В работе [1] была предложена процедура вывода рыночного равновесия в состояния, являющиеся оптимальными для неменяющейся функции общественного благосостояния. Эта процедура может быть обеспечена, если некоторый центр (например, правительство) будет управлять распределением налогов на основе решения некоторой специальной системы алгебраических уравнений, меняющихся в каждый момент рыночного процесса. Автор полагает, что, несмотря на рыночный мэйнстрим в отечественной экономической теории и практике, проблемы разработки и реализации оптимальных путей экономического функционирования при наличии рынка – остаются заслуживающими внимания.

Для выражения ФОБ обычно используются формы линейной комбинации функций индивидуальных полезностей (утилитаристский подход) и максиминный подход (принцип Роулза). В первом случае максимизируется «общественная полезность», равная общей сумме удовлетворенностей групп (может быть, за счет каких-либо отдельных групп); во втором случае удовлетворенности максимизируются одновременно для всех групп (может быть, за счет сдерживания слишком большой дифференциации), а «общественной полезностью», условно можно считать уровень, минимальный для всех. В работе [1] была доказана возможность (для определённого класса экономико-математических моделей) получения максимума ФОБ специальным методом регулирования налогов-трансфертов в условиях рыночного функционирования. В работах [2, 3] проведены компьютерные расчеты, реализующие этот метод на условных моделях. В этих расчетах в качестве индивидуальных полезностей использовались функции Кобба-Дугласа. В данной работе указанная процедура применяется в модели с функциями полезности CES (Constant Elasticity Sabstitution) [6] и максиминный подход (принцип Роулза).

1. Равновесно-оптимальное состояние модели

Рассматривается однопродуктовая экономическая система, включающая 3 социальные группы потребителей (домохозяйства). Две из них заняты в производстве первой и второй отрасли, а третья является только собственником всего капитала, обеспечивающего её потребление.

Общий объём фондов Ф и численности социальных групп N_1, N_2, N_3 фиксированы.

Переменные: x_i – потребление i-й группы; l_i – используемые затраты труда в i-й отрасли; Ф – фонды определяют состояние системы.

Функция полезности первых двух групп зависит от их труда и потребления, а третьей группы только от потребления.

Возможные состояния экономики описываются соотношениями

$$\sum_{i=1}^{2} y_i - \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot x_i = a; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \Phi_i = \Phi; \tag{2}$$

$$\Phi_i,\ x_i,\ l_i \geq 0; \tag{3}$$

$$y_1 = A_1 \cdot (N_1 \cdot l_1)^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1};\ y_2 = A_2 \cdot (N_2 \cdot l_2)^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2}, \tag{4}$$

где y_i – отраслевой выпуск; a – фиксированная общественная нагрузка, α_i и β_i коэффициенты эластичности; A_i – соответствующий нормирующий множитель.

Будем считать, что экономическая система находится в оптимальном состоянии в смысле максимизации ФОБ:

$$W = \sum_i U_i \cdot \lambda_i \cdot N_i, \tag{5}$$

где λ_i – коэффициенты социальной значимости групп.

Оптимальное состояние экономики максимизирует функцию W при ограничениях (1)–(3). Функция Лагранжа задачи (1)–(5) имеет вид:

$$L = W + p \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} y_i - \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot x_i - a \right) + r \cdot \left(\Phi - \sum_{i=1}^{2} \Phi_i \right), \tag{6}$$

где p и r соответствующие множители Лагранжа, имеющие смысл цены продукта и оценки фондов.

Функция полезности имеет следующий вид:

$$U(x, l) = \left[a \cdot x^{-b} + (1-a) \cdot (T-l)^{-b} \right]^{\frac{-1}{b}}; \tag{7}$$

$\max U(x, l)$ можно рассматривать как $\min g(x, l)$,

где $g(x, l) = \left[a \cdot x^{-b} + (1-a) \cdot (T-l)^{-b} \right]$, или

$$\max\ u(x, l) = -a \cdot x^{-b} - (1-a) \cdot (T-l)^{-b}. \tag{8}$$

При расчётах будем использовать функции полезности 1-, 2-го участников (производителей) в виде (8),

$$u(x, l) = -a \cdot x^{-b} - (1-a) \cdot (T-l)^{-b},$$

T – максимально «возможная» (предельная) величина интенсивности труда.

Функция полезности 3-го участника (владельца фондов):

$$u_3(x) = const - \gamma \cdot x^{-b_3}. \tag{9}$$

Такой переход мы делаем потому, что в дальнейшем будет использоваться специальный метод регулирования рынка с помощью назначения величин налогов, влияющих на предельные полезности β доходов потребителей. В случае CES-функции вида (7) эти предельные полезности не зависят от налогов.

Действительно: максимизация функции (7) при ценах p и налоге D приводит к:

$$u(x, l) = \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1) \cdot (T_1 - l_1)^{-b_1} \right]^{-\frac{1}{b_1}};$$

$$\frac{d}{dx_1} u = \beta \cdot p;$$

$$\frac{d}{dx_1}u = \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1)\cdot(T_1-l_1)^{-b_1}\right]^{-\frac{(1+b_1)}{b_1}} \cdot a_1 \cdot x_1^{-b_1-1};$$

$$C_1 = a_1 \cdot \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1)\cdot(T_1-l_1)^{-b_1}\right]^{-\frac{(1+b_1)}{b_1}}; \ \beta_1 = \frac{C_1}{p \cdot x_1^{b_1+1}}; \ x_1 = K_1 \cdot (T_1 - l_1);$$

$$C_1 = a_1 \cdot \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1)\cdot\left(\frac{x_1}{K_1}\right)^{-b_1}\right]^{-\frac{(1+b_1)}{b_1}};$$

$$C_1 = a_1 \cdot \left[a_1 + (1-a_1)\cdot\left(\frac{1}{K_1}\right)^{-b_1}\right]^{-\frac{(1+b_1)}{b_1}};$$

$$\beta_1 = \frac{1}{p} \cdot a_1 \cdot \left[a_1 + (1-a_1)\cdot\left(\frac{1}{K_1}\right)^{-b_1}\right]^{-\frac{(1+b_1)}{b_1}}.$$

При использовании функции полезности в первоначальном виде β не зависит от D.

В итоге функция общественной полезности для случая трёх участников может быть записана как:

$$W(x,l) = -\lambda_1 \cdot N_1 \cdot \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1)\cdot(T_1-l_1)^{-b_1}\right] -$$

$$-\lambda_2 \cdot N_2 \cdot \left[a_2 \cdot x_2^{-b_2} + (1-a_2)\cdot(T_2-l_2)^{-b_2}\right] - \lambda_3 \cdot N_3 \cdot \frac{\gamma}{x_3^{b_3}};$$

$W(x, l) \to \max$,

где $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, $l = \{l_1, l_2\}$. (10)

Параметры задачи возьмем произвольно:

$\gamma := 2$;

$A_1 := 15$; $\alpha_1 := 0{,}55$; $\beta_1 := 0{,}35$; $\alpha_1 + \beta_1 = 0{,}9$; $\lambda_1 := 15$; $N_1 := 20$;

$A_2 := 13{,}2$; $\alpha_2 := 0{,}56$; $\beta_2 := 0{,}34$; $\alpha_2 + \beta_2 = 0{,}9$; $\lambda_2 := 12$; $N_2 := 30$;

$b_1 := 0{,}5$; $T_1 := 10$; $b_2 := 0{,}31$; $T_2 := 9$; $b_3 := 0{,}9$; $\lambda_3 := 15$; $N_3 := 2$;

$a := 2{,}5$; $a_1 := 0{,}4$; $a_2 := 0{,}3$; $\Phi := 5$.

Искомые p, l_1, l_2, x_1, x_2, x_3, Φ_1, Φ_2 удовлетворяют соотношениям Куна–Таккера:

$$A_1 \cdot \left(l_1 \cdot N_1\right)^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1} + A_2 \cdot \left(l_2 \cdot N_2\right)^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2} - a - \left[x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + N_3 \cdot \left(\frac{\lambda_3 \gamma b_3}{p}\right)^{\frac{1}{1+b_3}}\right] = 0;$$

$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$;

$$\beta_1 \cdot A_1 \cdot (l_1 \cdot N_1)^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1 - 1} - \beta_2 \cdot A_2 \cdot (l_2 \cdot N_2)^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2 - 1} = 0;$$

$$\frac{-\lambda_1\cdot(1-a_1)b_1\cdot N_1}{\left(T_1-l_1\right)^{1+b_1}}+p\cdot A_1\cdot\alpha_1\cdot l_1^{\alpha_1-1}\cdot\Phi_1^{\beta_1}\cdot N_1^{\alpha_1}=0\,;$$

$$\frac{-\lambda_2\cdot(1-a_2)b_2\cdot N_2}{\left(T_2-l_2\right)^{1+b_2}}\cdot l+p\cdot A_2\cdot\alpha_2\cdot l_2^{\alpha_2-1}\cdot\Phi_2^{\beta_2}\cdot N_2^{\alpha_2}=0\,;$$

$$\frac{\lambda_1\cdot a_1b_1}{x_1^{1+b_1}}-p=0\,;$$

$$\frac{\lambda_2\cdot a_2b_2}{x_2^{1+b_2}}-p=0\,;$$

$$\frac{\lambda_3\cdot\gamma b_3}{x_3^{b_3+1}}-p=0\,;$$

N_1, N_2, N_3 – численность групп.

В результате расчётов получаем следующие оптимальные значения искомых переменных:

$p = 0{,}7016$, $l_1 = 0{,}6528$, $l_2 = 0{,}015$, $\Phi_1 = 4{,}78$, $\Phi_2 = 0{,}2197$,

$x_1 = 2{,}634$, $x_2 = 1{,}425$, $x_3 = 6{,}829$.

Можно определить значения остальных экономических переменных.

Величины оценки капитала и оплаты труда рассчитываем по формулам:

$$r=\beta_2\cdot A_2\cdot(l_2\cdot N_2)^{\alpha_2}\cdot\Phi_2^{\beta_2-1}\cdot p\,, \tag{11}$$

исходя из того, что предельные эффективности фондов в отраслях должны быть равны, а оценки труда групп

$$q_1=\frac{\lambda_1\cdot(1-a_1)\cdot b_1}{(T_1-l_1)^{1+b_1}},\ q_2=\frac{\lambda_2\cdot(1-a_2)\cdot b_2}{(T_2-l_2)^{1+b_2}}\,. \tag{12}$$

должны совпадать с их предельными производительностями.

В результате имеем следующие оптимальные значения переменных:

Таблица 1

p	q_1	q_2	r	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	l_1	l_2
0,123	0,234	0,202	3,113	8,407	5,382	17,069	195,33	170,91	2,824	1,948

Можно убедиться, что эти оптимальные значения образуют равновесие при ценовых значениях p, q_1, q_2, r, и налогах D_1, D_2, D_3, которые рассчитываются непосредственно из оптимального плана. Это означает, что все показатели удовлетворяют условиям:

а) соотношение материального баланса (3);

б) выпускаемая продукция в обеих отраслях максимизирует их прибыль, т.е.

$$\Pi_1 = p \cdot y_1 - (q_1 \cdot l_1 + r \cdot \Phi_1) \to \max\,;\ \Pi_2 = p \cdot y_2 - (q_2 \cdot l_2 + r \cdot \Phi_2) \to \max\,; \tag{13}$$

в) потребление и предлагаемый труд каждой социальной группы максимизирует её функцию полезности при бюджетных ограничениях:

$$p \cdot x_1 - q_1 \cdot l_1 = D_1;\ p \cdot x_2 - q_2 \cdot l_2 = D_2. \tag{14}$$

Собственник промышленно-производственных фондов в объёме Ф получает ренту, используемую для его личного потребления:

$$p \cdot x_3 - r \cdot \Phi / N_3 = D_3; \tag{15}$$

$u_3(x_3) \to \max$.

г) должен выполняться и стоимостной баланс (соотношение Вальраса):

$$D_1 + D_2 + D_3 - p \cdot a + \Pi_1 + \Pi_2 = 0\,. \tag{16}$$

Устойчивость рыночно-оптимального равновесия

В процессе рыночного функционирования максимизация прибыли отраслей (19) определяет спрос на труд ll_1, ll_2, фонды Φ_1, Φ_2 и предложение выпускаемого продукта:

$$\Phi_1 = \left[p \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r} \right)^{1-\alpha_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}},$$

$$\Phi_2 = \left[p \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q_2} \right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r} \right)^{1-\alpha_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}}; \tag{17}$$

$$ll_1 = \left[p \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q_1} \right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r} \right)^{1-\beta_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}},$$

$$ll_2 = \left[p \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q_2} \right)^{\beta_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r} \right)^{1-\beta_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}}. \tag{18}$$

Рыночное предложение фондов постоянно и равно Ф.

Потребительский спрос x_i и предложение труда l_i определяются из условия максимизации полезности (20)–(21). Выпишем функции Лагранжа для трёх участников:

$$L_1 = -\lambda_1 \cdot N_1 \cdot \left[a_1 \cdot x_1^{-b_1} + (1-a_1) \cdot (T_1 - l_1)^{-b_1} \right] - \beta_1 \cdot \left(q_1 \cdot l_1 - D_1 - p \cdot x_1 \right); \tag{19}$$

$$L_2 = -\lambda_2 \cdot N_2 \cdot \left[a_2 \cdot x_2^{-b_2} + (1-a_2) \cdot (T_2 - l_2)^{-b_2} \right] - \beta_2 \cdot \left(q_2 \cdot l_2 - D_2 - p \cdot x_2 \right); \tag{20}$$

$$L_3 = -\frac{\gamma}{x_3^{b_3}} + \beta_3 \cdot \left(\frac{r \cdot \Phi}{N_3} - D_3 - p \cdot x_3 \right). \tag{21}$$

Продифференцировав L_1 по x_1 и l_1, можно выразить их через D_1:

$$x_1 = \frac{1}{p} \cdot \left[\frac{\left(a_1 \cdot p^{b_1} \cdot q_1\right)^{\frac{1}{b_1+1}} \cdot (T_1 \cdot q_1 - D_1)}{q_1 \cdot (1-a_1)^{\frac{1}{b_1+1}} + (a_1 \cdot p^{b_1} \cdot q_1)^{\frac{1}{b_1+1}}} \right]; \tag{22}$$

$$l_1 = \frac{T_1 \cdot \left(a_1 \cdot p^{b_1} \cdot q_1\right)^{\frac{1}{b_1+1}} + D_1 \cdot (1-a_1)^{\frac{1}{b_1+1}}}{q_1 \cdot (1-a_1)^{\frac{1}{b_1+1}} + (a_1 \cdot p^{b_1} \cdot q_1)^{\frac{1}{b_1+1}}}. \tag{23}$$

Выделим в выражениях (22), (23) множитель

$$K_1 = \left[\frac{a_1 \cdot q_1}{p \cdot (1-a_1)} \right]^{\frac{1}{b_1+1}}.$$

Получаем следующие выражения для определения x_1, l_1, зависящие от D_1:

$$x_1 = \frac{K_1 \cdot (q_1 \cdot T_1 - D_1)}{q_1 + p \cdot K_1}, \; l_1 = \frac{K_1 \cdot p \cdot T_1 + D_1}{q_1 + p \cdot K_1}. \tag{24}$$

Аналогично из (15) получаем выражения для x_2, l_2:

$$x_2 = \frac{K_2 \cdot (q_2 \cdot T_2 - D_2)}{q_2 + p \cdot K_2}; \; l_2 = \frac{K_2 \cdot p \cdot T_2 + D_2}{q_2 + p \cdot K_2}. \tag{25}$$

Из (21) имеем

$$\frac{\partial L_3}{\partial x_3} = \frac{N_3 \cdot \lambda_3 \cdot \gamma \cdot b_3}{x_3^{b_3+1}} - N_3 \cdot p, \text{ откуда } x_3 = \left(\frac{\lambda_3 \cdot \gamma \cdot b_3}{p} \right)^{\frac{1}{1+b_3}}, \tag{26}$$

Далее получаем выражения предельных полезностей через налоги и оценки p, q_1, q_2:

$$\beta_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{p \cdot x_1^{b_1+1}}, \text{ аналогично } \beta_2 = \frac{a_2 \cdot b_2}{p \cdot x_2^{b_2+1}}. \tag{27}$$

Из (21) получаем выражение для β_3:

$$\beta_3 = \frac{p^{b_3} \cdot \gamma \cdot b_3}{\left(r \cdot \frac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}. \tag{28}$$

Подставим теперь выражение для x_1 (24) в (*27*), выразив β_1 через D_1:

$$\beta_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{p} \cdot \left[\frac{q_1 + p \cdot K_1}{K_1 \cdot (q_1 \cdot T_1 - D_1)} \right]^{b_1+1}, \tag{29}$$

а также имеем:

$$\beta_2 = \frac{a_2 \cdot b_2}{p} \cdot \left[\frac{q_2 + p \cdot K_2}{K_2 \cdot (q_2 \cdot T_2 - D_2)} \right]^{b_1+1}. \tag{30}$$

Для того чтобы обеспечить выход равновесия в оптимум утилитаристской ФОБ с заданными λ – коэффициентами, необходимо в каждый момент времени назначать из «Центра» налоги-трансферты, являющиеся решением системы следующих 3-х алгебраических уравнений с тремя неизвестными D_1, D_2, D_3:

$\lambda_1 \cdot \beta_1(D_1) = \lambda_2 \cdot \beta_2(D_2) = \lambda_3 \cdot \beta_3(D_3)$;

$D_1 + D_2 + D_3 = \text{const}$,

где сумма неизвестных определяется из соотношения Вальраса, а функции β определяются из условия максимизации полезностей при бюджетных ограничениях

Из условия

$$\lambda_1 \cdot \beta_1(D_1) = \lambda_2 \cdot \beta_2(D_2) = \lambda_3 \cdot \beta_3(D_3) \tag{31}$$

выражаем D_1, D_2 как функции D_3:

$$\lambda_3 \cdot \frac{p^{b_3} \cdot \gamma \cdot b_3}{\left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}} = \frac{\lambda_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (q_1 + p \cdot K_1)^{b_1+1}}{p \cdot \left[K_1 \cdot (q_1 \cdot T_1 - D_1) \right]^{b_1+1}},$$

откуда $$D_1 = q_1 \cdot T_1 - \frac{q_1 + p \cdot K_1}{K_1} \left[\frac{\lambda_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_1+1}}; \tag{32}$$

$$D_2 = q_2 \cdot T_2 - \frac{q_2 + p \cdot K_2}{K_2} \left[\frac{\lambda_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_2+1}}. \tag{33}$$

Подставим выражения для D_1, D_2 в соотношение Вальраса:

$D_1 + D_2 + D_3 - p \cdot a + \Pi_1 + \Pi_2 = 0$;

$$q_1 \cdot T_1 - \frac{q_1 + p \cdot K_1}{K_1} \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \left(\dfrac{r \cdot \Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_1+1}} +$$

$$+ q_2 \cdot T_2 - \frac{q_2 + p \cdot K_2}{K_2} \cdot \left[\frac{\lambda_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \left(\dfrac{r \cdot \Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_2+1}} +$$

$$+ D_3 - p \cdot a + \Pi_1 + \Pi_2 = 0. \tag{34}$$

Решив это уравнение, находим D_3, затем из соотношений (32), (33) определяем D_1 и D_2.

Программа расчета D_1, D_2, D_3 представлена в приложении 1.

Убедимся, что рыночный процесс «нащупывания» приводит к тем же самым равновесным ценам p, q_1, q_2, r и соответствующим им налогам-трансфертам D_1, D_2, D_3, а также объёмам производства и потребления материальных продуктов и выделяемого и используемого труда.

Для того чтобы выйти на равновесие, соответствующее оптимальному состоянию системы в смысле ФОБ, необходимо решить разностные уравнения динамики следующих показателей:

p – цена на товары производства и потребления,

r – прокатные оценки промышленно – производственных фондов,

q_1, q_2 – ставки оплаты труда в 1-й и 2-й отраслях.

Показатели D_1, D_2, D_3 – налоги-трансферты, определяющие денежные доходы социальных групп, являются управляющими переменными процесса;

Переменные состояния экономической системы (y_i, x_i, Φ_i, l_i) зависят от текущих значений p, q, r: объёмы спроса и предложения трудовых ресурсов для обеих отраслей – l_1, l_2, ll_1, ll_2.

Расчёты равновесных значений для CES-функции проведены в программе, написанной в пакете «MATHCAD» (приложение 2).

Уравнения динамики:

$t := 0..2000;$

$$\left[\begin{pmatrix} p_{t+1} \\ q1_{t+1} \\ q2_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t \\ q1_t \\ q2_t \\ r_t \end{pmatrix}\right] + h \cdot \begin{pmatrix} x1_t + x2_t + x3_t - y1_t - y2_t + a \\ ll1_t - l1_t \\ ll2_t - l2_t \\ -\Phi + \Phi1_t + \Phi2_t \end{pmatrix},$$

где $$h := \begin{pmatrix} 0,000013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000029 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,00001 \end{pmatrix}.$$

Ниже представлены графики выхода на равновесие переменных системы p, q_1, q_2, r, D_1, D_2, D_3, а также зависимости p от q_1 и p от q_2.

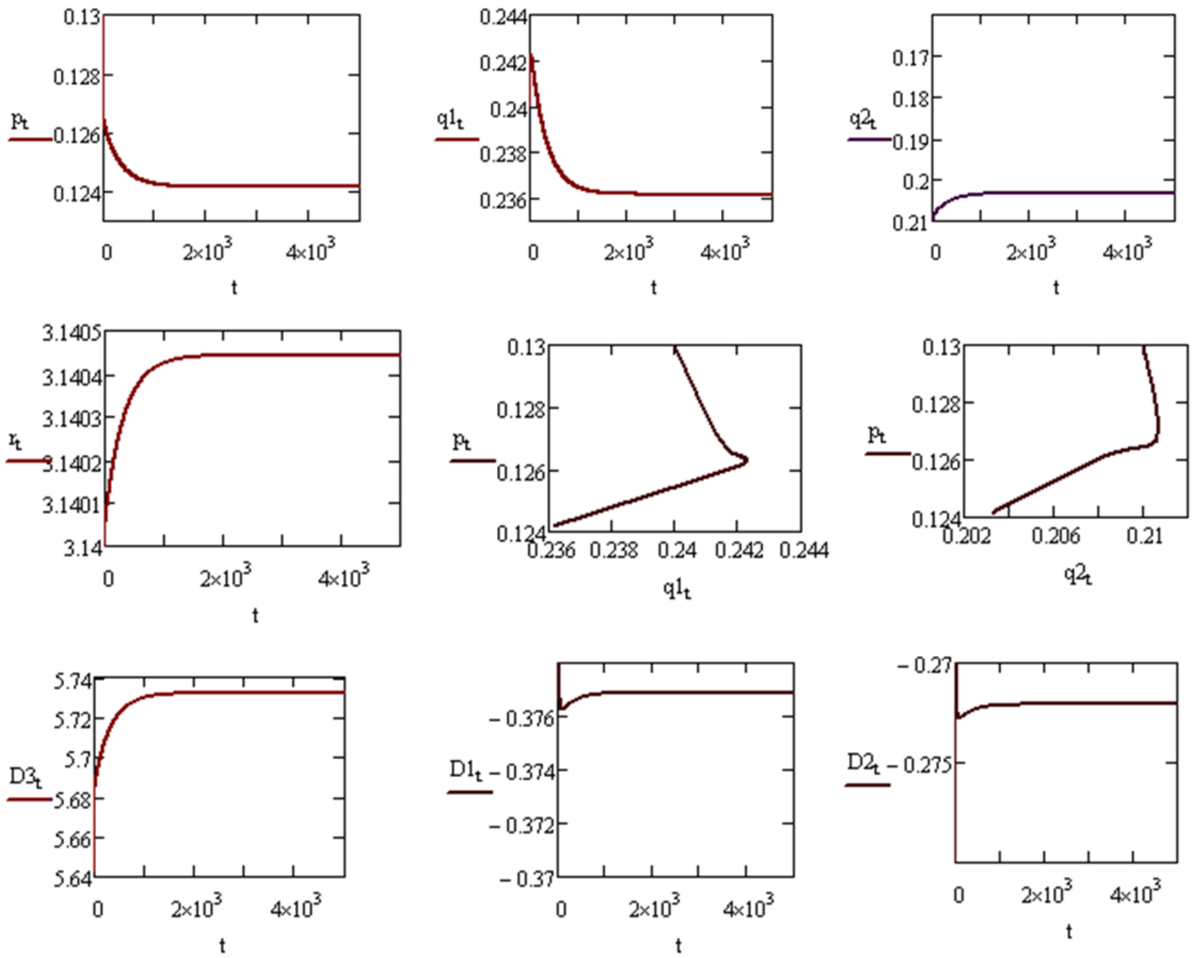


Таблица 2

Сравнение оптимальных и равновесных значений переменных для CES-функции при заданных значениях численностей N

Переменные	p	q_1	q_2	r	x_1	x_2	$x3$	y_1	y_2	l_1	l_2
Равновесные	0,124	0,236	0,203	3,14	8,407	5,382	17,069	195,33	170,91	2,824	1,948
Оптимальные	0,123	0,234	0,202	3,113	8,407	5,382	17,069	195,33	170,91	2,824	1,948

Можно видеть, что отношение ценовых равновесных значений к соответствующим оптимальным составляет 0,991, т.е. можно считать, что имеет место совпадение равновесия с оптимумом. Ценовые параметры, согласно [1], лежат на одном луче с оптимальными.

Таблица 3

Сравнение оптимальных и равновесных значений переменных для CES-функции при $N_1 = N_2 = N_3 = 1$

Переменные	p	q_1	q_2	r	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	l_1	l_2
Равновесные	0,035	0,254	0,219	0,167	19,433	14,048	33,076	42,26	26,798	3,204	2,394
Оптимальные	0,035	0,254	0,219	0,167	19,433	14,048	33,076	42,26	26,798	3,204	2,394

В этом случае мы наблюдаем полное совпадение.

Случай оптимума по Роулзу

Рассмотрим теперь процесс нахождения оптимума и выхода на равновесие в случае максиминного (Роулза) представления ФОБ.

Будем находить максимальное значение $W = V$, при котором все три функции полезности будут не меньше этой максимизируемой величины:

$\lambda_1 \cdot u_1(x_1, l_1) \geq V$;

$\lambda_2 \cdot u_2(x_2, l_2) \geq V$;

$\lambda_3 \cdot u_3(x_3, l_3) \geq V$;

$V = min(\lambda_k, u_k)$.

Функция Лагранжа и её частные производные:

$$L = V + p \cdot \left(\sum_k y_k - \sum_k x_k - a \right) + r \cdot (\Phi - \Phi_1 - \Phi_2) + \sum_k z_k \cdot (\lambda_k \cdot u_k - V); \quad (35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -p + \frac{z_i \cdot \lambda_i}{x_i}; \quad (36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial V} = 1 - \sum_k z_k, \quad (37)$$

где $z_k \geq 0$ – множитель Лагранжа для неравенств, выражающих требования максимина Роулза.

Из требований максимума должны выполняться условия:

1. $z_1 \cdot \left[\lambda_1 \cdot (\ln x_1 + b1 \cdot \ln(T1 - l_1) - V \right] = 0$.
2. $z_2 \cdot \left[\lambda_2 \cdot (\ln x_2 + b2 \cdot \ln(T2 - l_2) - V \right] = 0$.
3. $z_3 \cdot \left[\lambda_3 \cdot \ln x_3 - V \right] = 0$.

Из (30) имеем:

4. $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Из соотношений 1–4 следует, что величины z_k и $\lambda_r \cdot u_k - V$ не могут быть отличными от нуля одновременно.

Из (29) имеем

$$x_i = \frac{z_i \cdot \lambda_i}{p}. \quad (38)$$

Продифференцировав функцию Лагранжа по l_1, l_2, Φ_1, Φ_2 получим:

$$\frac{\partial L}{\partial l_1} = p \cdot A_1 \cdot \alpha_1 \cdot N_1^{\alpha_1} \cdot l_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \Phi_1^{\beta_1} - \frac{\lambda_1 \cdot b_1 \cdot z_1}{T_1 - l_1}; \quad (39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_2} = p \cdot A_2 \cdot \alpha_2 \cdot N_2^{\alpha_2} \cdot l_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \Phi_2^{\beta_2} - \frac{\lambda_2 \cdot b_2 \cdot z_2}{T_2 - l_2}; \quad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_1} = p \cdot A_1 \cdot \beta_1 \cdot l_1^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1 - 1} - r\, ; \; \frac{\partial L}{\partial \Phi_2} = p \cdot A_2 \cdot \beta_2 \cdot l_2^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2 - 1} - r\, . \tag{41}$$

Запишем систему уравнений, включающих в себя балансовые соотношения, условия 1–4 и условия (31)–(33).

$$\left[A_1 \cdot (l_1 \cdot N_1)^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1} + A_2 \cdot (l_2 \cdot N_2)^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2} - a\right] \cdot p = \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \lambda_3 \cdot z_3\, ;$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi; \quad z_1 + z_2 + z_3 - 1 = 0; \quad z_1 \geq 0; \quad z_2 \geq 2; \quad z_3;$$

$$\beta_1 \cdot A_1 \cdot l_1^{\alpha_1} \cdot \Phi_1^{\beta_1 - 1} - \beta_2 \cdot A_2 \cdot l_2^{\alpha_2} \cdot \Phi_2^{\beta_2 - 1} = 0;$$

$$-\frac{\lambda_1 \cdot b_1 \cdot z_1}{T_1 - l_1} + p \cdot A_1 \cdot \alpha_1 \cdot l_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \Phi_1^{\beta_1} \cdot N_1^{\alpha_1} = 0\, ;$$

$$-\frac{\lambda_2 \cdot b_2 \cdot z_2}{T_2 - l_2} + p \cdot A_2 \cdot \alpha_2 \cdot l_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \Phi_2^{\beta_2} \cdot N_2^{\alpha_2} = 0\, ;$$

$$V - \lambda_1 \cdot \left(\ln\left(\lambda_1 \cdot \frac{z_1}{p} \right) + b_1 \cdot \ln(T_1 - l_1) \right) \leq 0\, ;$$

$$V - \lambda_2 \cdot \left(\ln\left(\lambda_2 \cdot \frac{z_2}{p} \right) + b_2 \cdot \ln(T_2 - l_2) \right) \leq 0\, ;$$

$$V - \lambda_3 \cdot \ln\left(\lambda_3 \cdot \frac{z_3}{p} \right) \leq 0\, ;$$

$$z_1 \cdot \left[V - \lambda_1 \cdot \left(\ln\left(\lambda_1 \cdot \frac{z_1}{p} \right) + b_1 \cdot \ln(T_1 - l_1) \right) \right] = 0\, ;$$

$$z_2 \cdot \left[V - \lambda_2 \cdot \left(\ln\left(\lambda_2 \cdot \frac{z_2}{p} \right) + b_2 \cdot \ln(T_2 - l_2) \right) \right] = 0\, ;$$

$$z_3 \cdot \left(V - \lambda_3 \cdot \ln\left(\lambda_3 \cdot \frac{z_3}{p} \right) \right) = 0\, .$$

Решив систему, имеем следующие значения переменных.

Таблица 4

p	l_1	l_2	Φ_1	Φ_2	z_1	z_2	z_3	V
0,335	2,695	5,243	2,09	2,91	0,577	0,215	0,208	128,45

Из полученных результатов видим, что V = 128,45, и все неравенства для функций полезности, сопоставляемых с помощью коэффициентов социальной значимости λ, выполняются как равенства, что обеспечивается строгой положительностью коэффициентов z:

$$V - \lambda_1 \cdot \left(\ln\left(\lambda_1 \cdot \frac{z_1}{p} \right) + b_1 \cdot \ln(T_1 - l_1) \right) = -1{,}99 \cdot 10^{-12}\, ;$$

$$V-\lambda_2\cdot\left(\ln\left(\lambda_2\cdot\frac{z_2}{p}\right)+b_2\cdot\ln(T_2-l_2)\right)=2,757\cdot 10^{-12};$$

$$V-\lambda_3\cdot\ln\left(\lambda_3\cdot\frac{z_3}{p}\right)=1,052\cdot 10^{-12}.$$

Величины индивидуального потребления:

$$x_1=\frac{\lambda_1\cdot z_1}{N_1\cdot p};\; x_2=\frac{\lambda_2\cdot z_2}{N_2\cdot p};\; x_3=\frac{\lambda_3\cdot z_3}{N_3\cdot p}.$$

Конкретно: x_1 = 34,432, x_2 = 19,26, x_3 = 24,808. Значения функций полезности обеспечивают одно и то же значение «общественной полезности» по Роулзу:

$$\lambda_1\cdot\left(\ln(x_1)+b_1\cdot\ln(T_1-l_1)\right)=128,446;$$

$$\lambda_2\cdot\left(\ln(x_2)+b_2\cdot\ln(T_2-l_2)\right)=128,446;$$

$$\lambda_3\cdot\ln(x_3)=128,446.$$

Далее будем искать равновесие, имеющее те же значения натуральных показателей. Для этого из полученных значений p, x_1, x_2, x_3 определим новые значения λ_i, которые были бы в утилитаристской оптимизационной задаче с теми же логарифмическими функциями полезности:

$$\lambda_1:=p\cdot x_1;\quad \lambda_2:=p\cdot x_2;\quad \lambda_3:=p\cdot x_3;$$
$$\lambda_1=11,54;\quad \lambda_2=6,455;\quad \lambda_3=8,314;$$

$$\Phi_1+\Phi_2=\Phi;$$

$$\beta_1\cdot A_1\cdot l_1^{\alpha_1}\cdot\Phi_1^{\beta_1-1}-\beta_2\cdot A_2\cdot l_2^{\alpha_2}\cdot\Phi_2^{\beta_2-1}=0;$$

$$-\frac{\lambda_1\cdot b_1\cdot z_1}{T_1-l_1}+p\cdot A_1\cdot\alpha_1\cdot l_1^{\alpha_1-1}\cdot\Phi_1^{\beta_1}\cdot N_1^{\alpha_1}=0;$$

$$-\frac{\lambda_2\cdot b_2\cdot z_2}{T_2-l_2}+p\cdot A_2\cdot\alpha_2\cdot l_2^{\alpha_2-1}\cdot\Phi_2^{\beta_2}\cdot N_2^{\alpha_2}=0.$$

Оптимум для неё определяется условиями Куна–Таккера

$$\left[A_1\cdot(l_1\cdot N_1)^{\alpha_1}\cdot\Phi_1^{\beta_1}+A_2\cdot(l_2\cdot N_2)^{\alpha_2}\cdot\Phi_2^{\beta_2}-a\right]\cdot p=\lambda_1\cdot N_1+\lambda_2\cdot N_2+\lambda_3\cdot N_3.$$

Получим следующие значения: p = 0,335, l_1 = 2,695, l_2 = 5,243, Φ_1 = 2,09, Φ_2 = 2,91.

Можно заметить, что они полностью совпадают со значениями, полученными ранее максиминным методом.

Функция Лагранжа для оптимизации полезности потребителя имеет вид:

$$L=V+\beta\cdot(q\cdot l-p\cdot x-D).$$

Выражения зависимостей потребления от налогов:

$$x_1 = \frac{q_1 \cdot T_1 - D_1}{(1+b_1)\cdot p};\ x_2 = \frac{q_2 \cdot T_2 - D_2}{(1+b_2)\cdot p};\ x_3 = \frac{r\cdot \Phi - D_3}{p};\ \beta_i = \frac{1}{p\cdot x_i}.$$

Для известных множителей оптимума по Роулзу:

$$x_1 = \frac{\lambda_1 \cdot z_1}{p};\ \lambda_1 = p\cdot x_1;\ \beta_1 = \frac{1}{\lambda_1 \cdot z_1};\ \lambda_1 = \frac{q_1 \cdot T_1 - D_1}{1+b_1}.$$

Можно использовать прежнюю схему, позволяющую поступать аналогично случаю утилитаристской ОФП:

$$\lambda_1 \cdot \beta_1 = \lambda_2 \cdot \beta_2 = \lambda_3 \cdot \beta_3;$$

$$\frac{q_1 \cdot T_1 - D_1}{(1+b_1)\cdot p\cdot \lambda_1 \cdot z_1} = \frac{r\cdot \Phi - D_3}{p\cdot \lambda_3 \cdot z_3};\ B_1 = \frac{\lambda_1 \cdot (1+b_1)\cdot z_1}{\lambda_3 \cdot z_3};\ B_2 = \frac{\lambda_2 \cdot (1+b_2)\cdot z_2}{\lambda_3 \cdot z_3};$$

$$D_1 = q_1 \cdot T_1 - B_1 \cdot (r\cdot \Phi - D_3);\ D_2 = q_2 \cdot T_2 - B_2 \cdot (r\cdot \Phi - D_3);$$

$$q_1 \cdot T_1 - B_1 \cdot (r\cdot \Phi - D_3) + q_2 \cdot T_2 - B_2 \cdot (r\cdot \Phi - D_3) + D_3 = p\cdot a - \Pi_1 - \Pi_2;$$

$$D_3 = \frac{p\cdot a - \Pi_1 - \Pi_2 - T_1 \cdot q_1 - T_2 \cdot q_2 + r\cdot \Phi \cdot (B_1 + B_2)}{1 + B_1 + B_2}.$$

В работе [1] указывается, что для обеспечения в равновесии социальной сбалансированности интересов групп по ОФП Роулза необходимо в каждый момент соблюдать выполнение равенств (при всех z_i отличных от нуля):

$$\lambda 1 \cdot (\ln x1 + b1 \cdot \ln(T1 - l1)) = \lambda 3 \cdot \ln x3,\ \lambda 2 \cdot (\ln x2 + b2 \cdot \ln(T2 - l2)) = \lambda 3 \cdot \ln x3.$$

Подставив в них выражения для x_i, l_i, получаем:

$$\lambda_1 \cdot \left(\ln \frac{q_1 \cdot T_1 - D_1}{(1+b_1)\cdot p} + b_1 \cdot \ln\left(T_1 - \frac{q_1 \cdot T_1 + b_1 \cdot D_1}{q_1 \cdot (1+b_1)} \right) \right) = \lambda_3 \cdot \ln \frac{r\cdot \Phi - D_3}{p},$$

откуда $D_1 = q_1 \cdot T_1 - (1+b_1)\cdot \left[\left(\frac{r\cdot \Phi - D_3}{p} \right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \cdot \left(\frac{q_1}{b_1} \right)^{b_1} \cdot p \right]^{\frac{1}{b_1+1}}$,

$$D_2 = q_2 \cdot T_2 - (1+b_2)\cdot \left[\left(\frac{r\cdot \Phi - D_3}{p} \right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \cdot \left(\frac{q_2}{b_2} \right)^{b_2} \cdot p \right]^{\frac{1}{b_2+1}}.$$

Соотношение Вальраса в этом случае:

$$q_1 \cdot T_1 - (1+b_1) \cdot \left[\left(\frac{r \cdot \Phi - D_3}{p} \right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \cdot \left(\frac{q_1}{b_1} \right)^{b_1} \cdot p \right]^{\frac{1}{b_1+1}} +$$

$$+q_2 \cdot T_2 - (1+b_2) \cdot \left[\left(\frac{r \cdot \Phi - D_3}{p} \right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \cdot \left(\frac{q_2}{b_2} \right)^{b_2} \cdot p \right]^{\frac{1}{b_2+1}} + D_3 - p \cdot a + \Pi_1 + \Pi_2 = 0 . \quad (42)$$

Решив это уравнение относительно D_3, найдём затем и D_1, D_2.

Были проведены расчёты по выходу в состояние равновесия программой, написанной в пакете «MATHCAD» (табл. 5). Разностные уравнения выхода в равновесие аналогичны уравнениям предыдущего случая, за исключением формул для определения налогов D, а также переменных рыночного поведения групп при CES-функциях полезности.

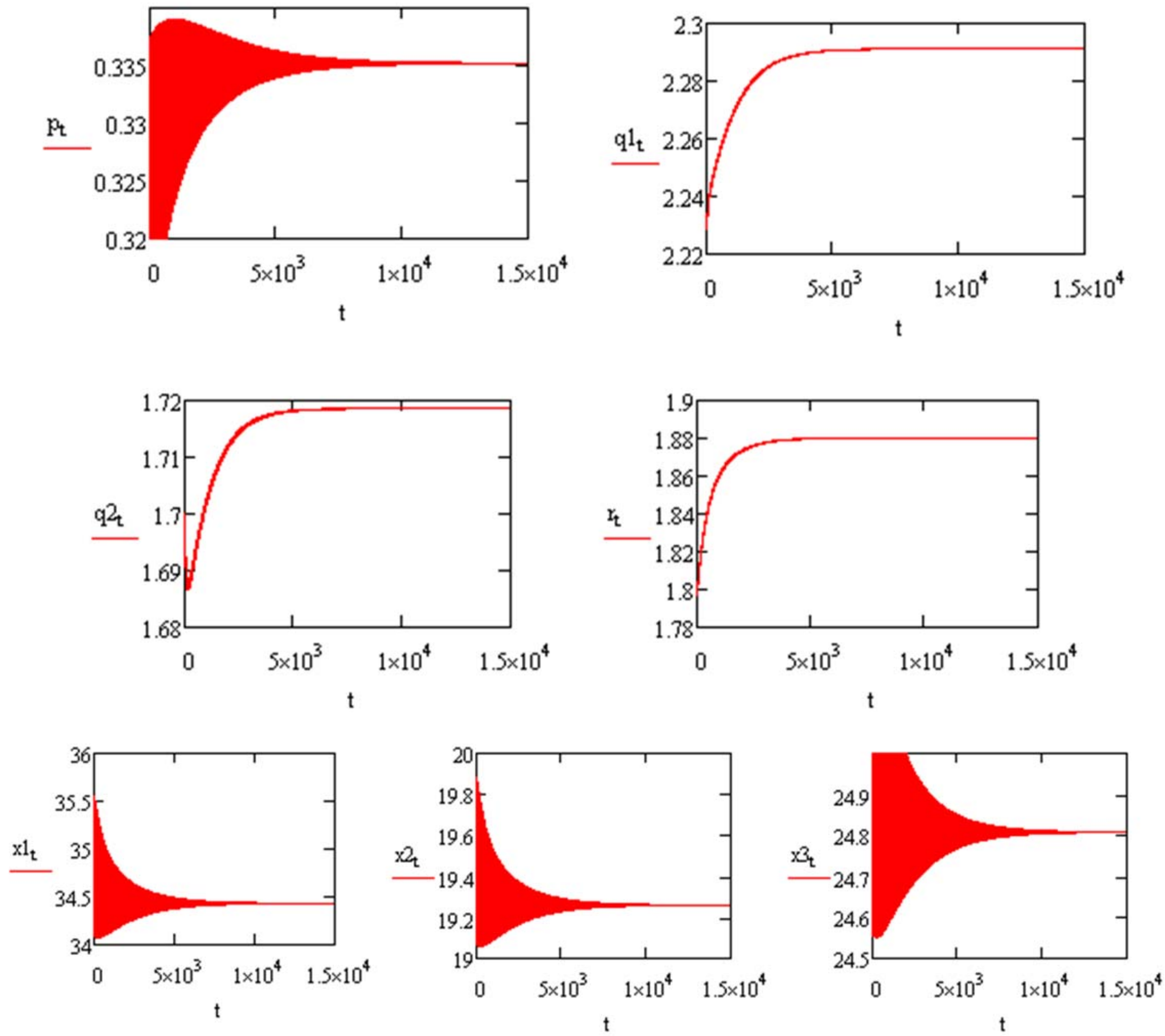
Таблица 5

Сравнение оптимальных и равновесных значений переменных для метода Роулза

Переменные	p	q_1	q_2	r	x_1	x_2	x_3	l_1	l_2	Φ_1	Φ_2	y_1	y_2
Равновесные	0,33	2,25	1,69	1,85	34,43	19,26	24,8	2,69	5,2	2,1	2,9	33,5	48
Оптимальные	0,335	2,29	1,7	1,88	34,43	19,26	24,8	2,69	5,2	2,1	2,9	33,5	48

Можно видеть, что отношение оптимальных значений к равновесным ценовых параметров p, q_1, q_2, r равно 1,017, а значения x_i, l_i, y_i и Φ_i равны между собой.

Ниже представлены графики выхода на равновесие переменных системы для метода Роулза.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью проведенных расчётов было продемонстрировать на конкретных (пусть условных) данных возможность анализа экономического равновесия и оптимальности при различных представлениях о справедливом согласовании интересов участников рынка. В отличие от большинства известных нам отечественных работ по анализу равновесия и оптимальности здесь мы использовали CES-функции полезности, а также ввели в рассмотрение «собственника–рантье», который «не работает, но ест», т.е. потребляет только за счёт того, что он является собственником, не участвуя своим трудом в процессе производства. Как показано в работе, во всех этих случаях социально-оправданное равновесие может быть найдено с помощью не очень сложных процедур систематических корректировок налогов. Отметим, что приводимые в Приложениях программы могут быть легко использованы любым читателем для любых данных, например, в учебных целях или в собственном исследовании.

Автор выражает благодарность Ю.Н. Гаврильцу за ценные советы по проведению данного исследования.

Приложение 1.
Программа нахождения значений *D* из условия (42) и закона Вальраса

$$
f(p, q_1, q_2, r, ll_1, ll_2) := \left|
\begin{array}{l}
\left[s \leftarrow r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - p \cdot \left(\dfrac{\lambda_3 \cdot \gamma \cdot b_3}{p} \right)^{\frac{1}{1+b_3}} \right] \\
ll \leftarrow ll_1 + ll_2 \\
K_1 \leftarrow \left[\dfrac{a_1 \cdot q_1}{(1-a_1) \cdot p} \right]^{\frac{1}{1+b_1}} \\
K_2 \leftarrow \left[\dfrac{a_2 \cdot q_2}{(1-a_2) \cdot p} \right]^{\frac{1}{1+b_2}} \\
D_3 \leftarrow \mathrm{root}\left[\left[q_1 \cdot T_1 - \dfrac{q_1 + p \cdot K_1}{K_1} \cdot \left[\dfrac{\lambda_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - s \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_1+1}} \right] \cdot N_1 + \right. \\
\qquad + \left[q_2 \cdot T_2 - \dfrac{q_2 + p \cdot K_2}{K_2} \cdot \left[\dfrac{\lambda_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - s \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_2+1}} \right] \cdot N_2 + \\
\qquad \left. + s \cdot N_3 - p \cdot a + ll, s \right] \\
D_1 \leftarrow q_1 \cdot T_1 - \dfrac{q_1 + p \cdot K_1}{K_1} \cdot \left[\dfrac{\lambda_1 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_1+1}} \\
D_2 \leftarrow q_2 \cdot T_2 - \dfrac{q_2 + p \cdot K_2}{K_2} \cdot \left[\dfrac{\lambda_2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \left(r \cdot \dfrac{\Phi}{N_3} - D_3 \right)^{1+b_3}}{\lambda_3 \cdot p^{b_3+1} \cdot \gamma \cdot b_3} \right]^{\frac{1}{b_2+1}} \\
v_0 \leftarrow D_1 \\
v_1 \leftarrow D_2 \\
v_2 \leftarrow D_3 \\
v
\end{array}
\right.
$$

Приложение 2.
Программа нахождения равновесия для CES-функции

$R :=$ for $i \in 0$

$p_i \leftarrow 0{,}13$

$q1_i \leftarrow 0{,}24$

$q2_i \leftarrow 0{,}21$

$r_i \leftarrow 3{,}14$

for $t \in 1..m$

$$l1_{t-1} \leftarrow \left[p_{t-1} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q1_{t-1}} \right)^{1-\beta_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r_{t-1}} \right)^{\beta_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}}$$

$$l2_{t-1} \leftarrow \left[p_{t-1} \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q2_{t-1}} \right)^{1-\beta_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r_{t-1}} \right)^{\beta_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}}$$

$$y1_{t-1} \leftarrow A_1 \cdot \left[\left[p_{t-1} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q1_{t-1}} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}} \right]^{\beta_1} \cdot \left(l1_{t-1} \right)^{\alpha_1}$$

$$y2_{t-1} \leftarrow A_2 \cdot \left[\left[p_{t-1} \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q2_{t-1}} \right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}} \right]^{\beta_2} \cdot \left(l2_{t-1} \right)^{\alpha_2}$$

$$ll1_{t-1} \leftarrow p_{t-1} \cdot y1_{t-1} - \left[q1_{t-1} \cdot l1_{t-1} + r_{t-1} \cdot \left[p_{t-1} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q1_{t-1}} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}} \right]$$

$$ll2_{t-1} \leftarrow p_{t-1} \cdot y2_{t-1} - \left[q2_{t-1} \cdot l2_{t-1} + r_{t-1} \cdot \left[p_{t-1} \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q2_{t-1}} \right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}} \right]$$

$$D3_{t-1} \leftarrow f\left(p_{t-1}, q1_{t-1}, q2_{t-1}, r_{t-1}, ll1_{t-1}, ll2_{t-1} \right)_2$$

$$K1_{t-1} \leftarrow \left[\frac{a_1 \cdot q1_{t-1}}{(1-a_1) \cdot p_{t-1}} \right]^{\frac{1}{1+b_1}}$$

$$K2_{t-1} \leftarrow \left[\frac{a_2 \cdot q2_{t-1}}{(1-a_2) \cdot p_{t-1}} \right]^{\frac{1}{1+b_2}}$$

$$D1_{t-1} \leftarrow f\left(p_{t-1}, q1_{t-1}, q2_{t-1}, r_{t-1}, ll1_{t-1}, ll2_{t-1} \right)_0$$

$$D2_{t-1} \leftarrow f\left(p_{t-1}, q1_{t-1}, q2_{t-1}, r_{t-1}, ll1_{t-1}, ll2_{t-1} \right)_1$$

$$\beta3_{t-1} \leftarrow \frac{\left(p_{t-1} \right)^{b_3} \cdot \gamma \cdot b_3}{\left(r_{t-1} \cdot \frac{\Phi}{N_3} - D3_{t-1} \right)^{1+b_3}}$$

$$\Phi1_{t-1} \leftarrow \left[p_{t-1} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{q1_{t-1} \cdot N_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}}$$

$$x1_{t-1} \leftarrow \frac{K1_{t-1} \cdot \left(q1_{t-1} \cdot T_1 - D1_{t-1} \right)}{q1_{t-1} + p_{t-1} \cdot K1_{t-1}}$$

$$x2_{t-1} \leftarrow \frac{K2_{t-1} \cdot \left(q2_{t-1} \cdot T_2 - D2_{t-1} \right)}{q2_{t-1} + p_{t-1} \cdot K2_{t-1}}$$

$$\begin{pmatrix} p_t \\ q1_t \\ q2_t \\ r_t \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} p_{t-1} \\ q1_{t-1} \\ q2_{t-1} \\ r_{t-1} \end{pmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} x1_{t-1} \cdot N_1 + x2_{t-1} \cdot N_2 + N_3 \cdot \left(\frac{\gamma \cdot b_3}{p_{t-1} \cdot \beta3_{t-1}} \right)^{\frac{1}{1+b_3}} + a - y1_{t-1} - y2_{t-1} \\ l1_{t-1} - \left(\frac{D1_{t-1} + p_{t-1} \cdot T_1 \cdot K1_{t-1}}{q1_{t-1} + p_{t-1} \cdot K1_{t-1}} \right) \cdot N_1 \\ l2_{t-1} - \left(\frac{D2_{t-1} + p_{t-1} \cdot T_2 \cdot K2_{t-1}}{q2_{t-1} + p_{t-1} \cdot K2_{t-1}} \right) \cdot N_2 \\ -\Phi + \Phi1_{t-1} + \left[p_{t-1} \cdot A_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{q2_{t-1}} \right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_2}{r_{t-1}} \right)^{1-\alpha_2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_2-\beta_2}} \end{bmatrix}$$

$$v_0 \leftarrow p$$

$$v_1 \leftarrow q_1$$

$$v_2 \leftarrow q_2$$

$$v_3 \leftarrow r$$

$$v$$

Приложение 3.
Программа нахождения значений D_1, D_2, D_3 для Роулза

$$f\left(p, q_1, q_2, r, T_1, T_2, b_1, b_2, a, \Phi, ll, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_3\right) :=$$

$$\left|\begin{array}{l}
s \leftarrow r\cdot\Phi - p\cdot x_3 \\
D_3 \leftarrow \mathrm{root}\left[q_1\cdot T_1 - (1+b_1)\cdot\left[\left(\dfrac{r\cdot\Phi - s}{p}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\cdot\left(\dfrac{q_1}{b_1}\right)^{b_1}\cdot p\right]^{\frac{1}{b_1+1}} + \right. \\
\qquad \left. + q_2\cdot T_2 - (1+b_2)\cdot\left[\left(\dfrac{r\cdot\Phi - s}{p}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\cdot\left(\dfrac{q_2}{b_2}\right)^{b_2}\cdot p\right]^{\frac{1}{b_2+1}} + s - p\cdot a + ll, s\right] \\
D_1 \leftarrow q_1\cdot T_1 - (1+b_1)\cdot\left[\left(\dfrac{r\cdot\Phi - D_3}{p}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\cdot\left(\dfrac{q_1}{b_1}\right)^{b_1}\cdot p\right]^{\frac{1}{b_1+1}} \\
D_2 \leftarrow q_2\cdot T_2 - (1+b_2)\cdot\left[\left(\dfrac{r\cdot\Phi - D_3}{p}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\cdot\left(\dfrac{q_2}{b_2}\right)^{b_2}\cdot p\right]^{\frac{1}{b_2+1}} \\
v_0 \leftarrow D_1 \\
v_1 \leftarrow D_2 \\
v_2 \leftarrow D_3 \\
v
\end{array}\right.$$

Литература

1. *Гаврилец Ю.Н.* Целевые функции социально-экономического планирования. М.: Экономика, 1983.
2. *Гаврилец Ю.Н., Миркин В.Г.* Конкретизация модели оптимально – равновесного функционирования // Моделирование социальных факторов в экономико-математических исследованиях. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1985.
3. *Гаврилец Ю.Н., Чекмарева Е.А.* Моделирование равновесного функционирования экономики в Северо-Западном федеральном округе // Экономические и социальные перемены. 2010. № 4 (12).
4. *Gavrilets Yu.N., Tarakanova I.V.* Optimality and Equilibrium in a Single-Product Economic Model with Collective Good (Computer Experiments) // Montenegrin Journal of Economics. 2013. № 10.
5. *Koskela E., Viren M.* A note on labour supply rationing in household consumption behavior. University of Helsinki, 1986.

С.А. Никитин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ С ОБЩЕСТВЕННЫМИ БЛАГАМИ: ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассматриваются модели производства и распределения общественных благ, основываясь на понятиях: Парето-оптимальность, равновесие Линдаля, ядро. Проведен аналитический обзор работ, посвященных созданию экономически эффективного механизма распределения и проверке их жизнеспособности экспериментальным путем.

The models of production and distribution of public goods are considered, based on the concepts of Pareto-optimality, equilibrium, Lindale, the core. The analysis of papers devoted to the development of cost-effective distribution mechanism and testing their viability in an experimental way is made.

Существование общественных благ серьезно оспаривает традиционные или «естественные» решения в распределении частных благ в экономику. Важные вопросы, можем ли мы положиться на рынок, чтобы обеспечить оптимальное количество общественных благ таких, как чистота воздуха, и, насколько мы можем полагаться на «естественные» процессы, такие как добровольный вклад в решение экологических проблем, сводятся к фундаментальным вопросам о природе человека, т.е. о том, абсолютно ли эгоистичны люди или нет. Существует большой объем «экспериментальной» литературы, в которой авторы попытались ответить на этот вопрос и оценить масштабы т.н. проблемы безбилетника в экономике с общественными благами.

Основное различие между общественными и частными благами заключается в двух аспектах:

- Конкурентно ли благо?
- Исключаемо ли благо?

Благо неконкурентно, если его потребление одним индивидом не нарушает (не запрещает) его потребление другим (например, национальная оборона). Благо неисключаемо, если права собственности или соглашение не разрешают (не позволяют) собственнику (обладателю) блага исключить других из его потребления.

Для начала можно рассмотреть простую модель общего равновесия, которое может быть первичным инструментом в анализе распределения общественных благ. Эта модель используется для представления основной теории равновесия Линдаля. Затем можно развить эту модель до более общей модели производства общественных благ и показать, что равновесия Линдаля в этой модели Парето-эффективны.

Пусть в экономике m агентов, $n + 1$ благ. Можно использовать обобщенные условные обозначения $(w_i; y_i)$, где $w_i \in \mathbb{R}$ и $y_i \in \mathbb{R}^n$ чтобы обозначить набор продуктов, доступный *i*-му агенту $i = 1, \ldots, m$. Можно предположить, что множество «потребления» потребителя *i* *Z* задано в форме $Z_i = W_i \cdot Y_i$, где Y_i непустое множество $\mathbb{R}^n$ и W_i задается в форме $W_i = \{w_i \in \mathbb{R} | w_i \geq \hat{w}_i\}$, для какого-то фиксированного $\hat{w}_i \in \mathbb{R}$.

Пусть также плата агента u_i или его функция полезности $u_i(w_i; y_i) = w_i + v_i(y_i)$ имеет квазилинейную форму $c: Y \to \mathbb{R}_+$, и принимается заданной функция издержек *c*, где *Y* – непустое множество декартова произведения $\prod_{i=1}^{m} Y_i$. Наконец, можно предположить, что допустимое для *E* множество *A*(*E*) имеет форму

$$A(E) = \left\{ \langle (w_i; y_i) \rangle \in Z \left| \langle y_i \rangle \in Y, \ \sum_{i=1}^{m} w_i + c(y) \leq \overline{w}_i \right. \right\}, \ Z = \prod_{i=1}^{m} Z_i,$$

где $\overline{w}_i > 0$ – полный вклад блага w. Пусть также, что $\overline{w}_i > \sum_{i=1}^{m} w_i$. Будем использовать общее обозначение $y = (y_1, \ldots, y_m)$, чтобы обозначить элементы $\prod_{i=1}^{m} Y_i$, определим $W = \prod_{i=1}^{m} W_i$ и используем общее обозначение $w = (w_1, \ldots, w_m)$, чтобы определить элементы *W*.

Модель и переменные в ней могут быть интерпретированы различными способами, и это можно считать одна из сильных сторон этой модели. Пусть есть *n* общественных благ и одно частное благо, т.е. $Y_i = \mathbb{R}_+^m$, $i = 1, \ldots, m$.

В модели с чистыми общественными благами, каждый потребитель потребляет одно и то же количество общественного блага, т.е.

$$Y = \left\{ y \in \prod_{i=1}^{m} Y_i \mid y_1 = \ldots = y_m \right\}.$$

Производственные возможности общественных благ суммируются путем функции издержек *c*, которая может рассматриваться как выражающая количество частного блага, которое должно быть использовано как вклад, чтобы произвести вектор ***y*** общественных благ. Наконец, в этой интерпретации, можно задать $\overline{w}_i = 0$ для каждого *i*. Теперь, если предположить что *Y* компактное множество, что

$v_i : Y_i \to \mathbb{R}$ – непрерывно для любого *i*, и *c* – также непрерывная функция, то существует $y^* \in Y$ удовлетворяющий $\forall y \in Y$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i\left(y_i^*\right) - c(y^*) \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\left(y\right) - c\left(y\right). \tag{1}$$

Этот факт предоставляет возможность для следующего утверждения.

Утверждение 1. Если $y^* \in Y$ удовлетворяет (1), и если $c\left(y_i^*\right) \leq \overline{w}$, то для всех $\left\langle w_i^* \right\rangle \in W$, удовлетворяющих

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^* = \overline{w} - c(y^*) \tag{2}$$

распределение $c\left(y_i^*\right) \leq \overline{w}$ строго Парето-эффективно.

Утверждение 2. Предположим, что *Y* – непустое выпуклое подмножество произведения $\prod_{i=1}^{m} Y_i$, что $v_i : Y_i \to \mathbb{R}$ – вогнутое и непрерывное отображение для $i = 1, \ldots, m$, и что *c* – выпуклое. Тогда если $\left\langle \left\langle w_i^*; y_i^* \right\rangle \right\rangle$ – Парето-эффективное распределение для *E*, которое удовлетворяет условию

$$w_i^* > \widehat{w_i} \text{ для } i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

и это должен быть случай, что $\left\langle \left\langle w_i^*; y_i^* \right\rangle \right\rangle$ также удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^* + c(y^*) = \overline{w}, \tag{4}$$

и при этом

$$\forall y \in Y \sum_{i=1}^{m} v_i\left(y_i^*\right) - c(y^*) \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\left(y\right) - c\left(y\right). \tag{5}$$

Рассмотрим еще одну модель с общественными благами. В модели рассматриваются чистые общественные блага, и вектор общественных благ *y* доступен и одинаков для каждого потребителя.

Допустим, что существует фиксированное количество доступного частного блага, и что это частное благо также доступно для потребления одним из *m* потребителей или использовано для производства одного или всех *n* общественных благ. Будем использовать обобщенное обозначение $(x_i; y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ для обозначения потребительского набора, доступного для *i*-го потребителя.

Также предположим, что предпочтения i-го потребителя отражаются непрерывно-дифференцируемой функцией полезности и для всех

$$(x_i; y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} > 0 \ \text{и} \ \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \geq 0, \tag{6}$$

и что u_i – строго квазивогнутая функция. Наконец, можно обозначить общее количество частного блага, доступного в экономике как w и $w > 0$.

Тогда можно дать следующее определение для допустимого распределения.

Определение. Будем говорить, что распределение $a^* = (x^*; y^*) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ – допустимое, если $\sum_{i=1}^{m} x_i^* + c\left(y^*\right) \leq w$.

Также можно рассмотреть необходимые условия Парето-эффективности.

Рассмотрим задачу $\max u_1(x, y)$, при условиях $u_i\left(x_i, y\right) - \overline{u}_i = 0$,

$$w - \sum_{i=1}^{m} x_i - c\left(y\right) = 0.$$

Находя первые частные производные нужного лагранжиана, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \mu = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial y_j} - \mu \frac{\partial c}{\partial y_j} = 0, \ \ j = 1, \ldots, n; \tag{8}$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \mu = 0, \ \ i = 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Из (9) имеем:

$$\lambda_i = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \ \ i = 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Из (7) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \mu. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (8), имеем:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_{i=2}^{m} \mu \left(\frac{\partial u_i / \partial y_j}{\partial u_i / \partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial c}{\partial y_i}. \tag{12}$$

И используя (11), получаем условия Самуэльсона:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu \left(\frac{\partial u_i / \partial y_j}{\partial u_i / \partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial c}{\partial y_j}. \tag{13}$$

Такая формулировка позволяет рассмотреть совместное производство общественных благ. Интересные особые случаи предполагаемой производственной технологии включают в себя сепарабельные функции издержек, которые мы будем рассматривать в связи с равновесием Линдаля и равновесием пропорций:

$$c(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j(y_j). \tag{14}$$

Например,

$$c(y) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j y_j;$$

$$\gamma_j = \text{const};$$

$$\gamma_j > 0.$$

Обычно в литературе используется предположение, что каждая функция полезности имеет квазилинейную форму

$$u_i(x_i; y) = x_i + v_j(y). \tag{15}$$

В этом случае представляемая модель становится особым случаем простой модели.

Действительно, это следует из утверждения (1), что если $y^* \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $c(y^*) \le w$ и удовлетворяет

$$\sum_{i=1}^{m} v_i(y_i^*) - c(y^*) \ge \sum_{i=1}^{m} v_i(y) - c(y), \tag{16}$$

тогда для любого заданного $x^* \in \mathbb{R}_+^m$, удовлетворяющего $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = w - c(y^*)$ распределение $\langle\langle x_i^* \rangle; y^* \rangle$ Парето-эффективно.

Если каждая функция $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{c}$ дифференцируема, то необходимое условие для (16) содержит (10)–(12), что возвращает нас к условиям Самуэльсона, но другим путем. Из этого можно получить следующий результат:

Утверждение. При заданных предположениях, описанных в этом разделе, а также что функции полезности потребителей квазилинейны, то если:

1) v вогнутая для всех i;

2) c выпуклая;

3) по крайней мере, одна из функций V_i строго вогнута или $\boldsymbol{c}$ строго выпукла, то если существует Парето-эффективный вектор общественных благ, то он единственный.

В этой связи, если $\boldsymbol{c}$ непрерывна и множество $Y \overset{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \middle| c(y) \le w \right\}$ ограничено, и при этом функции из (15) все непрерывны, то из утверждения (1) следует, что Парето-эффективное распределение будет существовать при оставшихся предпосылках этого раздела.

Теперь обратимся к специальному случаю модели, часто встречающемуся в литературе. Оставим только одно общественное благо, и производственная функция f отражает технологию производства общественного блага из частного. В этом случае условия Самуэльсона принимают форму

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u_i / \partial y}{\partial u_i / \partial x_i} \right) = \frac{1}{f'(z^*)}, \tag{17}$$

где $f(z^*)$ – Парето-эффективное количество общественного блага и z^* – количество частного блага, необходимого для его производства.

Предположим, что мы сравниваем это с тем, что могли бы достигнуть в производстве общественных благ, если бы индивиды самостоятельно и независимо решали сколько нужно вложить в производство общественных благ. Как прежде, мы нормализуем множество цен на частные блага. Следовательно, если мы обозначим вклад индивидов кроме i-го как z_{-i}, то задача максимизации может быть выражена как

$$\max_z u_i \left[(w_i - z_i); f(z_i + z_{-i}) \right]. \tag{18}$$

Условия первого порядка выглядят так:

$$-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial y} f'\left(z_i + z_{-i} \right) = 0.$$

Так что

$$\frac{\partial u_i / \partial y}{\partial u_i / \partial x_i} = \frac{1}{f'(z_i + z_{-i})}. \tag{19}$$

Сравнивая (19) и (17) видим различия, что равновесие, основанное на добровольных вкладах, не будет Парето-эффективным.

Полученные определения и результаты могут быть расширены для случая, где есть производство и частного и общественного блага. Развивая эту идею, можно изменить модельное множество из предыдущего раздела очень слабо. А именно, предположить, что индивиды имеют строго асимметричные отношения предпочтения P_i.

Далее, можно специфицировать изначальные вклады (пожертвования) общественных благ для потребителей, которые обозначим как w_i, и предположим, что $w_i \geq 0$, для всех i. Окончательно, мы допустим, что $c(0) = 0$.

Интересное теоретическое изобретение распределения производства и потребления в экономике с общественными благами это равновесие Линдаля. В равновесии Линдаля каждый потребитель платит индивидуальную цену за единицу q_{ij} – j-го блага, и мы будем полагать, что предпочтения потребителей – строго возрастающие по частному благу, так что можно нормализовать множество цен, от 0 до 1.

Пусть вектор цен на общественные блага, которые уплачены потребителем, обозначается как q_i, и также используем следующее определение.

Определение. Будем говорить, что s – это распределение долей, если $s_i \in \mathbb{R}_+^m$ и $\sum_{i=1}^{m} s_i = 1$.

s – это доля владения фирмой, производящей общественное благо, i-го потребителя. И если q – это персональный вектор цен потребителя на общественные блага, а π – это прибыль фирмы, то в контексте равновесия Линдаля, бюджетное ограничение потребителя задано как

$$x_i + q_i y \leq w_i + s_i \pi .$$

Определение. Будем говорить, что $\left(x^*; y^*; \langle q^* \rangle\right)$ – равновесие Линдаля при заданном распределении долей s^* если

1) $(x^*; y^*)$ – допустимо;

2) $q_i^* \in \mathbb{R}_+^m$ для всех i;

3) $y^* \in \mathbb{R}_+^n$ максимизирует прибыль фирмы при заданных q^*, где $q^* = \sum_{i=1}^{m} q_i^*$

так что $\forall y \in \mathbb{R}_+^n \; \pi^* \overset{\text{def}}{=} q^* y^* - c\left(y^*\right) \geq q^* y - c(y)$;

4) для каждого i $x_i^* + q_i^* y^* \leq w_i + s_i \pi^*$ и для всех $(x_i; y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ имеем

$$\left(x_i; y\right) P_i \left(x_i^*; y^*\right) \Rightarrow x_i + q_i^* y > w_i + s_i \pi^* .$$

Если допустить, что индивидуальные предпочтения потребителя описываются непрерывной дифференцируемой функцией полезности, можно показать, что условия Самуэльсона удовлетворяют условию Линдаля. И если затем, допустить дополнительно, что функции полезности потребителей вогнутые, а функция издержек фирмы – выпуклая, то можно установить, что всякий раз, когда условия Самуэльсона удовлетворяются при допустимом распределении, то оно Парето – эффективно. Из этого следует, что при заданных допущениях равновесие Линдаля должно быть Парето-эффективным.

Утверждение. При допущениях сделанных в этом разделе, если $\left(x^*;y^*;\langle q^*\rangle\right)$ – равновесие Линдаля, при заданном распределении долей s^*, то $(x^*;y^*)$ – Парето-эффективно.

Если «усилить» допущения до тех, что были использованы в предыдущем разделе, можно получить более строгое заключение.

Утверждение. Если каждое отношение предпочтения описано непрерывной функцией полезности, которая строго возрастает по частному благу, и если $\left(x^*;y^*;\langle q^*\rangle\right)$ – равновесия Линдаля, при заданном распределении владения $(w^*;s^*)$, то $(x^*;y^*)$ – строго Парето-эффективно.

Однако, не очевидно, что существует практический рыночный механизм, который бы привел цены на общественные блага к их равновесным уровням. Это иногда может быть оспорено тем, что общественное агентство (планировщик), может вычислить равновесные цены и просто объявить их потребителям, тем не менее, неясно как планировщик может получить всю информацию. Среди прочего, потребители имеют стимулы выражать не полностью их желание платить за общественные блага.

Также существуют и другие проблемы.

Во-первых, производитель может получать положительную прибыль и равновесие Линдаля будет зависеть от того как эти прибыли будут распределены. Во-вторых, если определять ядро экономики в той манере, которая кажется стандартной в контексте этой модели, то равновесие Линдаля может быть не в ядре. В-третьих, если функция издержек – вогнутая (случай возрастающей отдачи), то может не существовать уровень производства общественных благ, максимизирующий прибыль, и, следовательно, равновесие Линдаля не будет существовать.

Также существуют трудности, которые возникают в отношении так называемого ядра.

Определение. Будем говорить, что коалиция $S \subseteq M$ может блокировать распределение $(x^*;y^*)\in\mathbb{R}_+^{n+m}$, если существуют $x_i\in\mathbb{R}_+$ для каждого $i\in S$ и $y\in\mathbb{R}_+^n$, такие что $\forall i\in S$: $\left(x_i;y\right)P_i\left(x_i^*;y^*\right)$, а также $c(y)\le\sum\limits_{i\in S}(w_i-x_i)$.

Допустимое состояние $(x_i; y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ будет называться лежащим в ядре или «ядром распределения», если оно не может быть блокировано любой коалицией $S \subseteq M$.

Основная проблема с представленным определением, состоит в том, что неочевидно, что производственные возможности должны рассматриваться как достижимые коалицией, которая является собственным подмножеством множества *M*.

Оригинальное определение ядра для экономики с общественными благами, данное Фолеем, достаточно эквивалентно представленному здесь, но если допустить, что производственная технология для производства общественных благ – выпуклый конус, то это означает, что производственная технология удовлетворяет условию аддитивности. Это придает смысл тому, чтобы представить коалицию, которая может произвести что-то, что они желают производить так долго пока не выплатят полную стоимость, потому что одновременно группа, выделенная из первой коалиции, с таким же успехом может произвести то, что они пожелают, при условии, что они оплачивают полную стоимость производства их выбора.Более того, при заданных условиях производства, прибыль производителя в равновесии Линдаля всегда будет равна нулю. Предположим, что каждое отношение предпочтение P_i асимметрично и возрастает по компоненте «общественное благо», и функция издержек *c* – линейна.

Тогда если $\left(x^*; y^*; \langle q^* \rangle\right)$ – равновесие Линдаля, при заданных долях распределения s, то распределение $(x^*; y^*)$ – ядро распределения.

Следовательно, одна из трудностей, о которой было упомянуто выше, говоря о равновесии Линдаля, исчезнет, если функция издержек линейна, хотя цена, которую мы платим за достижение этой цели, довольно высока.

Канеко ввел концепцию равновесия для экономики с общественными благами, которая, формально в каком-то контексте являлась эквивалентной равновесию Линдаля, имеет несколько реальных преимуществ в другом контексте. Определение Канеко было расширено и усовершенствовано в работе Диамантарасом и Уилки.

Определение. Система разделения (распределения) издержек – это семейство из *m* функций $g_i : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, таких что $\forall y \in \mathbb{R}_+^n \ \sum_{i=1}^{m} g(y) = c(y)$.

Интересные примеры системы разделения издержек включают то, что ввел Канеко для этого случая, для которых функция издержек принимает форму $c(y)=\sum_{j=1}^{n}c_j(y_j)$.

Это, конечно, случай, когда и общественные блага могут быть произведены независимо без внешних эффектов. В этой ситуации Канеко определяет систему разделения неотрицательной матрицей $m\times n$ с элементами (r_{ij}), удовлетворяющим условиям $\sum_{i=1}^{m}r_{ij}=1$.

Система распределения/разделения издержек задается так:

$$g_i(y)=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}c_j(y_j).$$

Мас-Коллел и Сильвестр уделяют большую часть внимания линейным системам форму $g_i(y)=a_iy+b_ic(y)$, где $a_i\in\mathbb{R}^n$ и $b_i\in\mathbb{R}_+$, и $\sum_{i=1}^{m}a_i=0$, $\sum_{i=1}^{m}b_i=1$.

Определение. Допустимое состояние $(x^*;y^*)$ – равновесие в распределении издержек при заданной системе разделения издержек $g=(g_1,\ldots,g_m)$, если для каждого $i\in M$ и $x_i^*=w_i-g_i(y^*)$ и $\forall(x_i;y)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:\ (x_i;y)P_i\left(x_i^*;y^*\right)\Rightarrow x_i+g_i\left(y\right)>w_i$.

Если каждая функция g_i – неотрицательно определена, то такое равновесие всегда находится в ядре, как это обозначено ниже.

Понятия равновесия Линдаля и ядра являются основополагающими в моделировании экономических систем с общественными благами. Помимо многочисленных работ, нацеленных на получение теоретических результатов, развивающих данное направление, существует также большое количество работ, посвященных экспериментальным исследованиям по созданию экономических механизмов, которые приводили бы экономику с общественными благами в состояние равновесия и Парето-оптимума.

Обзор экспериментов. Результаты и нерешенные проблемы.

В 1972 г. Гурвиц представил концепцию совместимости стимулов, в которую включены факторы (силы), определяющие степень эгоистического поведения человека.

Теория конструкции механизма имеет дело с совместимостью стимулов в виде ограничения на выбор процедуры, используемой для принятия групповых решений. Задача состоит в том, что необходимо предложить такой механизм принятия решений, чтобы его эффективность в предположении о наличии правил поведения была бы значимой при наличии определенного (нормативного) критерия эффективности (например, Парето-эффективности).

«Принципиальное, но, обобщенно не сформулированные аксиомы некооперативного поведения состоят в том, что если человек имеет доступную доминирующую стратегию, то он будет её использовать» [28]. Поэтому, имеет смысл теоретически создавать механизмы доминирующих стратегий, т.е. такие, которые бы были неманипулируемы.

Однако, сейчас известно, что невозможно разработать механизм, позволяющий принимать коллективные решения о распределении, которые бы были сразу и информационно децентрализованы, и не манипулируемы, и Парето-оптимальны. Эта невозможность в контексте распределения ресурсов с учетом наличия общественных благ в экономике была продемонстрирована в работах Грина и Лаффонта [26], Гурвица [31], Робертса [49], Уокера [58], Мэйлата и Постлвейта [39]. Механизм Викри–Кларка–Гровса [17, 27] допускает наличие доминирующих стратегий, но получаемое распределение не вполне Парето-эффективно. Существуют другие механизмы, сохраняющие Парето-оптимальность, в некоторых из которых хранится в какой-то степени неманипулируемость. Они описаны в работах Гровса и Ледьярда [27], Гурвица [32], Уокера [59], Тиана [55], Кима [37], Пелега [48], Фолкингера [23], Чена [12].

Другие концепции реализации включают совершенное равновесие по Нэшу, недоминируемое равновесие Нэша, совершенное равновесие по подыграм, «сильное» равновесие, ядро.

Чтобы сделать любой из этих механизмов применимым в качестве реального экономического процесса, который поможет решать важные социальные проблемы, необходимо увидеть и оценить производительность механизма в реальных условиях при решении проблем, с которыми сталкиваются люди.

Эти ситуации могут быть созданы и тщательно проконтролированы в лаборатории. Когда механизм проходит тестирование в лаборатории, допущения о поведении людей, предполагаемые в теории, могут быть оспорены.

А именно:

1. Совершенная и ограниченная рациональность.

В теории предполагается, что люди полностью рациональны. Как результат, они могут достичь равновесия мгновенно при помощи самоанализа. Поскольку реальные люди ограниченно рациональны, они должны учиться методом проб и ошибок. Это приводит к важному аспекту конструирования механизмов, который не привлекал к себе большое внимание, а именно, предоставляет ли механизм человеку стимулы к обучению.

2. Статические и динамические игры.

Поскольку совершенно рациональные индивиды могут достигать равновесия мгновенно, то достаточно ограничиться статическими играми. Когда реализуется механизм среди ограниченно рациональных «игроков», ожидается, что фактическая реализация равновесия – это динамический процесс, который начинается с состояния, отличающегося от равновесного.

В этой связи возникает два вопроса:

а) Может ли изучение динамики привести к сближению к одному из равновесий, предсказанных теорией?

б) Какие алгоритмы обучения должны быть использованы для исследования динамической устойчивости механизма? На этот вопрос сможет ответить только путем оценки большого набора алгоритмов обучения в результате постановки различных экспериментов.

3. Аксиома о доминирующей стратегии.

Будут ли индивиды использовать доминирующие стратегии? Если нет, то, какие другие аспекты могут быть важными?

4. Обучаемость.

Какие аспекты механизма могут помочь игрокам научиться выбирать стратегии, приводящие к равновесию Нэша?

Несмотря на существование теоретической литературы, посвященной механизмам совместимости стимулов (мотивов), экспериментальных исследований, проверяющих эти механизмы, известно немного. Существующие экспериментальные исследования по изучению подобных механизмов, предоставляют некоторые данные о результатах реализации этих механизмов среди ограниченно рациональных людей.

Некоторые из этих данных были использованы для развития теорий динамической устойчивости таких механизмов, включающих ограниченную рациональность и обучение.

Прежде чем перейти к обзору экспериментальных результатов, сначала имеет смысл ввести обозначения и понятие «экономическая среда». Большинство экспериментальных реализаций механизмов сочетания стимулов (мотивов) используют простую среду.

Обычно существует одно частное благо x, одно общественное благо $\boldsymbol{y}$ и не меньше трёх игроков. Производственная функция для общественного блага обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, задается уравнением $y = f(x) = x/b$,

$b > 0$. Предпочтения в значительной степени ограничены классом квазилинейных предпочтений.

Пусть E представляет собой набор транзитивных, полных и выпуклых индивидуальных упорядочений предпочтений ($\succsim_i$), и первоначальный размер вложений (w_i^x). E^Q представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию полезности вида $v_i(y) + x_i$, такую, что $v_i'(y) > 0$ для всех y>0 и $w_i^x > 0$.

Когда предпочтения квазилинейны, то т.н. механизм Викри–Кларка–Гровса устойчив к стратегиям, где уведомление о чьих-то предпочтениях – это всегда доминирующая стратегия. Кроме того, важно, что любой механизм, устойчивый к стратегиям, позволяющий выбрать эффективное общественное решение в каждом профиле должен быть такого же типа [26]. Особый случай этого механизма называется опорным механизмом, который был протестирован различными группами исследователей.

Тайдман в [56] говорит о проведении «полевых» экспериментов в одном из американских колледжей, где был использован этот механизм для реального принятия коллективных решений, и делает следующие выводы. Во-первых, в полевых экспериментах невозможно контролировать предпочтения субъектов. Во-вторых, доминирующие стратегии были объяснены субъектам, и в этом случае неизвестно, является ли механизм сам по себе способен побуждать субъектов раскрывать свои истинные предпочтения, без подсказок. Это явно исказило стимулы механизма. При опросе 21% испытуемых показали завышение своих предпочтений, в то время как 46% показали занижение. Без индуцированных значений, трудно оценить производительность механизма, таких как степень и масштабы нераскрытия. Аттье, Франциози и Айсаак приводят результаты первых хорошо контролируемых лабораторных экспериментов применения опорного механизма [3]. Они обобщают результаты восьми независимых сессий в рамках двух различных конструкций механизма. Первая применялась для группы из пяти человек. Вторая – для группы, которая состояла из десяти человек с использованием такой же экономики, как и для первой группы. В каждом из десяти периодов люди принимали решение о предоставлении общественных благ. Коллективное решение было бинарным – производить благо или нет. Опорный механизм сравнивался с правилом большинства. Отдельные значения для общественного блага были иногда отрицательные, иногда положительные, для каждого периода из одного и того же распределения.

Авторы исследования получили следующие результаты.

1. Недостаток раскрываемости: очень немногие участники раскрыли свои истинные значения оценки. Для 10% предложений в первой конструкции, и 8% – во второй конструкции были раскрыты их значения.

2. «Структура» недооткрытости:

а) положительные значения: предложение более высокой цены для низких значений, и наоборот;

б) отрицательные значения: назначение более низкой цены для маленьких значений, и наоборот;

3. Эффективность: 70% решений были эффективными. Они не превысили эффективность правила большинства (70%).

4. Нет обучаемости: нет стремления к раскрытию значений.

Эти результаты вызывают много вопросов, которые должны привести к дальнейшему изучению механизмов, подобных механизму Викри-Кларка-Гровса, в контексте общественных благ. Отказ большинства субъектов открыть свои истинные ценности (значения) предполагает, что доминирующая стратегия не является прозрачной.

Каваго и Мори [34] в своем исследовании анализируют слабость стимулов совместимости опорного механизма как причину недораскрытия. Как и Аттье [3], они изучают опорный механизм в контексте бинарного принятия решений в задаче определения осуществлять или нет общественный проект, если он имеет фиксированный размер.

Они делают вывод, что недораскрытие может возникать из-за того, что опорный механизм – это только слабо доминирующая стратегия совместимости стимулов. То есть, внутри пространства стратегий агент может быть безразличен к стратегии говорить правду по сравнению с другими стратегиями. Таким образом, агенты, возможно, не смогут найти единственную доминирующую стратегию без глубокого понимания всей структуры выплат. Они полагают, что можно решить проблему слабой совместимости стимулов, давая другим субъектам больше информации о структуре выплат.

Конструкция Каваго и Мори имеет три информационных режима. В режиме «отсутствия принуждения», каждому субъекту было назначено фиксированное значение, а механизм был объяснен без предоставления таблицы выплат. При более сильном принуждении каждому субъекту случайным образом назначалось значения для каждого раунда и механизм был объяснен без предоставления таблицы выплат. При самом сильном принуждении, каждому субъекту было назначено фиксированное значение, а механизм был объяснен с предоставлением таблицы выплат.

Процент участников, правдиво раскрывших цены заявок, составил 17% в первом случае, 14% – во втором и 47% – в третьем. Доля реализованных общественных проектов составила 40% – в первом случае, 70% во втором и 90% – в третьем. В целом, более подробная информация о структуре выплат значительно долю доминирующих стратегий игры.

Каваго и Мори [34] выявили один аспект опорного механизма, который мог привести к недораскрытию. Помимо слабой совместимости стимулов, опорный механизм обеспечивает очень мало стимулов для субъектов к обучению своим доминирующим стратегиям с течением времени. Стимулы к обучению предоставляются путем связывания неравновесного поведения с результирующими потерями.

В бинарной версии опорного механизма, агент редко играет ведущую роль в относительно большой экономике. Поэтому, даже если агенты придерживаются неравновесных стратегий, то их выплаты почти не пострадают. Однако, в не бинарной версии механизма Викри–Гровса–Кларка, т.е. когда уровень общественных благ является непрерывным, сообщения агента гораздо более вероятно, могут повлиять на общий уровень производства. Поэтому, «неравновесное» сообщение будет отражаться в налоге, который влияет на выплату агента. Более того, строго выпуклых предпочтений и непрерывного уровня общественных благ необходимо и достаточно для строгой совместимости стимулов [35].

Существуют т.н. механизмы эффективные по Нэшу. Механизм Гровса–Ледьярда [27] – это первый механизм в установлении общего равновесия, чьё равновесие по Нэшу является Парето-оптимальным. Механизм балансирует бюджет, как на равновесном пути, так и вне его, но не реализует распределение Линдаля. Позже были обнаружены другие формы игр, в которых реализуются распределения Линдаля в состоянии равновесия по Нэшу. Они описаны в работах Гурвица [32], Уокера [59], Тиана [55], Кима [36], Чена [12-13]. Фолкингер в [23] представляет механизм, в котором равновесие по Нэшу является Парето-оптимальным, когда параметр выбран подходящим образом, однако он не реализует распределения Линдаля, и существование равновесия может быть очень чувствительным.

Большинство экспериментальных исследований Нэш-эффективных механизмов сосредотачиваются на механизме Гровса–Ледьярда. Чэн и Тан также сравнивают механизм Уокера с механизмом Гровса–Ледьярда. Фолкингер, Фер, Гэхтер, Винтер–Эмбер в [24] изучали механизм Фолкингера. Во всех исследованиях, кроме Харстада и Маррезе [29,30] были использованы квазилинейные предпочтения, чтобы получить единственное равновесие по Нэшу.

В. Смит в [52] представил первые наборы экспериментов по изучению механизмов предоставления различных общественных благ. Он сравнил механизм добровольных взносов, упрощенную версию механизма Гровса–Ледьрда и аукцион Смита. Процесс, используемый в упрощенном механизме Гровса–Ледьярда был процессом Смита, где все субъекты имеют возможность одновременно пересмотреть свои сообщения и повторить один и тот же выбор три раза подряд, чтобы завершить производство общественных благ, и им делается выплата, когда соглашение достигается. Упрощенный механизм Гровса–Ледьярда предоставляет значительно больше общественных благ, чем при использовании механизма добровольных взносов. В группе из пяти участников, одна из трех сессий (сеансов) завершилась приходом к равновесному состоянию по Нэшу. В группе из восьми человек ни одна сессия не закончилась в состоянии равновесия по Нэшу, которое заранее было спрогнозировано.

Харстад и Маррезе в [29] сравнивают упрощенную версию механизма Гровса–Ледьярда в рамках двух различных процессов: процесса Смита и процесса Сериатима. Последний процесс также требует единогласия субъектов производить общественное благо, но он отличается от процесса Смита в том, что субъекты пересматривают свои сообщения последовательно и им необходимо только повторять свои сообщения единожды за итерацию до конца. Они обнаружили, что только в трех из двенадцати сессий достигнуты результаты, примерно соответствующие состоянию равновесия по Нэшу.

Харстад и Маррезе изучали полную версию механизма Гровса–Ледьярда в экономике с функциями Кобба–Дугласа и процессом Сератиума. В трехсубъектном исполнении, одна из пяти сессий сходилась к равновесию по Нэшу. В четырехсубъектном, одна из четырех сессий сходилась к одному из равновесия по Нэшу. Это только эксперимент, в котором изучается механизм Гровса–Ледьярда в среде с несколькими равновесиями, но проблема выбора равновесия не рассматривалась.

Мори в [45] сравнивает проведение процесса Линдаля с механизмом Гровса–Ледьярда. Он использовал динамический процесс, аналогичный процессу Смита, за исключением того, что этот процесс заканчивается, когда каждый субъект повторяет свое сообщение один раз. Он провел пять сеансов (сессий) для каждого механизма, с пятью субъектами в каждой сессии.

Совокупные уровни общественных благ, предоставляемых в каждой из сессий Гровса–Ледьярда были гораздо ближе к Парето-оптимальному уровню, чем те, которые были получены в процессе Линдаля. На уровне отдельного человека, каждая из пяти сессий была остановлена в течение десяти раундов, когда каждый субъект стал повторять одинаковые сообщения. Тем не менее, поскольку отдельные сообщения должны быть кратны 0,25 пока равновесные сообщения находятся не по сетке, сходимость к равновесным сообщениям была приблизительной.

Чэн и Плот [14] первыми провели оценку выполнения механизма Гровса–Ледьярда при разных значениях параметра наказания γ. Этот параметр играет важную роль в стабильности механизма и сходимости к равновесному состоянию. Они обнаружили, что при его изменении динамика и стабильность резко менялись. Для достаточно большого значения параметра наказания γ система очень быстро приходила к состоянию равновесия по Нэшу и сохраняла стабильность, в то время как при малых значениях γ, система не приходила в состояние равновесия по Нэшу. Этот поиск был повторен Чэном и Таном с более независимыми сессиями (двадцать одна сессия: по семь для каждого механизма) и более длинными по времени, (100 раундов), предназначенными для детального изучения динамики в эксперименте [15]. Из-за хороших динамических свойств, механизм Гровса–Ледьярда со 100 раундами имел гораздо лучшие по сравнению с ним же, но с одним раундом, показатели, оцененные с точки зрения эффективности системы, близкие к Парето-оптимальному уровню предоставления общественных благ, и обладающими меньшим количеством нарушений в ограничении индивидуальной рациональности и конвергенции к равновесию. Причем все эти результаты являются статистически значимыми. Это наглядно демонстрируют важность конструирования механизмов, которые не только бы обладали желаемыми статическими свойствами, но также и хорошей динамической устойчивостью. Только когда динамика приводит к статическому равновесию, могут быть реализованы все соответствующие статические свойства.

Мюнх и Уокер [46] предлагают достаточное условие сходимости механизма Гровса–Ледьярда как лучший ответ по Курно динамики с параметризованными квазилинейными функциями полезности. Чэн в [14] предоставляет необходимое и достаточное условие для механизма Гровса–Ледьрда, чтобы он был супермодулярной игрой с заданными квазилинейными предпочтениями. Супермодулярные игры – это игры, в которых предельная полезность каждого игрока от усиления его стратегии, повышается с усилением стратегии его соперника, так, что стратегии игроков – это, своего рода «стратегические комплименты». Супермодулярные игры имеют очень высокую стабильность свойств, в том смысле, что большой класс обучающих процессов приводится к набору, ограниченному наибольшим и наименьшим профилями стратегии равновесий по Нэшу. Это включает в себя Байесовское обучение, воображаемые игры, адаптивное обучение, лучший ответ по Курно, и многие другие [43].

Стоит отметить, что когда параметр наказания выше определенного порога, то большой класс обучающих динамических процессов сходится, что согласуется с экспериментальными результатами. Фолкингер, Фер, Гэхтер и Уинтер–Эмбер в

[24] изучают механизм Фолкингера как в квазилинейной, так и также квадратичной среде. В квазилинейной среде средние взносы двигаются в сторону уровня, равновесного по Нэшу, но не полностью достигают равновесия. В квадратичной среде средний уровень взносов колеблется вокруг равновесия по Нэшу, хотя ни в одной из 23 сессий средний вклад не был в точности равен равновесию по Нэшу в последних пяти турах. Таким образом, равновесие по Нэшу – это хорошее описание образца среднего вклада, хотя отдельные игроки не обязательно играют в равновесии. Интересно отметить, что в квадратичной среде игра очень близка к супермодулярной игре: коэффициент пороговой «субсидии» для механизма чтобы быть супермодулярным – это 1, тогда как в эксперименте он была установлена на уровне 2/3. Это только экспериментальное исследование эффективного механизма распределения общественных благ.Значения параметров были заданы либо далеко от супермодулярного порога (напр., [14, 15]), или в непосредственной близости от порогового значения (напр., [23]). Ни в одном из экспериментов параметры систематически не меняются, если находятся близко, но выше порога для оценки эффектов супермодулярности в обучающей динамике.

Арифовик и Ледьярд в [2] проводят компьютерные симуляции индивидуальной обучающей модели в контексте класса механизма Гровса–Ледьярда. Они систематически различаются в размере параметра наказания, от экстремально низких до очень высоких. Они считают, что их модель сходится к равновесию по Нэшу для всех значений γ. Однако скорость сходимости зависит от значения параметра. Скорость сближения – это U-образная кривая: очень низкие и очень высокие значения γ требуют длительного времени прихода к равновесию, в то время как диапазон промежуточных значений требует минимального времени.

Оптимальный параметр наказания был выявлен путем симуляций и оказался гораздо ниже, чем промежуточный порог, предлагаемый в наблюдении 1. Поскольку эти результаты опираются на особенности модели обучения, использованной для симуляции, следующим естественным шагом была проверка предсказания в лаборатории с участием человека.

Чен и Газзале провели первое систематическое экспериментальное исследование супермодулярных механизмов, в рамках компенсационных механизмов [13]. Четыре специфических формы игры, приводящих распределения Линдаля ассигнований в равновесие по Нэшу были введены Гурвицем [32], Уокером [59], Кимом [37] и Ченом [12]. Все четыре улучшают механизм Гровса–Ледьярда в том смысле, что все они удовлетворяют ограничению индивидуальной рациональности в равновесии. В то время как формы игр Гурвица и Уокера, могут быть показаны нестабильными для любого децентрализованного процесса согласования в определенных квадратичных средах, механизм Кима стабилен по направлению градиента процесса согласования при заданных квазилинейных функциях полезности, который является в непрерывной по времени версией процесса Курно-Нэша «нащупывания» равновесия. Если супермодулярность является достаточным, но не необходимым условием для сходимости, то из этого следует, что:

1) супермодулярные механизмы должны сходиться к прогнозным значениям равновесия по Нэшу довольно жестко, например, так же как механизм Гровса-Ледьярда при высоком значении параметра наказания;

2) механизмы, которые не являются супермодулярными, также могут сходиться к равновесию при наличии некоторых алгоритмов обучения.

Остается открытым вопрос, являются ли правила обучения разумными и описательно точными. Супермодулярность обеспечивает достаточное, но не необходимое условие для конвергенции (сходимости) для широкого спектра обучающих динамических процессов. Для полной характеристики стабильности механизмов совместимости мотивов, нужны достаточное и необходимое условия сходимости в широком диапазоне обучающих процессов.

Перейдем к рассмотрению класса механизмов, являющихся совершенными по Нэшу. Баньоли и Липман в [4] предложили совершенно естественный и простой механизм, который полностью реализует ядро в недоминируемом совершенном равновесии в среде с одним частным благом и одним общественным благом. В экономике с полной информацией агенты добровольно вкладывают любое неотрицательное количество частного блага, которое они выбирают, и социальным решением является предоставление общественного блага, тогда и только тогда, когда взносов достаточно, чтобы заплатить за него. В противном случае вклады возвращаются. Этот результат распространяется на общественное благо с конечным числом значений, там, где последовательная игра с несколькими циклами взносов реализует ядро в последовательно недоминируемом совершенном равновесии.

Баньоли и Маккии в [5] проверяют теоретические предсказания механизма, предложенного Дэвисом и Холтом [22]. Они приводят результаты для пяти групп из семи человек и двух из десяти. Все сеансы были реализованы как повторяющиеся игры из 14 периодов. Три различные процедуры были осуществлены среди групп из пяти человек: (1) базовый режим с однородными вложениями и однородными оценками общественного блага (одна группа); (2) разнородные вложения и однородная оценка (три группы); (3) однородные вложения и разнородные оценки (три группы). Две группы из десяти человек проверяли только процедуры (1) и (2). Результаты исследования Баньоли и Маккии, подтвердили гипотезу, что группы будут добровольно вкладывать достаточно ресурсов для обеспечения общественного блага, и что вклады группы будут равны. Объединяя все группы из пяти человек, общественное благо был предоставлено в 86,7% раундов; Парето-эффективных результатов наблюдалось в 54,1% случаев.

Однако было очень мало независимых сеансов в каждом режиме исследования Баньоли и Маккии, в котором был поднят вопрос о надежности их результатов. Мискер, Олсон и Уильямс дают отчет о ряде экспериментов, предназначенных для проверки надежности результатов Баньоли и Маккии. Они отмечают, что авторы запустили процессы в нескольких независимых группах одновременно, в одном помещении и оглашали взносы для всех групп. Они не использовали личный лист записей, на котором субъекты вводили их личные вклад и выигрыш в каждом раунде. Мискер, Олсон и Уильямс использовали конструкции идентичные процедуре Баньоли и Маккии с однородными вложениями и однородными оценками общественных благ, которые также рассматривали поведенческие последствия двух процедурных модификаций – несколько совместных (параллельных) групп против одной, изолированной группы, и использование персонального регистрационного листа. Данные Мискера, Олсона и Уильямса оспаривают надежность результатов Баньоли и Маккии. В исследовании последних, вклады, дающие эффективное равновесие вклад имеют модальное распределение, а в исследованиях Мискера, Олсона и Уильямса взносы равномерно распределены по пространству стратегий. Оба исследования имеют относительно немного независимых наблюдений (не более трех групп) для каждого сеанса. Поэтому невозможно заключить, на основании небольшого объема данных, работает ли механизм «точки обеспечения», исследуемый в Баньоли и Липманом в лаборатории.

Баньоли, Бен-Давид и Маккии делают отчет об эксперименте, сконструированном для проверки механизма точки обеспечения для случая с несколькими субъектами [6]. Они провели две процедуры: (1) субъекты переводились в разные группы между периодами для сеанса с 6–8 периодами, и (2) субъекты оставались в одной группе на протяжении всего сеанса, если он длился 15 периодов. Они нашли лишь ограниченную поддержку предсказания о том, что субъекты будут применять стратегии равновесия, которые обеспечивают достижение распределения в ядре. Этот результат оспаривает «уточнение критерия», используемого в теоретической работе. Он также может привести к невозможности координации действий субъектов среди множества равновесных состояний.

Кроме лабораторных экспериментов, есть также ряд экспериментов, в которых используются вариации механизма точки обеспечения [51]. В «полевых» экспериментах предположение Баньоли и Липмана о полноте информации, больше не действует [4]. Свойства механизма в условиях неполной статистической информации неясны. Другие детали механизма были изучены лучше, например, правила скидки (уступки) [41], объединения субъектов [10], идентифицируемости вкладчиков (Маркс, Крозон [42], неполной информации об оценках [42], неполной информации о количестве игроков или стоимости общественного блага [51], рекомендации взносов [42], оценки для общественного блага [42], и т.д.

Вэриан вводит класс простых двухуровневых механизмов, известных как компенсационные механизмы, которые реализуют эффективные распределения как равновесия, совершенные по подыграм для экономической среды, включающей в себя экстерналии и общественные блага. Основная идея заключается в том, что каждый игрок предлагает другому компенсировать издержки, понесенные для того, чтобы сделать эффективный выбор. Андреони и Вэриан в [1] описывают серию экспериментов по вариации механизмов компенсации. В частности, простым и элегантным построением, считается модифицированный механизм игры «Дилемма заключенного», в которой каждый игрок может предложить другому агенту заплатить определенную сумму за сотрудничество. Механизм был реализован в виде карточной игры. Каждая сессия состояла из двух этапов. Первый этап – обычная игра «Дилемма заключенного», которая получила название «Push–Pull» – игры («Толкай-тяни»), которая проводилась в течение 15 раундов с каждым игроком, играющим каждый раз против другого игрока в каждом следующем раунде. Второй этап – это контрактная стадия для «Дилеммы заключенного», которая называется «Pay for Push» – игра, которая длилась 25 раундов. Они провели шесть независимых сеансов, по восемь игроков в каждом.

Данные показали, что механизм во многом успешен для поощрения сотрудничества. Объем сотрудничества удвоился (с 25,8 до 50,5%) в течение второй фазы, когда механизм был реализован. Игроки сделали предложения о платежах, которые должны были индуцировать сотрудничество около 63,5% времени. Когда такие предложения были получены, игроки отвечали кооперацией почти 70% времени. Полное эффективное равновесие было достигнуто 60% от всего времени. Интересно то, что они также выявили вкусы субъектов для сотрудничества и значимость справедливости взаимодействия со стимулами механизма.

Чен в [15] исследует динамическую устойчивость компенсационных механизмов. Он доказал, что оригинальный механизм, глобально стабильный по Курно, – лучший динамический ответ, но не супермодулярный. Он также предложил обобщенную версию механизма возмещения, который является супермодулярным. Это обобщенная версия – хорошая площадка для изучения супермодулярных механизмов, поскольку имеет два свободных параметра, по одному для каждого типа игроков. Один параметр «определяет» является ли этот механизм супермодулярным, в то время как другой не играет роли в этом различии. Этот дает экспериментатору больше свободы в выборе «разной степени супермодулярности».

Чен и Газзале экспериментально изучили обобщенную версию механизма компенсации [13]. Они систематически изменяют свободный параметр от низкого значения, но близкого и направленного к порогу супермодулярности для оценки эффектов супермодулярности на производительность механизма.

Авторы делают три основных вывода. Во-первых, в терминах равновесия пропорций и эффективности, они считают, что и супермодулярные и «близкие к супермодулярным» механизмы работают значительно лучше, чем те, которые находятся значительно ниже этого порога. Этот вывод согласуется с предыдущими результатами экспериментов. Во-вторых, они считают, что если исходить из состояния чуть ниже порога по направлению к порогу, то улучшение показателей статистически незначимо. Этот результат важен, так как теория молчит по этому вопросу. Это подразумевает что выполнение механизмов, «близких к супермодулярным», такие как механизм Фолкингера, должно быть сравнимо с супермодулярными механизмами. Таким образом, создатель механизма не должны быть чрезмерно обеспокоен настройкой параметров, которые строго выше супермодулярного порога – близко – тоже хорошо. Это увеличивает набор робастно стабильных механизмов. Третий вывод касается выбора механизмов в пределах класса супермодулярных механизмов. Чен и Газзале обнаружили, что внутри класса супермодулярных механизмов, увеличение параметра гораздо выше порога не значительно повышает производительность механизма. Кроме того, увеличение еще одного свободного параметра, который не связан с тем является ли механизм супермодулярным или нет, ведет к улучшению сходимости. Компьютерное моделирование (симуляция) показывает, что эти экспериментальные результаты сохраняются долгое время.

Существует ряд других механизмов. Например, т.н. «аукцион Смита» – это процесс, сконструированный для предоставления общественных благ [52–54]. В этом механизме каждый агент сначала подает заявку и предлагает количество общественного блага. Предварительная доля затрат каждого агента на единицу продукции – это единица стоимости за вычетом суммы ставок других агентов. Предварительное количество общественного блага является средним значением по всем объемам, предлагаемых агентами. Затем каждый агент может согласиться или не согласиться на его ориентировочную долю затрат на единицу продукции и предварительное количество общественного блага. Групповое соглашение преобладает, если и только если все игроки единодушно и не анонимно соглашаются на принятие всех предложений. Теоретические свойства этого механизма не понятны полностью. Однако, оставив в стороне вопрос равновесия в суперигре, аукцион Смита реализует распределения Линдаля в состоянии совершенного равновесия по Нэшу в одношаговой (статической) игре [7].

Смит в [52] говорит о 12 сессиях аукциона-эксперимента в трех различных в средах, где функции оценки были квазилинейны, с такими параметрами что нулевой вклад будет доминантной стратегии для некоторых, но не всех субъектов в механизме добровольных взносов. В большинстве сессий средние предложения и сумма ставки были оглашены на каждом испытании. Девять из двенадцати сессий сходились к Парето-оптимальному уровню общественного блага. Однако, только небольшая часть субъектов (11 из 67) сводила заявки к равновесию Линдаля. Смит в [54] рассматривает аукцион в средах с учетом эффекта дохода. Из общего числа 29 сессий только в двух сессиях не удалось достичь соглашения об обеспечении общественным благом. Во всех сеансах, в которых были достигнуты соглашения, было предоставлено количество общественных благ большее, чем «безбилетное» количество. Количества не были предсказаны точно, как количество, равновесное по Линдалю. Это значит, что количество немного больше, чем количество по Линдалю. По сравнению с результатами Смита в [52], с эффектами дохода, «количество общественного блага в равновесии Линдаля – более справедливый предсказывающий показатель, а заявки цены в равновесии Линдаля являются очень плохим прогностическим показателем для экспериментальных результатов» [54].

Бэнкс, Плотт и Портер в [7] изучают аукцион Смита и механизм добровольных вкладов, как с единогласием, так и без него. Они использовали квазилинейные функции полезности, где она была строго доминирующей стратегией для каждого агента, чтобы сделать свой вклад в нулевом размере в механизме добровольных взносов. Это эксперимент подтвердил, что аукцион Смита генерирует более высокие уровни предоставления общественных благ, чем механизм добровольных взносов. Совокупное количество общественных благ было рядом с оптимумом по Парето. Они также обнаружили, что включение единогласия сокращает общую эффективность процесса, а также успешность работы механизма.

Из существующих экспериментальных исследований механизмов совместимости стимулов можно сделать несколько выводов.

1. Механизмы, с одними и теми же статические свойства, могут демонстрировать совершенно разную стабильность динамики исполнения.

2. В условиях действия опорного механизма существует возможность создания таких сред, где недораскрываемость преобладает. Более подробную информацию о структуре выплат помогает уменьшение недостатка открытости.

3. Данные показывают, что супермодулярные механизмы, такие, как механизм Гровса–Ледьярда при высоком параметре наказания, сходятся устойчиво и

хорошо к равновесию по Нэшу. Механизм близкий к порогу, чтобы стать супермодулярным, сходится тоже достаточно хорошо. Существующие эксперименты по применению несупермодулярных механизмов Нэша предполагают, что они не сходятся хорошо к значениям, которые должны бать равновесными по Нэшу.

4. Эксперименты и моделирование показывают, что выполнение «почти супермодулярных» механизмов должно быть сопоставимо с супермодулярными механизмами. Кроме того, внутри класса супермодулярных механизмов, увеличение параметра далеко за порог существенно не повышает производительность механизма.

5. Производительность механизмов, с использованием уточнений Нэша в качестве концепции решения, неоднозначна. Экспериментальные результаты могут быть чувствительны к процедурным спецификациям.

Существующие эксперименты с использованием стимул-совместимых механизмов были сосредоточены на нескольких механизмах. Данные, в сочетании с теоретическими исследованиями, дают свежий взгляд на внедрение их реальной экономике. Для этих механизмов, которые были исследованы в лаборатории, требуется больше повторений и тестов надежности.

Литература

1. *Andreoni J., Varian H.* Pre-play Contracting in the Prisoners' Dilemma // Proceedings of the National Academy of Science. 1999. № 96. P. 10933–10938.
2. Arifovic, J. and J. Ledyard (2001). “Computer Testbeds and Mechanism Design: Application to the Class of Groves-Ledyard Mechanisms for Provision of Public Goods», Manuscript, Caltech.
3. Attiyeh, G., R. Franciosi and M. Isaac (forthcoming), «Experiments with the Pivot Process for Providing Public Goods», Public Choice.
4. Bagnoli, M. and B. Lipman (1989), «Provision of Public Goods: Fully Implementing the Core Through Private Contributions», Review of Economic Studies 56:583-602.
5. Bagnoli, M. and M. McKee (1991), «Voluntary Contribution Games: Efficient Provision of Public Goods», Economic Inquiry 29:351-66.
6. Bagnoli, M., S. Ben-David and M. McKee (1992). «Voluntary Provision of Public Goods: The Multiple Unit Case», Journal of Public Economics 47:85-106.
7. Banks, J., C. Plott and D. Porter (1988), «An Experimental Analysis of Unanimity in Public Goods Provision Mechanisms», Review of Economic Studies 55(182): 301-22.
8. Boylan, R. and M. El-Gamal (1993), «Fictitious Play: A Statistical Study of Multiple Economic Experiments», Games and Economic Behavior 5:205-222.
9. Cadsby, C. and E. Maynes (1996), «Choosing between a Cooperative and Non-Cooperative Equilibrium: Nurses versus Economics and Business Students»,Working Paper, University of Guelph.
10. Cadsby, C. and E. Maynes (forthcoming), «Gender and Free Riding in a Threshold Public Goods Game: Experimental Evidence», Journal of Economic Behavior and Organization.
11. Chen, Y. (1997), «Supermodularity of Nash-efficient Public Goods Mechanisms.» University of Bonn SFB303 working paper. (Later circulated under the title, «Dynamic Stability of Nash-efficient Public Goods Mechanisms: Reconciling Theory and Experiments.»)
12. Chen, Y. (2002), «A Family of Supermodular Nash Mechanisms Implementing Lindahl Allocations», Economic Theory 19:773-790.

13. Chen, Y. and R. Gazzale (2002), «Supermodularity and Convergence: An Experimental Study of the Compensation Mechanism», Manuscript, University of Michigan.
14. Chen, Y. and C. R. Plott (1996), «The Groves-Ledyard Mechanism: An Experimental Study of Institutional Design», Journal of Public Economics 59:335-364.
15. Chen, Y. and F.-F. Tang (1998), «Learning and Incentive Compatible Mechanisms for Public Goods Provision: An Experimental Study», Journal of Political Economy 106-3:633-662.
16. Cheng, J. (1998), «Essays on Designing Economic Mechanisms», Ph.D. thesis, University of Michigan.
17. Clark, J. (1999), «The Effects of Altruism on the Efficiency of Public Good Mechanisms», Working Paper, University of Canterbury.
18. Coats, J. and T. Gronberg (1996), «Provision of Discrete Public Goods: An Experimental Investigation of Alternative Institutions», Working Paper. Texas A&M University.
19. Croson, R. and M. Marks (1998), «Identifiability of Individual Contributions in a Threshold Public Goods Experiment», Journal of Mathematical Psychology 42:167-190.
20. Croson, R. and M. Marks (1999a), «Equilibrium Selection: Preplay Communication and Learning», Working Paper. OPIM, The Wharton School, University of Pennsylvania.
21. Croson, R. and M. Marks (1999b), «Step Returns in Threshold Public Goods: A Meta- and Experimental Analysis», Working Paper. OPIM, The Wharton School, University of Pennsylvania.
22. Davis, D. and C. Holt (1993), Experimental Economics. (Princeton University Press, Princeton, NJ).
23. Falkinger, J. (1996), «Efficient Private Provision of Public Goods by Rewarding Deviations from Average», Journal of Public Economics 62:413-422.
24. Falkinger, J., E. Fehr, S. Gächter and R. Winter-Ebmer (2000), «A Simple Mechanism for the Efficient Provision of Public Goods – Experimental Evidence», American Economic Review 90:247-264.
25. Fudenberg, D. and D. Levine (1998), Theory of Learning in Games (MIT Press: Cambridge, MA).
26. Green, J. and J.-J. Laffont (1977), «Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of the Preferences for Public Goods», Econometrica 45:427-438.
27. Groves, T. and J. Ledyard (1977), «Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the 'Free Rider' Problem», Econometrica 45(4):783-809.
28. Groves, T. and J. Ledyard (1987), «Incentive Compatibility since 1972», in: T. Groves and R. Radner, eds., Essays in Honor of Leonid Hurwicz (University of Minnesota Press, Minneapolis).
29. Harstad, R. M., and M. Marrese (1981), «Implementation of Mechanism by Processes: Public Good Allocation Experiments», Journal of Economic Behavior and Organization 2:129 -151.
30. Harstad, R. M., and M. Marrese (1982), «Behavioral Explanations of Efficient Public Good Allocations», Journal of Public Economics 19:367 – 383.
31. Hurwicz, L. (1972), «On Informationally Decentralized Systems», in: C. McGuire and R. Radner, eds., Decision and Organization. (North Holland, Amsterdam) 297-336.
32. Hurwicz, L. (1979), «Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocations at Nash Equilibrium Points», Review of Economic Studies 46:217-225.
33. Kagel, J. (1995), «Auctions: A Survey of Experimental Research», in: Kagel and Roth eds., Handbook of Experimental Economics (Princeton University Press, Princeton).
34. Kawagoe, T. and T. Mori (1998a), «Can Pivotal Mechanism Induce Truth-telling? An Experimental Study», Discussion papers in Economics No. 233, Nagoya City University.
35. Kawagoe, T. and T. Mori (1998b), «A Short Report on Pivotal Mechanism Experiment», mimeo, Nagoya City University.
36. Kim, T. (1986), «On the Nonexistence of a Stable Nash Mechanism implementing Lindahl Allocations», University of Minnesota mimeo.
37. Kim, T. (1993), «A Stable Nash Mechanism Implementing Lindahl Allocations for Quasi-linear Environments», Journal of Mathematical Economics 22:359-371.
38. Ledyard, J. (1995), «Public Goods: A Survey of Experimental Research», in Kagel and Roth eds., Handbook of Experimental Economics (Princeton University Press, Princeton).
39. Mailath, G. and A. Postlewaite (1990), «Asymmetric Information Bargaining Problems with Many Agents», Review of Economic Studies 57:351-367.

40. Marx, L. and S. Matthews (1997), «Dynamic Contribution to a Public Project», Mimeo, University of Rochester.
41. Marks, M. and R. Croson (1998), «Alternative Rebate Rules in the Provision of a Threshold Public Good: An Experimental Investigation», Journal of Public Economics 67:195-220.
42. Marks, M. and R. Croson (1999), "The effect of incomplete information and heterogeneity in the provision point mechanism of voluntary contributions: An experimental investigation"' Public Choice. 99:103-118.
43. Milgrom, P., and J. Roberts (1990), «Rationalizability, Learning and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities», Econometrica 58(6):1255-1277.
44. Milgrom, P., and C. Shannon (1994), «Monotone Comparative Statics», Econometrica 62(1):157-180.
45. Mori, T. (1989), «Effectiveness of Mechanisms for Public Goods Provision: An Experimental Study», Economic Studies 40(3):234-246.
46. Muench, T., and M. Walker (1983), «Are Groves-Ledyard Equilibria Attainable?», Review of Economic Studies 50:393-396.
47. Mysker, M., P. Olson and A. Williams (1996), «The Voluntary Provision of a Threshold Public Good: Further Experimental Results», Research in Experimental Economics 6:149-163.
48. Peleg, B. (1996), «Double Implementation of the Lindahl Equilibrium by a Continuous Mechanism», Economic Design 2:311-324.
49. Roberts, J. (1979), «Incentives and Planning Procedures for the Provision of Public Goods», Review of Economic Studies 46:283-292.
50. Scherr, B. and E. Babb (1975), «Pricing Public Goods: An Experiment with Two Proposed Pricing Systems», Public Choice XXI:35-53.
51. Schulze, W. (1995), «Green Pricing: Solutions for the Potential Free-Rider Problem», University of Colorado mimeo.
52. Smith, V. (1979a), «Incentive Compatible Experimental Processes For the Provision of Public Goods», in: Smith Research, ed. Experimental Economics vol. 1 (JAI Press Inc, Greenwich, Connecticut).
53. Smith, V. (1979b), «An experimental comparison of three public goods decision mechanisms», Scandinavian Journal of Economics 81:198-251.
54. Smith, V. (1980), «Experiments with a decentralized mechanism for public goods decision», American Economic Review 70:584-99.
55. Tian, G. (1989), «Implementation of the Lindahl Correspondence by a Single-Valued, Feasible, and Continuous Mechanism», Review of Economic Studies 56:613-621.
56. Tideman, T.N. (1983), «An Experiments in the Demand Revealing Process», Public Choice 41:387-402.
57. Tideman, T. N., and G. Tullock (1976), «A New and Superior Process for Making Social Choices», Journal of Political Economy 84:1145-1159.
58. Walker, M. (1980), «On the Impossibility of a Dominant Strategy Mechanism to Optimally Decide Public Questions», Econometrica 48:1521-1540.
59. Walker, M. (1981), «A Simple Incentive Compatible Scheme for Attaining Lindahl Allocations», Econometrica 49:65-71.

В.В. Лебедев, К.В. Лебедев

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА, СТАВКИ ПРОЦЕНТА И УРОВНЯ ЦЕН

Обсуждаются непрерывный и дискретный варианты трёхмерной динамической макроэкономической модели краткосрочного прогнозирования, которая отражает взаимозависимость рынка товаров и услуг и рынка денег. При построении модели частично использованы гипотезы стационарной кейнсианской модели IS–LM. Модель имеет бесчисленное множество равновесных решений, которым соответствует в фазовом пространстве линия пересечения поверхностей. Рассмотрен простейший вариант модели, в котором уравнение задаёт в фазовом пространстве плоскость, а уравнение – гиперболический параболоид. Модель допускает, в зависимости от значений параметров, разнообразные динамические режимы: движение к равновесной точке, цикличность, сложное апериодическое поведение и детерминированный хаос.

The continuous and discrete variants of the three-dimensional dynamic macroeconomic model for short-term forecasting, which reflects the interdependence of the market of goods and services and the money market are discussed. The hypothesis of a stationary Keynesian IS–LM model is used. The model has a countless number of equilibrium solutions, which correspond to the line of intersection of surfaces in phase space. The simplest variant of the model is considered, when equation sets a plane in the phase space and the equation of a hyperbolic paraboloid. The model allows, depending on parameter values, a variety of dynamics: the movement towards the equilibrium point, circularity, complex aperiodic behavior and deterministic chaos.

1. СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА И СТАВКИ ПРОЦЕНТА

В рассматриваемых ниже статической и динамических моделях макроэкономики используются следующие переменные: Y – национальный доход (конечный продукт, произведенные товары и услуги, предложение товаров и услуг, реальный доход – real income); G – государственные закупки; r – ставка процента (the nominal rate of interest); p – уровень цен (price); C – спрос на потребительские товары (real consumption); I – спрос на инвестиции в производство (реальные инвестиции – real investment); Q – операционный спрос на деньги; Z – спекулятивный спрос на деньги; V – избыточный спрос на товары и услуги (excess demand in the goods market); W – избыточный спрос на деньги (excess demand in the money market); T – налоги, уплачиваемые государству. Для упрощения изложения ограничимся обсуждением частного случая, когда все взаимосвязи между переменными считаются линейными.

Рассмотрим сначала рынок товаров и услуг. Спрос на потребительские товары и услуги задается уравнением $C = a + c(Y - T)$, а спрос на инвестиционные товары – уравнением $I = b - hr$. В рассматриваемом линейном случае будем считать, что $T = tY$, где t – налоговая ставка. Поэтому $C = a + c(1-t)Y$ и избыточный спрос на товары и услуги, определяемый уравнением $V = (C + I + G) - Y$, задаётся функцией двух переменных

$$V(Y, r) = a + b + G - c_1 Y - hr. \tag{1}$$

Здесь $c_1 = 1 - c(1-t)$; a, b, c, h, t – положительные параметры (c – предельная склонность к потреблению, marginal propensity to consume, $0 < c < 1$).

Если рынок товаров находится в равновесии, то избыточный спрос на товары равен нулю. Поэтому условие $V(Y, r) = 0$, из которого следует уравнение

$$c_1 Y + hr = a + b + G, \tag{2}$$

определяет на плоскости «национальный доход – ставка процента», т.е. на плоскости $\{Y, r\}$, где $Y > 0$, $r > 0$, множество точек равновесия на товарном рынке (линия (1) на рис. 1). Эту линию называют линией IS.

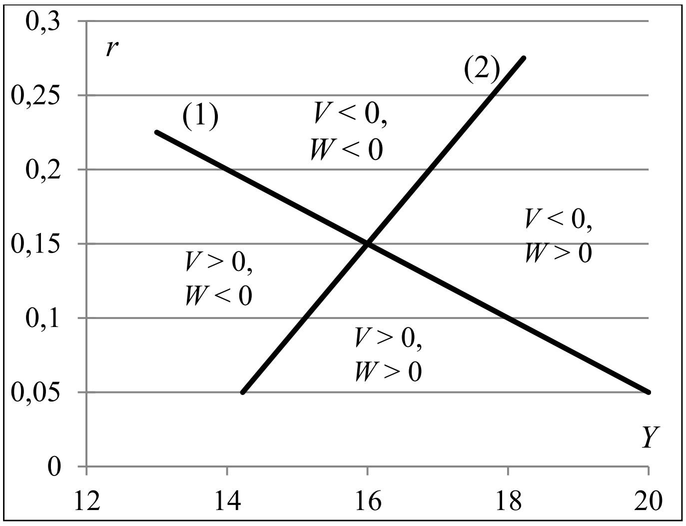


Рис. 1. Линии равновесия IS ***и*** LM

Рассмотрим теперь денежный рынок, где спрос на деньги складывается из операционного $Q = kpY$ и спекулятивного спроса $Z = Z(r)$. Поэтому избыточный спрос на деньги $W = (Q + Z) - M$ в линейном случае, когда $Z = m - ur$, является функцией двух переменных

$$W(Y, r) = m - M + kpY - ur. \tag{3}$$

Здесь M, m, k, p, u – положительные числа (M – количество денег, находящихся в обращении, предложение денег, the supply of real money).

Если рынок денег находится в равновесии, то избыточный спрос на деньги равен нулю. Поэтому условие $W(Y, r) = 0$, из которого следует уравнение

$$kpY - ur = M - m, \tag{4}$$

определяет на плоскости «национальный доход – ставка процента» множество точек равновесия на рынке денег (линия (2) на рис. 1). Эту линию называют линией LM.

Из системы уравнений (2) и (4) легко найти координаты точки пересечения линий IS и LM на плоскости $\{Y, r\}$:

$$Y_e = \frac{(a+b+G)u + (M-m)h}{c_1 u + kph}, \quad r_e = \frac{(a+b+G)kp - (M-m)c_1}{c_1 u + kph}. \tag{5}$$

В найденной точке $(Y_e; r_e)$ плоскости $\{Y, r\}$ оба рынка находятся в равновесии. Рассмотренная кейнсианская модель используется для оценки эффективности фискальной и (или) денежной политики на основе квазистационарного подхода к анализу эволюции экономики в краткосрочном периоде. Пусть, например, резко увеличилось предложение денег. Это приведет, как следует из уравнений (5), к росту равновесного дохода Y_e и падению равновесной ставки процента r_e. Если же произошло увеличение ставки налогов, то увеличится значение параметра c_1 и это вызовет, согласно уравнениям (5), снижение и равновесного дохода Y_e, и равновесной ставки процента r_e.

Однако *почему* рассматриваемая макроэкономическая система приходит в состояние равновесия? «Ответ» на этот вопрос, приводимый в учебниках по макроэкономике, простой: равновесие устанавливается благодаря действию рыночных механизмов. Однако это не ответ, а некоторое утверждение, в действительности мало что объясняющее, что-то вроде «невидимой руки Адама Смита». Ниже рассматриваются два варианта неравновесной модели динамики конечного продукта и ставки процента, построенных на основе непрерывного и дискретного подходов.

2. Динамические модели взаимовлияния конечного продукта и ставки процента

Рассмотрим теперь неравновесные модели динамики конечного продукта и ставки процента, в основе которых лежит блок-схема, изображенная на рис. 2. Здесь к переменным и параметрам статической модели (1)–(4) добавлены приращения две новые переменные: приращение конечного продукта dY и приращение ставки процента dr. В основе динамических моделей (как непрерывного, так и дискретного вариантов) лежат две ключевые гипотезы. Во-первых, предполагается, что предприниматели увеличивают (сокращают) производство товаров и услуг, если спрос на товары и услуги выше (ниже) их предложения (снова реализуется гипотеза Кейнса «спрос создает предложение»). Из этого следует, что приращение переменной Y имеет тот же знак, что и значение функции $V(Y, r)$. Сказанное отражено в контуре $Y \to V \to dY \to Y$ на рис. 2. Во-вторых, предполагается, что банковский сектор уменьшает (увеличивает) ставку процента, если предложение денег выше (ниже) спроса на них. Поэтому приращение переменной r имеет тот же знак, что и значение функции $W(Y, r)$. Сказанное отражено в контуре $r \to W \to dr \to r$ на рис. 2.

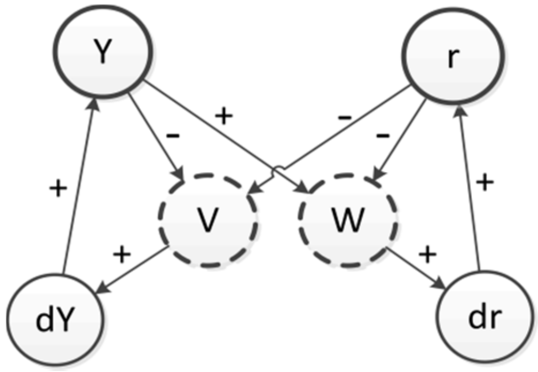


Рис. 2. Блок-схема динамической модели взаимовлияния конечного продукта и ставки процента

Свойства траекторий динамических вариантов $IS - LM$-модели существенным образом связаны со следующими свойствами функций избыточного спроса на товары и услуги $V(Y, r)$ и избыточного спроса на деньги $W(Y, r)$. Во-первых, в рассматриваемом линейном случае линии *IS* и *LM* являются прямыми (рис. 1). Эти линии разделяют плоскость $\{Y, r\}$, где $Y > 0,\ r > 0$, на четыре сектора, которые удобно назвать (условно) северным, западным, южным и восточным. Во-вторых, нормальный вектор линии уровня функции избыточного спроса на товары и услуги $V(Y, r)$ равен $\overrightarrow{N}_1 = \{-c_1, -h\}$, а нормальный вектор линии уровня функции $W(Y, r)$ равен $\overrightarrow{N}_2 = \{kp, -u\}$. Поэтому значение функции $V(Y, r)$ в любой точке плоскости $\{Y, r\}$, лежащей ниже (выше) линии (1) на рис. 1, положительно (отрицательно), а значение функции $W(Y, r)$ в любой точке плоскости $\{Y, r\}$, лежащей ниже (выше) линии (2) положительно (отрицательно).

В силу сказанного, при переходе точки $(Y; r)$ на фазовой плоскости «национальный доход – ставка процента» через линию *IS* функция избыточного спроса на товары и услуги $V(Y, r)$ меняет знак, а при переходе этой точки через линию *LM* меняет знак функция избыточного спроса на деньги $W(Y, r)$. Поэтому если точка $(Y; r)$ находится в северном секторе (рис. 1), где $V(Y, r) < 0$ и $W(Y, r) < 0$, то обе переменные Y и r уменьшаются. Если точка $(Y; r)$ находится в западном секторе, где $V(Y,r)>0$ и $W(Y,r)<0$, то переменная Y увеличивается, а переменная r уменьшается. В южном секторе значения обеих функций положительны, и здесь обе переменные Y и r возрастают. Наконец, в восточном секторе переменная Y уменьшается, а переменная r увеличивается, так как здесь $V(Y,r)<0$, а $W(Y,r)>0$.

2.1. Непрерывный вариант модели. В непрерывном варианте модели предполагается, что изменения фазовых переменных происходят непрерывно в каждый последовательный момент времени; поэтому динамика переменных описывается дифференциальными уравнениями. Простейшая непрерывная формализация блок-схемы динамической модели взаимовлияния конечного продукта и ставки процента (рис. 2) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \alpha V(Y, r), \\ \dfrac{dr}{dt} = \beta W(Y, r), \end{cases} \tag{6}$$

где α и β – коэффициенты реакции (положительные числа), а функции $V(Y, r)$ и $W(Y, r)$ определяются уравнениями (1) и (3) соответственно.

Отметим, что система уравнений (6) – не единственный вариант непрерывной формализации блок-схемы динамической модели, приведённой на рис. 2. Можно, например, использовать такую систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Y}\dfrac{dY}{dt} = \alpha \dfrac{V(Y, r)}{Y_e}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} = \beta \dfrac{W(Y, r)}{r_e}, \end{cases}$$

где, в отличие от системы уравнений (6), в левых частях уравнений стоят не скорости изменения переменных, а их темпы прироста. При этом в обоих случаях линии IS и LM являются главными изоклинами соответствующих систем дифференциальных уравнений. Ниже мы рассмотрим только систему дифференциальных уравнений (6).

Итак, учитывая уравнения (1) и (3), из системы (6) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \alpha(a + b + G - c_1 Y - hr), \\ \dfrac{dr}{dt} = \beta(m - M + kpY - ur). \end{cases} \tag{7}$$

Равновесное решение системы линейных дифференциальных уравнений (7) $Y(t) = Y_e$, $r(t) = r_e$, находится из условий $V(Y, r) = 0$ и $W(Y, r) = 0$, т.е. из системы

$$\begin{cases} c_1Y + hr = a + b + G, \\ kpY - ur = M - m. \end{cases} \tag{8}$$

Введём переменные $x = r - r_e$ и $y = Y - Y_e$, которые характеризуют отклонения ставки процента и конечного продукта от их равновесных решений соответственно. Систему (7) с учетом уравнений (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = -\alpha(c_1(Y - Y_e) + h(r - r_e)), \\ \dfrac{dr}{dt} = \beta[kp(Y - Y_e) - u(r - r_e)]. \end{cases}$$

Поэтому изменение переменных x и y определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta ux + \beta kpy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha hx - \alpha c_1 y. \end{cases} \tag{9}$$

Характер динамики переменных x и y системы (9) определяется значениями корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (\alpha c_1 + \beta u)\lambda + \alpha\beta[uc_1 + kph] = 0\,. \tag{10}$$

Здесь возможны три случая в зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения (10). В первом случае, когда знак дискриминанта положителен, корнями характеристического уравнения (10) являются различные действительные отрицательные числа. Во втором случае, когда дискриминант равен нулю, корнями характеристического уравнения (10) являются одинаковые отрицательные числа. В третьем случае, когда дискриминант отрицателен, корнями являются комплексные числа, действительные части которых отрицательны. Поэтому независимо от начальных условий траектории линейной динамической системы (9) устремляются к ее точке покоя (0; 0), и, следовательно, $Y(t) \to Y_e$, $r(t) \to r_e$ при $t \to +\infty$. Другими словами, здесь при любых значениях параметров реакции α и β в конечном итоге оба рынка (и рынок товаров и услуг, и рынок денег) приходят в состояние равновесия. На рис. 3 приведены четыре траектории системы дифференциальных уравнениями (7) для случая, когда фазовые переменные $Y(t)$ и $r(t)$ совершают затухающие колебания около своих равновесных значений. Эти четыре траектории различаются только начальными условиями.

Итак, непрерывная макроэкономическая система (7), построенная на основе кейнсианского подхода, всегда приходит в состояние равновесия. Является ли это убедительным доводом для использования при анализе эволюции макроэкономических систем метода сравнительной статики (квазистатического подхода). Для ответа на этот вопрос рассмотрим дискретный вариант модели динамики конечного продукта и ставки процента, в основе которых лежит блок-схема, изображенная на рис. 2.

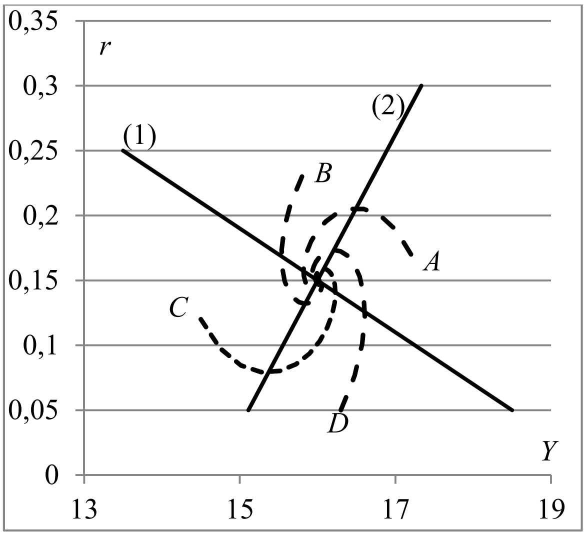


Рис. 3. Затухающие колебания значений конечного продукта и ставки процента около своих равновесных значений

2.2. В дискретном варианте модели фазовые переменные изменяются не непрерывно в каждый момент времени, а через постоянные промежутки времени, с шагом 1. Поэтому здесь фазовые переменные являются кусочно-постоянными. При построении дискретной динамической модели кейнсианского типа снова будем предполагать выполнение двух гипотез: 1) предприниматели увеличивают (сокращают) производство товаров и услуг, если спрос на товары и услуги выше (ниже) их предложения; 2) банковский сектор уменьшает (увеличивает) ставку процента, если предложение денег выше (ниже) спроса на них.

Сформулированные гипотезы в случае постоянного уровня цен приводят к дискретным моделям, в которых изменение переменные может определяться различными разностными уравнениями. Выпишем несколько таких систем:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = Y_t + \alpha V(Y_t, r_t), \\ r_{t+1} = r_t + \beta W(Y_t, r_t); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Y_{t+1} = Y_t \left(1 + \alpha \dfrac{V(Y_t, r_t)}{Y_e} \right), \\ r_{t+1} = r_t \left(1 + \beta \dfrac{W(Y_t, r_t)}{Y_e} \right); \end{cases} \tag{12}$$

$$
\begin{cases}
Y_{t+1} = Y_t \exp\left(\alpha \dfrac{V(Y_t, r_t)}{Y_e} \right), \\
r_{t+1} = r_t \exp\left(\beta \dfrac{W(Y_t, r_t)}{Y_e} \right).
\end{cases} \tag{13}
$$

Отметим, что система уравнений (11) является дискретным аналогом системы дифференциальных уравнений (6). Расчеты показывают, что равновесное решение системы (11) при относительно малых значениях параметров реакции α и β является устойчивым. В результате, если равновесие системы (21) по тем или иным причинам нарушается, то ставка процента и национальный доход стремятся к своим новым равновесным значениям. Однако при определенных значениях параметров реакции система (21) допускает возникновение сложных апериодических колебаний, а также колебаний с возрастающей амплитудой. Еще более сложное поведение обнаруживают траектории систем разностных уравнений (22)–(25). Для определенности рассмотрим систему уравнений (23).

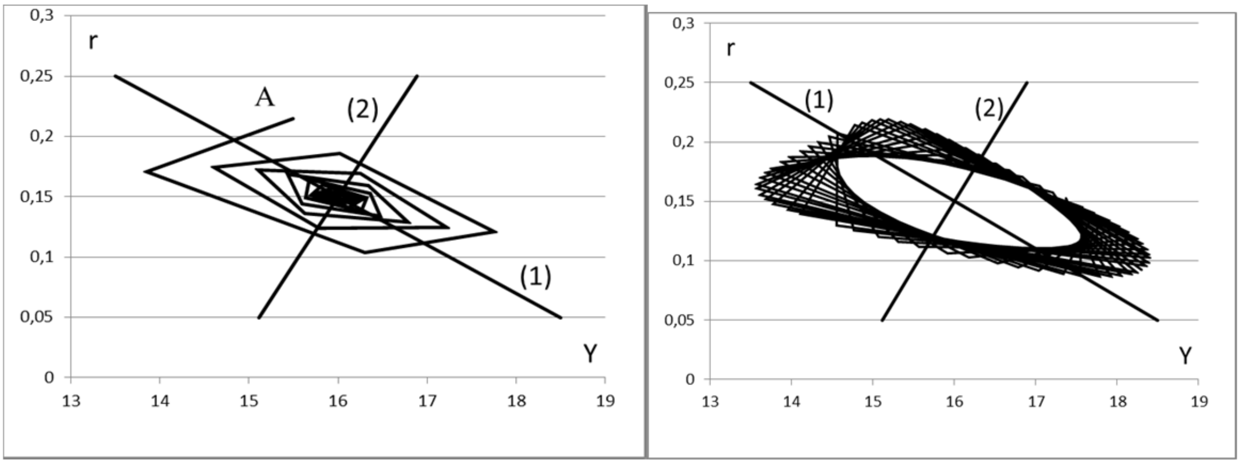


Рис. 4. Затухающие (слева) и апериодические (справа) колебания конечного продукта и ставки процента

Вариант расчетов динамики ставки процента и национального дохода, определяемой уравнениями (13) и характеризующийся колебаниями фазовых переменных с убывающей амплитудой, иллюстрируется на рис. 4 (слева). Здесь расчетная траектория динамической системы (13) напоминает форму закручивающейся спирали, и текущая точка $(Y_t; r_t)$ на фазовой плоскости при увеличении t приближается к точке равновесия. Однако при определенных значениях параметров реакции α и β модель (13) допускает возникновение сложных апериодических колебаний, а также колебаний с возрастающей амплитудой. Вариант расчетов динамики ставки процента и национального дохода, характеризующийся апериодическими колебаниями, иллюстрируется на рис. 4 (слева). Здесь амплитуда колебаний на отдельных временных отрезках может возрастать, а на других – падать.

Как видим, непрерывные и дискретные динамические модели одного и того же макроэкономического процесса могут вести себя по-разному. Какие из них более адекватно отражают реальность? Для ответа на этот вопрос отметим следующее. Во-первых, многие дискретные модели естествознания являются аппроксимацией соответствующих непрерывных моделей (законы Ньютона, газодинамики и многие другие выражаются дифференциальными уравнениями, а для их решения строятся соответствующие дискретные аналоги, которые исследуются с помощью численных методов). В экономике же, как и во многих других общественных науках, не только процедуры принятия решений часто предполагают импульсное изменение переменных, но и наблюдения (статистические данные) как правило дискретны. Поэтому в общественных науках первичными являются дискретные модели. Во-вторых, даже в рассмотренных простых динамических моделях параметры реакции α и β представляют собой, по сути, управления. Параметр α отражает реакцию товаропроизводителей, которые соответствующим образом реагируют на состояние рынка товаров и услуг. Второй параметр отражает (частично) процесс регулирования, осуществляемый центральными государственными органами, т.к. именно они определяют в конечном итоге динамику ставки процента в зависимости от той или иной ситуации на рынках (не только товарном, но и денежном). Таким образом, можно считать, что рассмотренные модели с фиксированными параметрами α и β определяет эволюцию динамической макроэкономической системы при неизменном (жестком!) управлении и с относительно слабой обратной связью. Поэтому дискретные варианты модели макроэкономической динамики допускает неустойчивые решения. Непрерывный же вариант модели в данном случае всегда приводит динамическую систему (3) в состояние равновесия, так как здесь более сильная обратная связь: ставка процента меняется непрерывно. Как следует из анализа системы уравнений (7), этого оказывается достаточным для достижения в конечном итоге равновесия, несмотря на то, что и в непрерывном варианте модели значения параметров α и β постоянны.

4. Динамические модели взаимовлияния конечного продукта, ставки процента и уровня цен

Прежде чем перейти к построению трёхмерной динамической модели взаимовлияния конечного продукта, ставки процента и уровня цен, отметим следующее.

Условие равновесия на рынке товаров и услуг $V(Y, r) = 0$, где функция $V(Y, r)$ определяется уравнением (1), задает в трёхмерном пространстве $\{Y, r, p\}$ плоскость

$$-c_1 Y - hr + a + b + G = 0 \tag{14}$$

с нормальным вектором $\overrightarrow{N} = (-c_1; -h; 0)$. Плоскость (14) параллельна координатной оси *Op*, а пересечение этой плоскости с плоскостью $p = 0$ задает линию *IS* (рис. 6). Далее, функция избыточного спроса на деньги теперь зависит от трёх переменных:

$$W(Y, r, p) = m - M + kpY - ur. \tag{15}$$

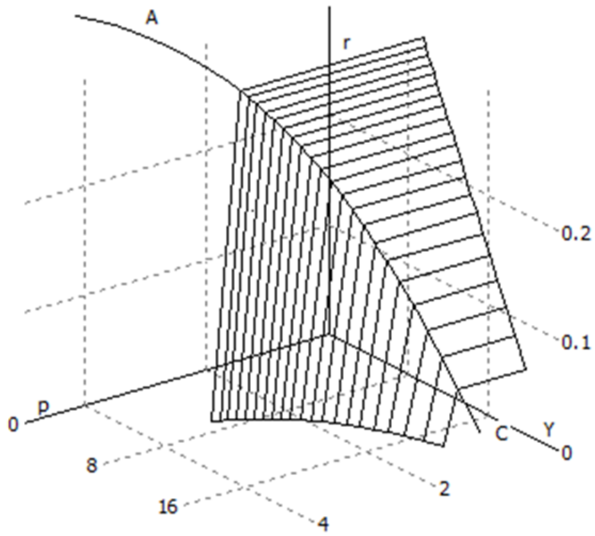


Рис. 6. Построение линии AC ***− линии равновесия на двух рынках***

Поэтому условие равновесия на рынке денег $W(Y, r, p) = 0$ приводит к уравнению

$$ur = m - M + kpY, \tag{16}$$

которое задает в фазовом пространстве $\{Y, r, p\}$ гиперболический параболоид (рис. 6).

Пересечение плоскости (14) и гиперболического параболоида (16) задает в трёхмерном пространстве $\{Y, r, p\}$, где $Y > 0$, $r > 0$, $p > 0$, линию равновесия на двух рынках – рынке товаров и услуг и рынке денег.

Рассмотрим теперь неравновесные модели динамики конечного продукта, ставки процента и уровня цен, в основе которых лежит блок-схема, изображенная на рис. 7.

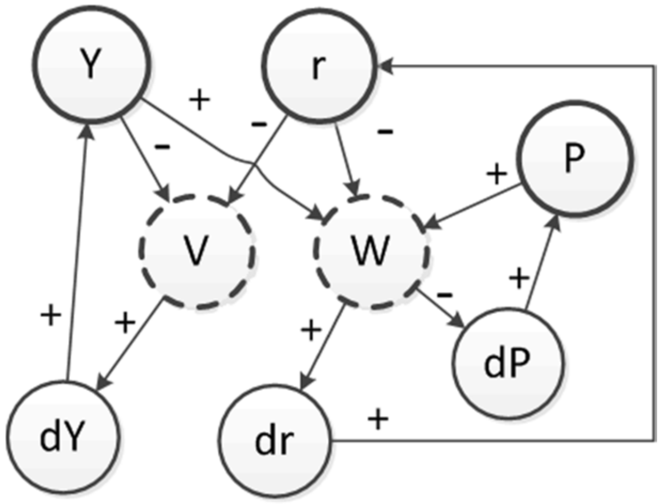


Рис. 7. Блок-схема динамической модели взаимовлияния конечного продукта, ставки процента и уровня цен

Здесь к переменным динамической модели, блок-схема которой приведена на рис. 7, добавлены уровень цен P и его приращение dP. Как видим, теперь P не параметр, а фазовая переменная.

В основе динамических моделей (как непрерывного, так и дискретного вариантов), опирающихся на блок-схему рис. 7, лежат три ключевые гипотезы. Предполагается, что: 1) предприниматели увеличивают (сокращают) производство товаров и услуг, если спрос на товары и услуги выше (ниже) их предложения; 2) банковский сектор уменьшает (увеличивает) ставку процента, если предложение денег выше (ниже) спроса на них; 3) уровень цен растёт (падает), если предложение денег выше (ниже) спроса на них. Это означает, что здесь кроме контуров $Y \to V \to dY \to Y$ и $r \to W \to dr \to r$, являющихся основой блок-схемы модели, приведенной на рис. 2, добавлен контур $p \to W \to dp \to p$.

Перейдём теперь к уравнениям модели. Простейшая непрерывная формализация блок-схемы динамической модели взаимовлияния конечного продукта, ставки процента и уровня цен (рис. 7) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \alpha V(Y, r), \\ \dfrac{dr}{dt} = \beta W(Y, r, p), \\ \dfrac{dp}{dt} = -\gamma W(Y, r, p), \end{cases} \tag{17}$$

где α, β и γ –коэффициенты реакции (положительные числа), а функции $V(Y, r)$ и $W(Y, r, p)$ определяются уравнениями (1) и (15) соответственно.

Отметим, что система уравнений (17) – не единственный вариант непрерывной формализации блок-схемы динамической модели, приведённой на рис. 7. Можно, например, использовать такую систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Y}\dfrac{dY}{dt} = \alpha V(Y, r), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} = \beta W(Y, r, p), \\ \dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt} = -\gamma W(Y, r, p). \end{cases} \qquad (18)$$

Ниже мы для описания динамики конечного продукта, ставки процента и уровня цен будем использовать систему дифференциальных уравнений (18). При этом расчет траекторий этой системы будем осуществлять методом Рунге–Кутта 2-го порядка.

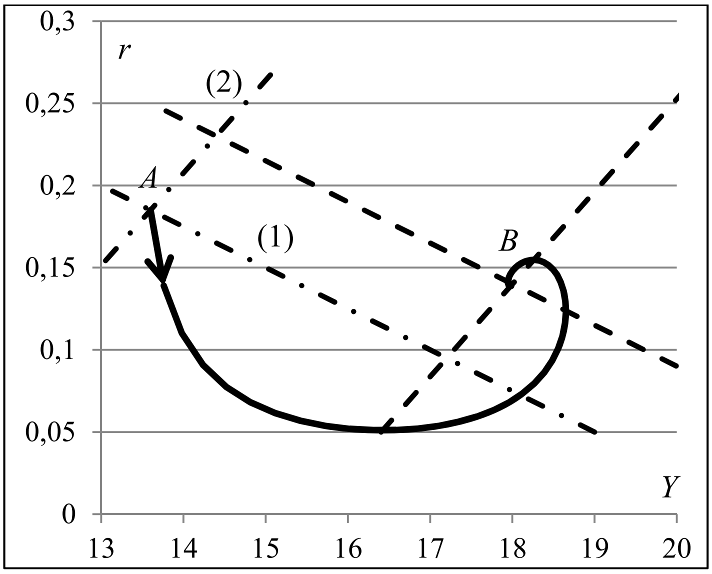


Рис. 8. Траектория системы (18) в случае фиксированных цен (**$\gamma = 0$**)

Итак, предположим, что до некоторых пор экономика находилась в состоянии равновесия. Пусть в некоторый момент резко (импульсно) изменились значения некоторых параметров макроэкономической системы, например, увеличилось количество денег, находящихся в обращении (предложение денег M) и увеличились расходы правительства G. Если цены фиксированы, то можно снова использовать аппарат модели $IS - LM$. В этом случае линия IS сместится вверх (вследствие роста параметра G), а линия LM сместится вправо (вследствие роста параметра M). В результате точка равновесия на двух рынках сместится из A в B (рис. 8). На рис. 8 приведена проекция траектории системы (18) на плоскость $\{Y, r\}$ при значении $\gamma = 0$. Как видим, ставка процента сначала немного падает, а потом возрастет до нового равновесного уровня. Одновременно происходит рост конечного продукта, а потом – некоторое его снижение до нового равновесного уровня.

Обсудим теперь случай подвижных цен ($\gamma \neq 0$). В табл. 1 приведены расчетные значения фазовых переменных для некоторого набора положительных параметров α, β и γ. Данные табл. 1 таковы: уровень цен сначала растет, достигает максимума, а потом снижается до равновесного уровня; конечный продукт монотонно увеличивается и стремится к равновесному значению; ставка процента сначала немного снижается, достигает минимума, а потом увеличивается, устремляясь к равновесному значению. Как видим, имеет место немонотонное изменение переменных.

На рис. 9 построены три траектории (*AB*, *AC* и *AD*) и две линии равновесия двух рынков (линии *a* и *b*). Сплошная линия a соответствует начальным значениям параметров, а пунктирная линия *b* – новым значениям параметров. Все параметры траекторий *AB*, *AC* и *AD*, рассчитанных на основании системы (18), одинаковы, кроме значений параметров α, β и γ. Траектория *AC* соответствует расчётным значениям табл. 1 (здесь $\alpha\beta\gamma \neq 0$); траектория *AB* соответствует случаю $P = \text{const}$ (здесь $\gamma = 0$, проекция этой траектории на плоскость $\{Y, r\}$ приведена на рис. 8); траектория *AD* соответствует случаю $r = \text{const}$ (здесь $\beta = 0$).

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1,50	1,78	1,82	1,78	1,73	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65	1,65
Y	13,60	14,42	15,21	15,81	16,22	16,48	16,64	16,74	16,80	16,83	16,85
r	0,19	0,16	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17

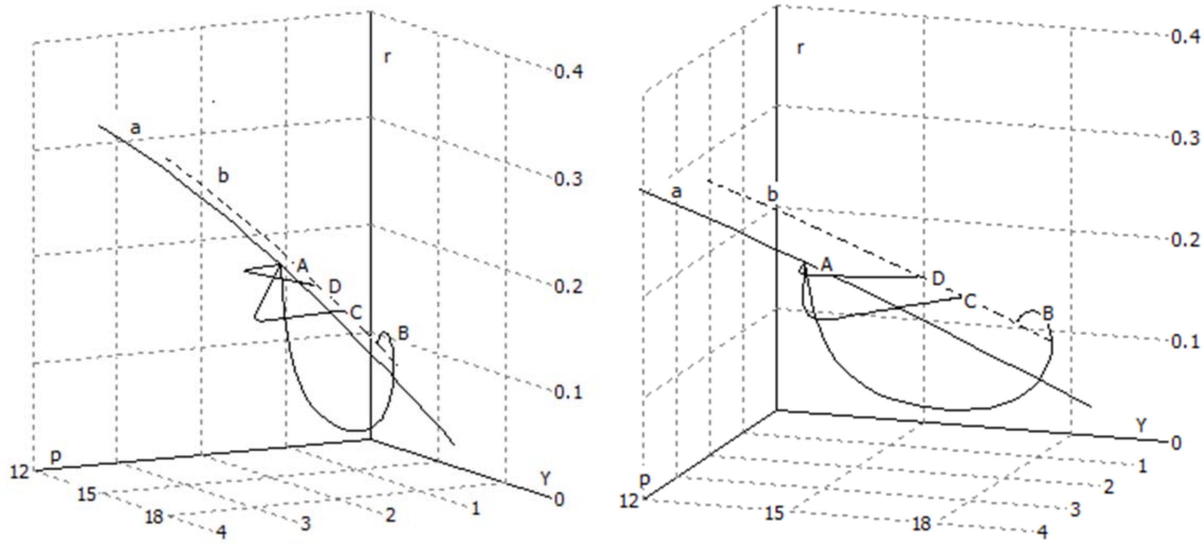


Рис. 9. Траектория AB ***– переход макроэкономической системы из одного равновесного состояние в другое***

Выводы

Построена неравновесная динамическая макроэкономическая модель, которая отражает взаимодействие товарного и денежного рынков. Поверхности $V(Y,r)=0$ и $W(Y,r,p)=0$ задают в пространстве $\{Y,r,p\}$ множества точек равновесия на рынке товаров и услуг и рынке денег соответственно. Модель имеет бесчисленное множество точек равновесия, лежащих на линии равновесия товарного рынка и рынка денег. Последняя представляет собой линию пересечения поверхностей $V(Y,r)=0$ и $W(Y,r,p)=0$. Рассмотрен вариант модели, когда уравнение $V(Y,r)=0$ задаёт в пространстве $\{Y,r,p\}$ плоскость, а уравнение $W(Y,r,p)=0$ – гиперболический параболоид. Расчётные варианты, соответствующие дискретной версии модели, дают основание говорить о существовании в этом случае бифуркационных значений параметров и, как следствие, о зависимости характера траектории от их значений. Построенные варианты модели допускают, в зависимости от значений параметров, многообразные динамические режимы: равновесие, цикличность и достаточно сложное апериодическое поведение, детерминированный хаос.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-06-00389).

Литература

1. *Харрис Л.* Денежная теория. М.: Прогресс, 1990.
2. *Shone R.* Economic Dynamics. Phase Diagrams and Their Economic Application. Second Edition. N.Y.: Cambridge University Press, 2002.

ОБ АВТОРАХ

Ю.Н. Гаврилец – д.эн., профессор, заведующий лабораторией математической социологии ЦЭМИ РАН

И.В. Тараканова – научный сотрудник лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН

С.А. Никитин – научный сотрудник лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН

В.В. Лебедев – д.э.н., профессор, заведующий кафедрой математики ГУУ

ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2015 г.

Препринты

1. **Волконский В.А.** Человек обживает мир: эволюция конструктивных и деструктивных идеологий / Препринт # WP/2015/312. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 76 с. (Рус.)
2. **Фаерман Е.Ю., Тарасова Н.А., Васильева И.А., Фонтана К.А.** Моделирование финансирования социальной сферы РФ и анализ социальной политики. Часть 1 / Препринт # WP/2015/313. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 66 с. (Рус.)
3. **Брагинский О.Б., Куницына Н.Н., Горлов А.В.** Рациональное использование углеводородного сырья в нефтегазовом комплексе России / Препринт # WP/2015/314. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 80 с. (Рус.)
4. **Граборов С.В.** Модели оптимизации бюджетно-налоговой структуры: метод решения и эквивалентность критериев / Препринт # WP/2015/315 – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 38 с. (Рус.)

Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий**. В 5 т. / Материалы Шестнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 14–15 апреля 2015 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 864 с.
2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Пленарные доклады и материалы Круглого стола Пятнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 15–16 апреля 2014 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 138 с.
3. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. К.А. Багриновского и Е.Ю. Хрусталёва. Выпуск 7. – М.: ЦЭМИ РАН, МАОН, 2015. – 189 с. (Рус.)
4. **Корпоративные программы помощи сотрудникам в приобретении жилья: проблема выбора институциональной структуры** / Под ред. В.М. Полтеровича. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 81 с. (Рус.)
5. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. К.А. Багриновского и Е.Ю. Хрусталёва. Выпуск 8. – М.: ЦЭМИ РАН, МАОН, 2015. – 197 с. (Рус.)
6. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 31. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 180 с. (Рус., англ.)
7. **Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов** / Сборник научных трудов под ред. Ю.Н. Гаврилец. Вып. 6. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 80 с. (Рус.)
8. **Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых** / Материалы научно-практической конференции. Москва, 9 декабря 2015 г. Под ред. Р.Н. Павлова. – М.: ЦЭМИ РАН, 2015. – 171 с.

Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences
Publications

2015

Working papers

1. **Volkonsky V.A.** The Human Renders Habitable the World: the Evolution of Constructive and Destructive Ideologies / Working paper # WP/2015/312. – Moscow, CEMI RAS, 2015. – 76 p. (Rus.)
2. **Faerman E.Yu., Tarasova N.A., Vasilieva I.A., Fontana K.A.** Simulation of the financing of the social sphere Russian Federation and social policy analysis. Part 1 / Working paper # WP/2015/313. – M.: CEMI RAS, 2015. – 66 p. (Rus.)
3. **Braginsky O.B., Kunitsyna N.N., Gorlov A.V.** Rational use of hydrocarbon raw materials in the oil and gas complex of Russia / Working paper # WP/2015/314. – M.: CEMI RAS, 2015. – 80 p. (Rus.)
4. **Graborov S.V.** Optimization Models of Budget and Tax Structure: Decision Method and Equivalence of Criterions / Working paper # WP/2015/315. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2015. – 38 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises**. 5 / Materials. Sixteenth Russian Symposium. Moscow, April 14–15, 2015. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2015.864 p.
2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Plenary reports and materials of the Round table. Fifteenth Russian Symposium. Moscow, April 15–16, 2014. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2015. – 138 p.
3. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific papers by ed. K.A. Bagrinovsky and Ey.Yu. Khrustalyov. Issue 7. – Moscow, CEMI RAS, IASS, 2015. – 189 p.
4. **Home Purchase Assistance Programs in Corporations: A Problem of Institutional Design** / Ed. by V.M. Polterovich. – Moscow, CEMI RAS, 2015. – 81 p. (Rus.)
5. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific papers by ed. K.A. Bagrinovsky and Ey.Yu. Khrustalyov. Issue 8. – Moscow, CEMI RAS, IASS, 2015. – 197 p.
6. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 31. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2015. – 180 p. (Rus., Eng.)
7. **Mathematical and Computer Modeling of Socio-Economic Processes** / The Collection of Articles ed. by Y.N. Gavrilets. Issue 6. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2015. – 80 p. (Rus.)
8. **Young Economics: Economic Science in Terms of Young Scientists** / Proceedings of the scientific and practical conference. Moscow, December 9, 2015, Ed. by R.N. Pavlov. – Moscow, CEMI RAS, 2015. – 171 p.

ISBN 978-5-8211-0709-1

Заказ № 31 Объем 5,0 п.л. Тираж 100 экз.

ЦЭМИ РАН